2001年度 pp.26-37

On representations of the McKay quiver and variation of GIT quotients

石井 亮

講演についての訂正

城崎での講演においては，$\mathbb{C}^3/G$ の任意の（射影的とは限らない）crepant resolution と箙 (quiver) の表現についての話をしましたが，証明の中で誤った議論をしておりました．モデュライ空間のフロップの起こる様子を ”G-igsaw puzzle” で図式化したつもりだったのですが，単に「うまく行っている場合の図」に過ぎませんでした．(あのようにはならない場合が存在します.）本稿提出の時点では修正できておりません．誤った証明に基づいて講演したことをお詫び致します.

本稿においては，GIT 商の変化を調べる立場からのアプローチ（従って射影的な場合）について説明します．おもに 2 次元の場合（知られていることですが）に McKay 対応や伊藤-中村の定理と関連づけて説明し，最後に 3 次元の場合に A. Craw 氏 (Utah 大学) と共同で研究していることについて簡単に触れます.

1 McKay 対応と同変連接層

まず McKay の発見について復習する．$G \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ を有限部分群とする．G の既約表現の（同値類の）全体を

$$\mathrm{Irr}(G) = \{\, \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_r \,\}$$

と書く．ただし，ρ_0 は自明な表現である．$G \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ から定まる 2 次元表現を ρ_{nat} と書く.

$$\rho_i \otimes \rho_{\mathrm{nat}} \cong \bigoplus_j \rho_j^{\oplus a_{ij}}$$

と分解することにより，$a_{ij} \in \mathbb{Z}$ が定まる．McKay の発見したこと [M] は，既約表現を頂点として $a_{ij} = a_{ji}$ 本の辺で ρ_i と ρ_j とを結ぶと，アフィン Dynkin 図式が現れる，というものであった．あるいは，$(2\delta_{ij} - a_{ij})$ がアフィン Cartan 行列である,

とも言うことができる．本節では，中島啓に従い，McKay 対応を $\mathbb{C}^2$ 上の G-同変連接層のことばで言い換えてみる．

G を $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の有限部分群とする．$\mathbb{C}^n$ の上の連接層で G-同変な作用を持つもののなす圏を $\mathrm{Coh}^G(\mathbb{C}^n)$ と書くことにする．$\mathcal{F},\mathcal{G}\in\mathrm{Coh}^G(\mathbb{C}^n)$ に対し，

$$G\text{-}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}(\mathcal{F},\mathcal{G}) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coh}^G(\mathbb{C}^n)}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = (\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}(\mathcal{F},\mathcal{G}))^G$$

とし，

$$G\text{-}\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}(\mathcal{F},\mathcal{G}) := (\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}(\mathcal{F},\mathcal{G}))^G$$

とおく（$\mathbb{C}$ の標数が 0 で G は有限群なので，G-不変部分をとる函手は完全である）．$\mathcal{F},\mathcal{G}$ の一方がコンパクトな台を持つとき，

$$G\text{-}\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \cong G\text{-}\mathrm{Ext}^{n-i}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}(\mathcal{G},\mathcal{F}\otimes K_{\mathbb{C}^n})^*$$

が成り立つ (G-同変 Serre 双対性)．$D^G(\mathbb{C}^n)$ を $\mathrm{Coh}^G(\mathbb{C}^n)$ から定まる導来圏とし，$D^G_o(\mathbb{C}^n)$ をその台が原点 o に含まれるものからなる充満部分圏とする．また，$K^G(\mathbb{C}^n)$, $K^G_o(\mathbb{C}^n)$ をそれぞれに対応する Grothendieck 群とする．$K^G(\mathbb{C}^n)$ は $\rho_i\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ $(i=0,\ldots,r)$ を，$K^G_o(\mathbb{C}^n)$ は $\rho_i\otimes\mathcal{O}_o$ $(i=0,\ldots,r)$ を基とする自由加群である．

$K^G(\mathbb{C}^n)$ と $K^G_o(\mathbb{C}^n)$ は

$$<\mathcal{F},\mathcal{G}>=\sum_{i=0}^n \dim G\text{-}\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$$

により互いに双対である．また，$K^G_o(\mathbb{C}^n)$ の二つの元についても $<\mathcal{F},\mathcal{G}>$ と書くことにする．(注：$K^G_o(\mathbb{C}^n)\to K^G(\mathbb{C}^n)$ は単射ではないので，$<,>$ は $K^G_o(\mathbb{C}^n)$ 上は退化している.) $G\subset\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ ならば，Serre 双対性により，$<\mathcal{F},\mathcal{G}>=(-1)^n<\mathcal{G},\mathcal{F}>$ である．

