Title	扇の代数幾何における永田のコンパクト化と交叉複体
Author(s)	石田, 正典
Citation	代数幾何学シンポジューム記録 (2001), 2001: 103-114
Issue Date	2001
URL	http://hdl.handle.net/2433/214747
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

代数幾何学シンポジウム記録
2001年度　pp.103-114

扇の代数幾何における永田のコンパクト化と交叉複体

石田 正典
東北大学大学院理学研究科

序文

トーリック多様体は同じ次元の代数的トーラスが効果的に作用する正規代数多様体と定義される．その大きな特徴は，各 r 次元トーリック多様体に r 次元実空間の錐体の集まりである扇が対応し，また逆に扇によりトーリック多様体が再構成され，またその幾何学的性質を記述できることにある．

扇の定義を正確に述べておく．

r を 0 以上の整数とし，N を階数 r の自由 $\mathbf{Z}$ 加群とする．$N_{\mathbf{R}} := N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ は r 次元の実空間で N を格子点集合として含んでいる．$\mathbf{R}_0$ を 0 以上の実数全体の集合とする．部分集合 $C \subset N_{\mathbf{R}}$ は，有限個の元 $y_1, \ldots, y_s \in N_{\mathbf{R}}$ が存在して

$$C = \mathbf{R}_0 y_1 + \cdots + \mathbf{R}_0 y_s \tag{1}$$

となるとき凸多面錐体という．ここで $y_1, \ldots, y_s$ が N の点からとれるとき有理的といい，また $C \cap (-C) = \{0\}$ を満たすとき強凸多面錐体という．

M を N の双対 $\mathbf{Z}$ 加群とし $\langle\ ,\ \rangle : M_{\mathbf{R}} \times N_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ を自然な非退化双一次写像とする．凸多面錐体 C の部分集合 C' は，$x \in M_{\mathbf{R}}$ が存在して $C \subset (x \geqq 0)$ かつ $C' = C \cap (x = 0)$ となるとき C の面といい $C' \prec C$ と書く．空でない有理的強凸多面錐体の集合 Δ が扇とは，Δ が

(i) $\sigma \in \Delta$ かつ $\eta \prec \sigma$ であれば $\eta \in \Delta$ である．

(ii) $\sigma, \tau \in \Delta$ であれば $\sigma \cap \tau$ は σ および τ の面である．

の二つの条件を満たすことと定義する．有理的強凸多面錐体 π の面全体の集合 $F(\pi)$ は扇である．このような扇をアフィン扇という．

各 $\sigma \in \Delta$ について，その双対錐体 $\sigma^\vee \subset M_{\mathbf{R}}$ が

$$\sigma^\vee := \{x \in M_{\mathbf{R}} \,;\, \langle x, y\rangle \geqq 0, \forall y \in \sigma\} \tag{2}$$

で定義される．これは $M_{\mathbf{R}}$ の r 次元の凸多面錐体となる．このとき $M \cap \sigma^\vee$ は有限生成の可換半群となるので，複素数体上の半群環 $\mathbf{C}[M \cap \sigma^\vee]$ はアフィン環となり，その商体は群環 $\mathbf{C}[M]$ の商体に等しい．扇 Δ に対応するトーリック多様体 $Z(\Delta)$ はアフィントーリック多様体 $\mathrm{Spec}\,\mathbf{C}[M \cap \sigma^\vee]$ のすべての $\sigma \in \Delta$ についての張り合わせとして定義される．$Z(\Delta)$ の関数体は $\mathbf{C}[M]$ の商体となり，$T_N := \mathrm{Spec}\,\mathbf{C}[M]$ がこれに作用する代数的トーラスである．ただし，Δ が無限集合の場合は $Z(\Delta)$ は有限型でないスキームとなるので，有限扇の場合に通常の代数多様体となる．

