代数幾何学シンポジウム記録
2000年度　pp.117-126

モジュラー形式がみたす微分方程式の具体例について

京大理・眞野智行

モジュラー形式がみたす微分方程式の最初の例はJacobiによる次のものであろう。(Crelles J. 36 (1848))

$$(y^2y''' - 15yy'y'' + 30y'^3)^2 + 32(yy'' - 3y'^2)^3 = -\pi^2 y^{10}(yy'' - 3y'^2)^2 \quad \cdots\cdots (1)$$

解は $y = \vartheta_2(0,\tau), \vartheta_3(0,\tau), \vartheta_4(0,\tau)$ となる。

ここで
$$\vartheta_1(z,\tau) = i\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-)^n v^{n-\frac12} q^{(n-\frac12)^2}$$
$$\vartheta_2(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v^{n-\frac12} q^{(n-\frac12)^2}$$
$$\vartheta_3(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v^n q^{n^2}$$
$$\vartheta_4(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-)^n v^n q^{n^2}, \quad v = e^{2\pi i z}, \; q = e^{\pi i \tau}$$

微分方程式(1)はHalphenにより次の形に書き換えられた。

(C.R. Acad. Sci., Paris 92 (1881))

$$\begin{cases} \omega_1' = \omega_1\omega_2 - \omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_1 \\ \omega_2' = \omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 - \omega_3\omega_1 \\ \omega_3' = -\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_1 \end{cases} \quad \cdots (2)$$

(2) は特殊解

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left(\log \vartheta_2(\tau)^4\right)$$
$$\omega_2 = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left(\log \vartheta_3(\tau)^4\right)$$
$$\omega_3 = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left(\log \vartheta_4(\tau)^4\right)$$

をもち 3次元分の任意定数を含む一般解はこの特殊解から変換

$$\omega_i^A = \frac{1}{(c\tau+d)^2}\,\omega_i\!\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) - \frac{c}{c\tau+d}, \quad i=1,2,3$$
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$$

によって得られる。

また，$\omega_1 - \omega_2 = \frac{\pi i}{2}\vartheta_4(\tau)^4$, $\omega_2 - \omega_3 = \frac{\pi i}{2}\vartheta_2(\tau)^4$, $\omega_3 - \omega_1 = \frac{-\pi i}{2}\vartheta_3(\tau)^4$ ゆえ $\mathbb{C}[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ は $\Gamma(2)$ に関するモジュラー形式のなす環 $\mathbb{C}[\vartheta_2(\tau)^4, \vartheta_3(\tau)^4]$ を含み，微分に関して閉じた環を与えている．それゆえ (2) をレベル2のモジュラー形式を解析的に特徴づける基本方程式と見なすことは自然である．

一方 (2) の方程式は次の3階の微分方程式

$$\{\lambda;\tau\} + \frac{\lambda^2-\lambda+1}{2\lambda^2(1-\lambda)^2}\lambda'^2 = 0 \quad \cdots (3)$$

とも同値である。
ここで $\{\lambda;\tau\} = \frac{\lambda'''}{\lambda'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)^2$ (Schwarz微分)で
(3)は $\lambda(\tau) = \frac{\vartheta_3(\tau)^4}{\vartheta_2(\tau)^4}$ を解にもつ.

(未知関数を $X_1(\tau) = \frac{1}{2}(\log \lambda')'$
$X_2(\tau) = \frac{1}{2}\left(\log \frac{\lambda'}{\lambda^2}\right)'$
$X_3(\tau) = \frac{1}{2}\left(\log \frac{\lambda'}{(1-\lambda)^2}\right)'$ にとって
(3)を書き直し簡単な変換を施せば(2)が得られる)

このことから, elliptic modular surface に関するPicard-Fuchs方程式(fiberのelliptic curvesの周期がみたす2階の線形微分方程式)が与えられるとモジュラー形式の対数微分を解にもつ非線形微分方程式が得られるのではないかというideaが生ずる。

大山陽介氏はレベル3のelliptic modular surface (Hesse pencil $x_0^3+x_1^3+x_2^3-3ax_0x_1x_2=0$)のPicard-Fuchs方程式から次の微分方程式を構成した。

$$\begin{cases} W'+X'+Y' = WX+XY+YW \\ W'+Y'+Z' = WY+YZ+ZW \\ W'+X'+Z' = WX+XZ+ZW \\ X'+Y'+Z' = XY+YZ+ZX \\ e^{\frac{4}{3}\pi i}(XZ+YW)+e^{\frac{2}{3}\pi i}(XW+YZ)+(XY+ZW)=0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots (4)$$

解はDedekindのeta関数

$\eta(\tau) = q^{1/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$ を用いて

$$W = \left(\log\frac{\eta(\frac{\tau}{3})^3}{\eta(\tau)}\right)'$$

$$X = \left(\log\frac{\eta(3\tau)^3}{\eta(\tau)}\right)'$$

$$Y = \left(\log\frac{\eta(\frac{\tau+2}{3})^3}{\eta(\tau)}\right)'$$

$$Z = \left(\log\frac{\eta(\frac{\tau+1}{3})^3}{\eta(\tau)}\right)'$$ と書ける

この場合にもレベル3のモジュラー形式がなす環の偶数ウェイトの部分環が(4)から回復できる。

これらのことから他のelliptic modular surfaceの場合にどのような微分方程式が得られるかは興味ある問題である. 上の2つの場合に群の対称性(それぞれ

S_3, A_4と同型)が重要な役割を果たすことを考慮して、$\Gamma(4)$, $\Gamma(5)$の場合には特に簡明な結果が得られるに違いないと思われる。結論から言うとそれは正しい。しかし計算を始めた頃にはレベル5のモジュラー形式のなす環は明確ではなかった。実際、ほぼ同じ頃 坂内英一氏はコード理論との関連から次の予想をたてた。

レベル5のモジュラー形式のなす環は分数ウェイトのものまでこめて考えると2変数の多項式環と同型になる.

この予想はその後 坂内－小池－宗政－関口氏により分数ウェイトのモジュラ形式の定式化も込めて証明された。

以下では、このことを踏まえて我々の問題のレベル5の場合に関する結果を構成のあらすじも含めて述べる.

まずレベル5のelliptic modular surfaceのPicard-Fuchs方程式を必要とする

が、我々の目的は具体的な表示にあるので、座標もよく分かったもので取ってやる必要がある。
そのため昔から知られている次の表示を利用する。(Bianchi, Math. Ann. 17 (1880))

$$\begin{cases} X_0^2 + aX_2X_3 - \frac{1}{a}X_1X_4 = 0 \\ X_1^2 + aX_3X_4 - \frac{1}{a}X_2X_0 = 0 \\ X_2^2 + aX_4X_0 - \frac{1}{a}X_3X_1 = 0 \\ X_3^2 + aX_0X_1 - \frac{1}{a}X_4X_2 = 0 \\ X_4^2 + aX_1X_2 - \frac{1}{a}X_0X_3 = 0 \end{cases} \quad \cdots (5)$$

(5) は $a \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{\infty, 0, -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})\varepsilon^k\}_{k=0,\cdots,4}$ $(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}})$ で $\mathbb{P}_4(\mathbb{C})$ の中の非特異楕円曲線 C_a を定める。
$\bigcup_{a \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})} C_a \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ (正確にはその特異点を除去したもの) はレベル5の elliptic modular surface と同型になる。
さらに底空間の同型 $\overline{\mathbb{H}/\Gamma(5)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ は
$$\tau \longmapsto a(\tau)$$

$$a(\tau) = q^{2/5} \frac{\vartheta_3\left(\frac{3\tau+1}{2}, 5\tau\right)}{\vartheta_3\left(\frac{\tau+1}{2}, 5\tau\right)} = q^{2/5} \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-)^n q^{5n^2-n}}{\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-)^n q^{5n^2-3n}}$$

で与えられ　分岐被覆

$$\overline{\mathbb{H}/\Gamma(5)} \longrightarrow \overline{\mathbb{H}/SL(2,\mathbb{Z})} \quad (\text{Galois群は } A_5)$$

を上の $a(\tau)$ と J-関数を使って表示したものがいわゆる正二十面体式

$$J(\tau)=\frac{\left(-(a^{20}+1)+228(a^{15}-a^{5})-494a^{10}\right)^3}{1728\,a^5(a^{10}+11a^5-1)^5}$$ である。

一方 (5) 上の正則 1-形式を適当にとってやると周期 $K(a)$ は 2階の線形微分方程式

$$a(a^{10}+11a^5-1)\frac{d^2K}{da^2}+(11a^{10}+66a^5-1)\frac{dK}{da}+25a^4(a^5+3)K=0$$

$$\cdots (6)$$

をみたし、

(6) の各特異点での局所指数は

$$\left\{\begin{array}{ccc} a=0 & -\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})\varepsilon^k & \infty \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right\}$$