ここまでは通常の記号の使い方であるが，1999 年の城崎シンポジウムで述べたように，扇を $\{1\}$ の上に定義された変種のスキームと考え，対応するトーリック多様体はその基底の変換と考えることもできる．扇だけでどれだけ代数幾何らしいことができるかに興味があるので，ここからは扇を多様体のような記号で表すことにする．すなわち，$X = \Delta$ とすれば，対応する複素数体上のトーリック多様体は $X_{\mathbf{C}}$ となる．扇の位相も多様体の位相に合わせて次のように定義する．$U \subset X$ が開集合とは，$\sigma \in U$ かつ $\eta \prec \sigma$ であれば $\eta \in U$ であることとする．これは $U = \emptyset$ であるか，または U が X の部分扇であることと同値である．このとき，自然な連続写像 $X_{\mathbf{C}} \to X$ が存在する．

さらに，扇の定義から錐体の有理性の条件を除いたものを実扇の定義とする．区別するために，これまでの扇を有理扇と呼ぶこともある．講演では扇または実扇についての永田のコンパクト化と，交叉コホモロジー群を生成する交叉複体について述べたが，ここでは有理扇のコンパクト化の準備の部分を中心に書くことにする．

扇 Δ について，その台 $|\Delta|$ を $\bigcup_{\sigma\in\Delta} \sigma$ で定義する．Δ が完備とは有限扇であって $|\Delta| = N_{\mathbf{R}}$ となることをいう．有限扇 X について，X が完備であることと $X_{\mathbf{C}}$ が完備代数多様体であることは同値である．また，X が完備扇 $\overline{X}$ に部分扇として含まれれば，$X_{\mathbf{C}}$ は $\overline{X}_{\mathbf{C}}$ の開部分多様体であり，$\overline{X}_{\mathbf{C}}$ が $X_{\mathbf{C}}$ の完備化の一つとなる．しかし，有限扇 X に対して完備扇 $\overline{X}$ を見つけることは一見簡単そうに思えるが，実は容易ではない．存在すること自体は，隅広の同変完備化定理により対応するトーリック多様体の方を完備化して，それに対応する完備扇をとるという方法で代数幾何の側からわかる．ただし，当然この方法は有理扇の場合にしか使えない．有限扇の完備化の存在の直接証明についてはすでにエバルトによ

るプレプリント [E] があるが，代数幾何と組合せ論との境界を確認する観点から，永田による代数多様体の完備化の存在証明 [N1], [NMM, 2.4] をなぞる形での扇の完備化を試みた．

永田による証明では代数多様体のザリスキ・リーマン空間とイデアルを中心とした代数多様体のブローアップが重要な役割を果たす．したがって，扇についてもザリスキ・リーマン空間とブローアップについていくつかの基本的事項を以下で整理しておく．これらを用いて行う代数多様体の完備化 [NMM, 2.4] の扇の場合への翻訳については

```
http://www.math.tohoku.ac.jp/~ishida/compactify.tex
```

に置くのでそちらを見て欲しい．代数多様体の完備化についてはドリーニュによる方法（[C] 参照）もあるが，これと扇の完備化との関係についてはまだ考えていない．

なお，扇や実扇の交叉複体については，講演で述べたように定式化は出来ているが，肝心の実扇についての強レフシェッツ定理の類似は弱い形でもまだ証明できていない．

1 扇のザリスキ・リーマン空間

体 K の部分環 R は条件

(*) 任意の $x \in K \setminus R$ について $1/x \in R$ となる．

を満たすとき付値環という．特に，$R = K$ も付値環である．

K を商体とするネーターとは限らない局所環 $(R, \mathfrak{m}), (R', \mathfrak{m}')$ が $R \subset R'$ と $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap R$ を満たすとき，R' が R を支配するといい $R \leqq R'$ と書く．

K を商体とする任意の局所環 $(R, \mathfrak{m})$ に対して，これを支配する K の付値環 $(R', \mathfrak{m}')$ が存在する．$(R, \mathfrak{m})$ が代数多様体の局所環の場合，R' は点を選びながら R をブローアップして行った極限と考えられる．

k を任意の体とする．X を k 上の代数多様体とし K をその関数体とする．K の付値環 R がスキームとしての X の点 x の局所環 $\mathcal{O}_x$ を支配するとき，R は x を支配するという．スキーム X の点を支配する K の付値環全体を $\mathrm{ZR}(X)$ と書き X の**ザリスキ・リーマン空間**という．また，k を含む K の付値環全体を k の表記は省略して $\mathrm{ZR}(K)$ と書く．

次の定理は完備化の判定法としてよく知られている．

定理 1.1 X が完備であることと $\mathrm{ZR}(X) = \mathrm{ZR}(K)$ であることは同値である．

$\mathrm{ZR}(X)$ の位相は次のように定義される（[NMM, 2.4] 参照）.

双有理固有射 $X' \to X$ と X' の閉集合 Y について Y の点を支配する付値環全体を F とし，このような F 全体を閉集合の生成基とする.

これは，次の集合を開集合の生成基とする位相と同じである．B を k 上有限生成で K を商体とする整域，$E(B)$ を B を含み $\mathrm{ZR}(X)$ に属する K の付値環全体とする．このとき $E(B)$ 全体の集合を生成基とする.

定理 1.2 ([NMM, 定理 2.4.6]) 任意の代数多様体 X について $\mathrm{ZR}(X)$ はコンパクトである.（ハウスドルフ性はないので準コンパクトということもある.）

このことは永田による代数多様体の完備化に利用されている.

トーリック多様体を定める有理扇についてのザリスキ・リーマン空間の類似物を考える．この場合は体 K の代わりは N の双対加群 $M \simeq \mathbf{Z}^r$ である.

M に定義された関係 $\leqq$ が**加法的前順序**とは次の条件を満たすこととする.

(1) 任意の $x, y \in M$ について $x \leqq y$ または $y \leqq x$ が成り立つ.

(2) $x \leqq y$ かつ $y \leqq z$ であれば $x \leqq z$ となる.

(3) $x \leqq y$ であれば，任意の $z \in M$ について $x + z \leqq y + z$ となる.

ここで，反対称律「$x \leqq y$, $y \leqq x$ ならば $x = y$」は条件に入れない.

M の加法的前順序全体の集合を $\mathrm{ZR}(M)$ と書き，各 $v \in \mathrm{ZR}(M)$ に対応する M の前順序を $\leqq_v$ と書くことにする．$M_v := \{x \in M\ ;\ 0 \leqq_v x\}$ が付値環に相当するもので，M_v は任意の $x \in M \setminus M_v$ に対して $-x \in M_v$ を満たす M の部分半群となっている.

任意の $x, y \in M$ について $x \leqq y$ となる自明な前順序を $\eta(M)$ と書く.

$$\phi_M : \mathrm{ZR}(M) \setminus \{\eta(M)\} \longrightarrow (N_{\mathbf{R}} \setminus \{0\})/\mathbf{R}_+$$

を次のように定義する．$v \in \mathrm{ZR}(M) \setminus \{\eta(M)\}$ に対して，M_v の $M_{\mathbf{R}}$ での凸包を C_v とおく．このとき閉包 $\overline{C}_v$ は閉半空間となるので，これを定める $(N_{\mathbf{R}} \setminus \{0\})/\mathbf{R}_+$ の元を $\phi_M(v)$ と定義する.

$S_N := (N_{\mathbf{R}} \setminus \{0\})/\mathbf{R}_+$ と定義する．$\mathrm{ZR}(M)$ は次のような再帰的な構造をもっている．$x \in N_{\mathbf{R}} \setminus \{0\}$ に対して $\bar{x}$ を S_N への像とする．このとき，$\phi_M^{-1}(\bar{x})$ は $\mathrm{ZR}(M(x))$ と自然に同一視できる．ここで，$M(x)_{\mathbf{R}}$ は超平面 $(x = 0)$ に含まれる $M_{\mathbf{R}}$ の最大の有理部分空間で，$M(x) := M(x)_{\mathbf{R}} \cap M$ である.