∞ で正則で 5位の零点をもつ (6) の解を $K_1(a)$ としそれに $a(\tau)$ を合成したものを $K_1(\tau)$ とおくと

$$K_1(\tau)=2\pi i\, q^{1/4}\,\vartheta_3\!\left(\frac{\tau+1}{2},5\tau\right)^5\eta(\tau)^{-3}$$ となる。

また (6) より

$$\{\tau;a\}=\frac{a^{20}+1-228(a^{15}-a^5)+494a^{10}}{2a^2(a^{10}+11a^5-1)^2}$$

が計算できる。

これらのことから、詳しい計算は省略するが
($K_1(\tau)$ を $SL(2,\mathbb{Z})/\Gamma(5)$ で変換した時の挙動を知る必要がある)、$\Gamma(2)$ の場合に(3)から(2)を導いたのと同様のことを行って次の結果を得る。

$$\alpha_1(\tau) = q^{1/20}\eta(\tau)^{-3/5}\vartheta_3\left(\frac{\tau+1}{2}, 5\tau\right) = q_0^{-3/5}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-)^n q^{5n^2-n}$$

$$\alpha_2(\tau) = q^{9/20}\eta(\tau)^{-3/5}\vartheta_3\left(\frac{3\tau+1}{2}, 5\tau\right) = q_0^{-3/5}q^{2/5}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-)^n q^{5n^2-3n}$$

但し $q_0 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$ とし

($(\alpha_1(\tau))^5 = K_1(\tau)$, $\dfrac{\alpha_2(\tau)}{\alpha_1(\tau)} = a(\tau)$ に注意)

$$X_\infty(\tau) = \frac{d}{d\tau}(\log\alpha_1(\tau)).$$

$$X_0(\tau) = \frac{d}{d\tau}(\log\alpha_2(\tau)).$$

$$X_{2k+1}(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left\{\log\left(\alpha_2(\tau) + \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\varepsilon^k\alpha_1(\tau)\right)\right\},$$

$$X_{2k+2}(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left\{\log\left(\alpha_2(\tau) + \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\varepsilon^k\alpha_1(\tau)\right)\right\},$$

$k = 0, 1, 2, 3, 4$ とおくと

$X_\infty, X_0, X_1, \cdots, X_{10}$ は次をみたす

$$
\begin{cases}
\dfrac{dX_\infty}{d\tau} = \sum_{k=0}^{10} X_\infty X_k - X_\infty X_0 - X_1X_2 - X_3X_4 - X_5X_6 - X_7X_8 - X_9X_{10} \\[2ex]
\dfrac{dX_j}{d\tau} = X_\infty X_j + \sum_{k=0}^{10} X_j X_k - X_j^2 - X_\infty X_0 - X_1X_2 - X_3X_4 - X_5X_6 - X_7X_8 - X_9X_{10} \\
\qquad (j=0,1,\cdots,10) \\[2ex]
\dfrac{X_j - X_k}{a_j - a_k} \cdot \dfrac{X_l - X_n}{a_l - a_n} = \dfrac{X_j - X_n}{a_j - a_n} \cdot \dfrac{X_l - X_k}{a_l - a_k} \qquad \cdots (7) \\[2ex]
(X_j - X_\infty) \dfrac{X_l - X_k}{a_l - a_k} = \dfrac{X_j - X_k}{a_j - a_k} \cdot (X_l - X_\infty) \\[2ex]
\quad \text{但し } j, k, l, n \in \{0, 1, \cdots, 10\} \text{ で互に相異る} \\
\quad \{a_0, a_1, \cdots, a_{10}\} = \{0, -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})\varepsilon^k\}_{k=0,\cdots,4}
\end{cases}
$$

一方、先に述べたB-K-M-Sによる結果をもう少し正確に述べると、

$\alpha_1(\tau)$, $\alpha_2(\tau)$ は適当な保型因子に対して$\Gamma(5)$に関するウェイト $1/5$ のモジュラー形式となり、その保型因子に関するモジュラー形式のなす環は $\mathbb{C}[\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau)]$ に同型となる。

よって我々の微分方程式(7)はモジュラー形式のなす環の生成元の対数微分がみたす方程式である(対数微分をとっているので我々の場合には保型因子の

問題は生じない)。
さらに $\mathbb{C}[\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau)]$ の中で偶数ウェイトのモジュラー形式のなす部分環を考えると(それは通常の保型因子による定義と一致する) それは差 $X_\infty - X_0, X_\infty - X_1, \cdots, X_\infty - X_{10}$ をとることによって回復される。

以上の事に関して詳細に興味を持たれた方は
Differential Relations for modular forms of level five, to be appear in J. Math. Kyoto univ.
を参照して下さい。