C を強凸とは限らない $N_{\mathbf{R}}$ の有理凸多面錐体とする．このとき，M の有限個の元 $x_1, \ldots, x_s$ により

$$C = (x_1 \geqq 0) \cap \cdots \cap (x_s \geqq 0)$$

と書くことができる．$\mathrm{ZR}(M)$ の部分集合 $U(C)$ を

$$U(C) := \{v \in \mathrm{ZR}(M) \,;\, 0 \leqq_v x_i, i = 1, \ldots, s\}$$

で定義し，このような $U(C)$ 全体を開集合の生成基とする位相を $\mathrm{ZR}(M)$ に導入する．M の有限部分集合全体は可算集合であるから，この位相が第 2 可算公理を満たすことがわかる．特に，$\mathrm{ZR}(M)$ の部分集合 S がコンパクトかどうかは，S での点列が常に S の点に収束する部分列をもつか否かで判定できる．

$\mathrm{ZR}(M)$ の中で反対称律を満たし順序となっている元全体を $\mathrm{ZR}_0(M)$ とおく．$\mathrm{ZR}_0(M)$ は黒田が [K] で考えたローラン多項式環の単項式全体に入る乗法的順序全体の集合と本質的に同じものである．黒田は全く別の用途のためこれを考えついている．

命題 1.3 $\mathrm{ZR}_0(M)$ は $\mathrm{ZR}(M)$ の閉集合で，位相の $\mathrm{ZR}_0(M)$ への制限は黒田により定義された位相 [K] に等しい．

有限扇 Δ のザリスキ・リーマン空間 $\mathrm{ZR}(\Delta)$ は

$$\mathrm{ZR}(\Delta) := \bigcup_{\sigma \in \Delta} U(\sigma)$$

で定義する．

定理 1.4 $\mathrm{ZR}(M)$ はコンパクトである．ただし，$r > 0$ では $\mathrm{ZR}(M)$ はハウスドルフではない．また，任意の有限扇 Δ について $\mathrm{ZR}(\Delta)$ もコンパクトである．

証明　永田の手法 [NMM, 2.4] による証明を行う．各 $m \in M \setminus \{0\}$ に対して $\widehat{S}^0_m := \{-1, 0, 1\}$ とおく．$m, m' \in M \setminus \{0\}$ がある $\lambda > 0$ で $\lambda m = m'$ となる場合 $m \sim m'$ と定義する．$v \in \mathrm{ZR}(M)$ と $m \in M \setminus \{0\}$ に対して $v(m) \in \widehat{S}^0_m$ を $m <_v 0$ なら -1 とし，$m \leqq_v 0, 0 \leqq_v m$ なら 0, そして $0 <_v m$ なら 1 と定義する．ここで $x <_v y$ とは $x \leqq_v y$ であって $y \leqq_v x$

でないこととする．$0 \leqq_v m$ となる m の集合で $v \in \mathrm{ZR}(M)$ は確定するので，v を $(M \setminus \{0\})/\sim$ から $\widehat{S}^0_m$ への写像と考えて，埋め込み

$$\mathrm{ZR}(M) \subset \prod_{(M\setminus\{0\})/\sim} \widehat{S}^0_m$$

が得られる．$\widehat{S}^0_m$ の弱い方の位相を開集合が $\emptyset, \{0\}, \{0,1\}, \{-1,0,1\}$ であるとして定義する．$\{v \ ; \ v(m) = 0,1\}$ の有限個の m についての交わりが $\mathrm{ZR}(M)$ の開集合の基を構成することから，$\mathrm{ZR}(M)$ の位相は $\prod_{(M\setminus\{0\})/\sim} \widehat{S}^0_m$ の直積位相の相対位相に等しいことがわかる．次に $\widehat{S}^0_m$ に離散位相を入れて，直積位相を考えるとチコノフの定理によりコンパクトである．$\mathrm{ZR}(M)$ はこの強い位相による直積空間の

$$v(m) = -1 \text{ or } v(m') = -1 \text{ or } v(m+m') = 0,1$$

と

$$v(m) = 0,1 \text{ or } v(-m) = 1$$

で定義される閉集合である．したがって $\mathrm{ZR}(M)$ は強い位相でコンパクトで，したがって元の弱い位相でもコンパクトとなる．

証明終わり

$v \in \mathrm{ZR}(M)$ とする．$v \neq \eta(M)$ であれば，$x_1 := \phi_M(v)$ で定義される $M_{\mathbf{R}}$ の超平面と M の交わりを M_1 とし，v の M_1 への制限を v_1 とする．以下，帰納的に $v_i \neq \eta(M_i)$ であれば $x_{i+1} := \phi_{M_i}(v_i)$ で定義される $(M_i)_{\mathbf{R}}$ の超平面と M_i の交わりを M_{i+1} とし，v_i の M_{i+1} への制限を v_{i+1} と定義する．M の階数は r であるから，r 以下のある非負整数 s で $v_s = \eta(M_s)$ となる．この s を v の階数とよぶ．$\eta(M)$ の階数は 0 とする．これは付値環の階数に相当するものである．

$v \neq \eta(M)$ の場合に，v の最小の一般化 $v' \in \mathrm{ZR}(M)$ が順序を

$$x \leqq_{v'} y \Longleftrightarrow x \leqq_v y \text{ または } y - x \in M_s \tag{3}$$

とすることにより定義される．v の階数が s の場合，このような一般化を s 回行うと $\eta(M)$ となる．

2 扇のブローアップ

錐体はすべて有限個の元で生成された凸多面錐体とする．

C を $N_{\mathbf{R}}$ の錐体とする．$M_{\mathbf{R}}$ の部分集合 P が凸であって

$$x \in P, y \in C^{\vee} \Longrightarrow x + y \in P \tag{4}$$

を満たすとき $C^{\vee}$ 凸と呼ぶことにする．

$M_{\mathbf{R}}$ の部分集合 S に対して

$$S^{\vee} := \{y \in N_{\mathbf{R}} \,;\, \langle x, y\rangle \geqq 0, \forall x \in S\} \tag{5}$$

とおく．

有限個の元で生成された r 次元 $C^{\vee}$ 凸集合 P に対して

$$\mathrm{Fan}(P) := \{(P - x)^{\vee} \,;\, x \in P\} \tag{6}$$

は台が C に等しい有限実扇となる．P が r より低い次元である場合にも $\mathrm{Fan}(P)$ を同様に定義すると，これは C の強凸とは限らない錐体による分割となっている．

特別の場合として $C = N_{\mathbf{R}}$ とすると，P は有界な凸多面体となる．P の次元が r であれば $\mathrm{Fan}(P)$ は完備である．このような実扇を射影的扇と呼ぶ．P が有理的であれば，$\mathrm{Fan}(P)$ は射影的トーリック多様体を定義する．

π を有理的な錐体とする．全体ではない閉部分集合 $Y \subset F(\pi)$ を中心とする有理扇 $F(\pi)$ のブローアップ $\mathrm{Bl}_Y^N(F(\pi))$ が格子 N に依存して次のように定義される．

$\mathcal{S}(\pi) := M \cap \pi^{\vee}$ とする．また，各 $\sigma \in F(\sigma)$ に対して $\mathcal{S}(\pi;\sigma) := M \cap \pi^{\vee} \cap \sigma^{\perp}$ とおく．ここで $\sigma^{\perp} := \{x \in M_{\mathbf{R}} \,;\, \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in \sigma\}$ である．$P(\pi, Y)$ を

$$\mathcal{S}(\pi) \setminus \bigcup_{\sigma \in Y} \mathcal{S}(\pi;\sigma) \tag{7}$$

の凸包とする．$\mathbf{0} \notin Y$ であることから，これは空ではなく，有限生成の $\pi^{\vee}$ 凸集合となる．このとき $\mathrm{Bl}_Y^N(F(\pi)) := \mathrm{Fan}(P(\pi, Y))$ は π を台とする有限扇となる．

この細分に対応する対応するトーリック多様体の正則写像

$$\mathrm{Bl}_Y^N(F(\pi))_{\mathbf{C}} \longrightarrow F(\pi)_{\mathbf{C}} \tag{8}$$

は，被約な閉部分多様体 $Y_{\mathbf{C}} \subset F(\pi)_{\mathbf{C}}$ の定義イデアルを中心としたブローアップの正規化に等しい．

$N_{\mathbf{R}}$ の有理扇 X, Y について，各 $\sigma \in X$ に対して $\sigma \subset \rho$ となる $\rho \in Y$ が存在する場合，トーリック多様体の双有理正則写像 $X_C \to Y_{\mathbf{C}}$ が存在する．このとき，扇についても X は Y に正則ということにする．さらに，これは扇の双有理正則写像を定義していると考え $f : X \to Y$ のように書く．f は集合の写像としては $\sigma \in X$ に σ を含む最小の錐体 $\rho = f(\sigma) \in Y$ を対応させるものである．

一般に，$M_{\mathbf{Q}}$ の空でない有限部分集合で生成される $\pi^\vee$ 凸集合 P に対して，$\mathrm{Fan}(P)$ は $F(\pi)$ の有理的な細分で，対応するトーリック多様体の正則写像は，次数環

$$B := \bigoplus_{n=0}^{\infty}[M \cap nP]_{\mathbf{C}} \tag{9}$$

についての自然な写像 $\mathrm{Proj}\, B \to \mathrm{Spec}\, \mathbf{C}[M \cap \pi^\vee]$ に等しい．ここで，$S \subset M$ に対して $S_{\mathbf{C}}$ で $\mathbf{C}[M]$ の部分ベクトル空間 $\bigoplus_{m \in S} \mathbf{e}(m)$ を表している．また $0P = \pi^\vee$ と考えている．

X が扇で各 $\sigma \in X$ について有限生成 $\sigma^\vee$ 凸集合 P_σ が与えられているとする．$\sigma \prec \tau$ の関係がある場合に常に $P_\sigma = P_\tau + \sigma^\vee$ が成り立つとすると，

$$\mathrm{Fan}(\{P_\sigma\, ;\, \sigma \in X\}) := \bigcup_{\sigma \in X} \mathrm{Fan}(P_\sigma) \tag{10}$$

は扇 X の細分となる．これはトーリック多様体で考えると同変な分数イデアルによるブローアップの正規化に対応するので，扇の細分についても同じようにいうことにする．すなわち，この条件を満たす $P = \{P_\sigma\, ;\, \sigma \in X\}$ を X の多面分数イデアルといい，扇 $\mathrm{Fan}(P)$ を X のこの多面分数イデアルによるブローアップという．さらに，各 P_σ が $\sigma^\vee$ に含まれている場合に X の多面イデアルと呼ぶことにして，この場合，得られた扇を多面イデアルによるブローアップという．多面イデアル P について $\{\sigma \in X\, ;\, P_\sigma \neq \sigma^\vee\}$ を P の台という．これは多様体ではイデアルで定義される閉部分多様体の台に相当する．

◎多面分数イデアルの和と共通部分

$P = \{P_\sigma\, ;\, \sigma \in X\}$ と $Q = \{Q_\sigma\, ;\, \sigma \in X\}$ を X の多面分数イデアルとする．各 σ についてミンコフスキー和 $P_\sigma + Q_\sigma$ を考えると，多面分数イデアル $P + Q := \{P_\sigma + Q_\sigma\, ;\, \sigma \in X\}$ が得られる．ただし，これは整域の分数イデアルでは積に近いものである．また，自明ではないが交わり $P_\sigma \cap Q_\sigma$ も有限生成の $\sigma^\vee$ 凸集合なので $P \cap Q := \{P_\sigma \cap Q_\sigma\, ;\, \sigma \in X\}$ も多面分数イデアルとなる．

有限扇 X, X' について,

$$J(X, X') := \{\sigma \cap \tau\,;\, \sigma \in X, \tau \in X'\} \tag{11}$$

とおく. $J(X, X')$ も有限扇で X と X' へ正則である. 扇 Y が X と X' へ正則であれば $J(X, X')$ へも正則となる. また,

$$\mathrm{ZR}(J(X, X')) = \mathrm{ZR}(X) \cap \mathrm{ZR}(X') \tag{12}$$

が成り立つ.

命題 2.1 P, Q を有限扇 X の多面分数イデアルとすると

$$\mathrm{Fan}(P + Q) = J(\mathrm{Fan}(P), \mathrm{Fan}(Q)) \tag{13}$$

となる.

多面分数イデアル P に対して, P^{-1} を各 $\sigma \in X$ について

$$P_\sigma^{-1} := \{x \in M_{\mathbf{R}}\,;\, P + x \subset \sigma^\vee\} \tag{14}$$

により定義する. P^{-1} も多面分数イデアルで $P + P^{-1}$ は X の多面イデアルとなる. 命題 2.1 により $\mathrm{Fan}(P + P^{-1})$ は $\mathrm{Fan}(P)$ の細分である.

◎部分扇の多面イデアルの最大延長

X を扇とし, U をその空でない開部分集合すなわち部分扇とする. P を U の多面イデアルとすると, $P'|U = P$ となる X の多面イデアル P' で最大のものが存在する. 作り方は, 各 $\sigma \in X$ に対して

$$P'_\sigma := \sigma^\vee \cap \bigcap_{\eta \in F(\sigma) \cap U} P_\eta \tag{15}$$

と定義すればよい.

◎準素多面イデアル分解

$\sigma \in X$ とする. アフィン扇 $F(\sigma)$ の多面イデアル P が準素多面イデアルとは, $\sigma^\vee \setminus P_\sigma$ が σ 有界であることと定義する. ここで, 部分集合 $S \subset M_{\mathbf{R}}$ が σ 有界とは, S が部分群 $\sigma^\perp \subset M_{\mathbf{R}}$ の剰余類の和となっていて, しかも S の実空間 $M_{\mathbf{R}}/\sigma^\perp$ への像が有界であることと定義する. このとき, 任意の $\eta \in F(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ について $P_\eta = \eta^\vee$ となる. これらは同値なので, 後者を準素多面イデアルの定義としてもよい. このような P の X への最大延長を σ における X の準素多面イデアルという. 最大延長を同じ P で書けば, $\sigma \prec \rho$ でなければ $P_\rho = \rho^\vee$ である. すなわち, この準素多面イデアルの台は $\{\sigma\}$ の閉包に含まれる.

命題 2.2 P を扇 X の多面イデアルで台を Y とすると，各 $\sigma \in X$ における準素多面イデアル P^σ が存在して

$$P = \bigcap_{\sigma \in X} P^\sigma = \bigcap_{\sigma \in Y} P^\sigma \tag{16}$$

となる．なお，$\sigma \notin F(\rho)$ なら $P^\sigma_\rho = \rho^\vee$ であるから，この右辺は X が有限扇でない場合も，各 $\rho \in X$ については有限個の有限生成 $\rho^\vee$ 凸集合の交わりとなる．

命題 2.2 は，各 $\sigma \in X$ について $\sigma^\vee \setminus P^\sigma_\sigma$ が σ 有界な $\{P^\sigma_\sigma \,; \sigma \in X\}$ がとれて，各 $\rho \in X$ について

$$P_\rho = \bigcap_{\sigma \in F(\rho)} P^\sigma_\sigma \tag{17}$$

成り立つことに等しい．P^σ_σ の構成は低い次元の錐体から順に行う．Y に含まれない σ については $P^\sigma_\sigma = \sigma^\vee$ とする．$F(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ の各元 η について P^η_η が決まっているとする．このとき，

$$P_\sigma \setminus \bigcap_{\eta \in F(\sigma) \setminus \{\sigma\}} P^\eta_\eta \tag{18}$$

は σ 有界となる．P_σ の σ 有界な余次元 1 の面を $Q_1, \ldots, Q_s$ とし，これらが $y_1, \ldots, y_s \in N_{\mathbf{R}}$ と $c_1, \ldots, c_s \in \mathbf{R}$ により

$$P_\sigma \subset (y_i \geqq c_i)\,,\quad Q_i = P_\sigma \cap (y_i = c_i) \quad i = 1, \ldots, s \tag{19}$$

と定義されているとする．このとき，$y_1, \ldots, y_s \in \mathrm{rel.\,int}\,\sigma$ であり

$$P^\sigma_\sigma := \sigma^\vee \cap \bigcap_{i=1}^{s} (y_i \geqq c_i) \tag{20}$$

と定義すると条件を満たす．台に含まれない $\sigma \in X$ は (16) に関係していないので，最後の等式も成り立つ．

◎局所的ブローアップ

P を X の多面イデアルとし，U を X の開部分集合とする．Y を P の台とすると多面準素イデアル分解により

$$P = \bigcap_{\sigma \in Y} P^\sigma \tag{21}$$

と書ける．各 P^σ は σ における多面準素イデアルである．ここで

$$P' = \bigcap_{\sigma \in Y \cap U} P^\sigma \tag{22}$$

とおけば P' と P は U では同じイデアルである．また，$\rho \in X$ が $Y \cap U$ の閉包に含まれなければ $P'_\rho = \rho^\vee$ である．したがって，ブローアップ $\mathrm{Fan}(P')$ は U ではブローアップ $\mathrm{Fan}(P)$ と同じ細分で，$X \setminus \overline{Y \cap U}$ ではブローアップの影響を受けていない．

$Q \subset M_{\mathbf{R}}$ を有理凸多面体，すなわち有限で空でない有理点集合の凸包とする．$N_{\mathbf{R}}$ の任意の錐体 σ について，$P(Q)_\sigma := Q + \sigma^\vee$ は $\sigma^\vee$ 凸集合であるから，$\mathrm{Fan}(P(Q)_\sigma)$ は $F(\sigma)$ の細分となる．

X を扇とする．このとき，$P(Q,X) := \{P(Q)_\sigma \,;\, \sigma \in X\}$ は X の多面分数イデアルとなる．したがって，$\mathrm{Fan}(P(Q.X))$ は扇で X の細分となっている．Q が r 次元の場合は $\mathrm{Fan}(Q)$ は射影的扇であり，$\mathrm{Fan}(P(Q.X))$ は $\mathrm{Fan}(Q)$ と X の結合 $J(\mathrm{Fan}(Q), X)$ に等しい．特に，$\mathrm{Fan}(P(Q,X))$ から射影扇 $\mathrm{Fan}(Q)$ へ正則写像をもつ．一般には $\mathrm{Fan}(P(Q,X))$ は X の多面分数イデアルによるブローアップである．

また，$\mathrm{Fan}(P(Q,X) + P(Q,X)^{-1})$ は多面イデアルによるブローアップで $\mathrm{Fan}(P(Q,X))$ の細分であり，特に射影扇 $\mathrm{Fan}(Q)$ に正則写像をもつ．なお，$\dim \gamma = 1$ であれば $(P(Q,X) + P(Q,X)^{-1})_\gamma = \gamma^\vee$ であることがわかるので，多様体でいえばこのイデアルは余次元 2 以上の閉部分多様体を定める．これは多面イデアルによるブローアップであるから，局所的ブローアップが可能となる．

参考文献

[C] Brian Conrad, Deligne's notes on Nagata compactification, http://www-math.mit.edu/ dejong/papers/nagata.dvi

[E] G. Ewald, Compactification of toric varieties, preprint.

[F] Kazuhiro Fujiwara, Rigid geometry, Lefschetz-Verdier trace formula and Deligne's conjecture, Invent. Math. **127** (1997), 489-533.

[K] 黒田 茂, ある不変式環の SAGBI 基底の無限性, 修士論文

[N1] M. Nagata, Imbedding of an abstract variety in a complete variety, J. Math. Kyoto Univ. **2**, (1962), 1–10.

[N2] 永田 雅宜, 可換体論, 数学選書 **6**, 裳華房, 1967.

[NMM] 永田 雅宜, 宮西 正宜, 丸山 正樹, 抽象代数幾何学, 共立出版, 1972.

[S1] H. Sumihiro, Equivariant completion, J. Math. Kyoto Univ. **14**, (1974), 1–28.

[S2] Equivariant completion II, J. Math. Kyoto Univ. **15**, (1975), 573 605.

[ZS] Oscar Zariski and Pierre Samuel, Commutative Algebra II, Nostrand, Princeton, N.J., 1960, (Second printings) Graduate texts in mathematics **29**, Springer, 1979.