$G\subset\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の時に，$<\rho_i\otimes\mathcal{O}_o,\rho_j\otimes\mathcal{O}_o>$ を計算してみよう．Ext を計算するためには局所自由分解を取るのであるが，それには Koszul 複体を用いる：

$$0\to\Omega^2_{\mathbb{C}^2}\to\Omega^1_{\mathbb{C}^2}\to\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}\to\mathcal{O}_o\to 0.$$

$G\subset\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ であるから，これは

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}\to\rho_{\mathrm{nat}}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}\to\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}\to\mathcal{O}_o\to 0$$

と書ける．これに ρ_i をテンソルしたものを考えて，

$$\begin{aligned}<\rho_i\otimes\mathcal{O}_o,\rho_j\otimes\mathcal{O}_o> &= 2<\rho_i\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2},\rho_j\otimes\mathcal{O}_o> - <\rho_{\mathrm{nat}}\otimes\rho_i\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2},\rho_j\otimes\mathcal{O}_o> \\ &= 2\delta_{ij}-a_{ij}\end{aligned}$$

となる．従って，McKay の発見は次のように言い換えられる：

補題 1.1 (中島). $K_o^G(\mathbb{C}^2)$ の双線形形式 $<,>$ の表現行列 $(<\rho_i \otimes \mathcal{O}_o, \rho_j \otimes \mathcal{O}_o>)_{i,j}$ はアフィン *Cartan* 行列である.

$\tau : Y \to \mathbb{C}^2/G$ を最小特異点解消, $E_1, \ldots, E_r$ を既約な例外因子とする. $K_o(Y)$ で, 例外集合に台を持つ Y 上の連接層のなす K 群を表す. $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in K_o(Y)$ に対しても, Ext の次元の交代和で $<\mathcal{F}, \mathcal{G}>$ を定義する. これは, 0 次元の台を持つ層に対しては恒等的に消え, 因子に対しては交点数の符号を変えたものである. よって, 既約例外曲線と, fundamental cycle の (-1) 倍でアフィン Cartan 行列ができる. そこで, $K_o(Y)$ の基底として

$$-[\omega_{\tau^{-1}(o)}], \mathcal{O}_{E_1}(-1), \ldots, \mathcal{O}_{E_r}(-1)$$

を取れば, これについての $<,>$ の行列表示がアフィン Cartan 行列になる. ここで, $\omega_{\tau^{-1}(o)}$ は fundamental cycle $\tau^{-1}(o)$ の dualizing sheaf であり, $\mathcal{O}_{E_i}(-1)$ は $E_i \cong \mathbb{P}^1$ 上の次数 -1 の直線束である. 従って, (番号 $1, \ldots, r$ を適当に付け替えれば) $\rho_0 \otimes \mathcal{O}_o, \ldots, \rho_r \otimes \mathcal{O}_o$ を上の基底に対応させることによって, $(K_o^G(\mathbb{C}^2), <>)$ と $(K_o(Y), <>)$ との間の同型が得られる. この同型が G-Hilb の場合の Fourier-向井変換からできること, および, この同型と Weyl 群の作用を合成したものが, 他のモデュライ空間の場合の Fourier-向井変換からできることを, 後で説明する.

注 *1.2.* 上の $K_o(Y)$ の基底は, $<\mathcal{O}_Y, -[\omega_{\tau^{-1}(0)}]>= 1$, $<\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_{E_i}(-1)>= 0$ という条件で選んだ.

2 モデュライ空間とその構成

McKay 対応の解釈, 3 次元での crepant resolution の統一的構成, といった点で, 中村の導入した, 群軌道の Hilbert scheme(G-Hilb) は大きな役割を果たしている. ここでは, $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ に対し, G-Hilb$(\mathbb{C}^n)$ を次のように定義する：

$$G\text{-}\mathrm{Hilb}(\mathbb{C}^n) = \left\{ \mathcal{Z} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{Z} \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の } G\text{-不変な有限部分スキームで,} \\ H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}) \text{ は } G \text{ の正則表現である} \end{array} \right\}.$$

(このように定義すると, 一般次元では既約とは限らない.) 上のような $\mathcal{Z}$ を G-cluster と呼ぶ. すなわち, G-Hilb は G-cluster のモデュライ空間である. これから考えるのは, G-Hilb を, 部分スキームよりはむしろ G-同変連接層 $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$ のモデュライ空間と見て, 一般化したものである. 2 次元の場合には, 本質的には, Kronheimer [Kr] のモデュライ空間 (の複素パラメータ 0 の場合) ([CS] 参照) であり, 一般には Sardo-Infirri [S] のものと同じものである.

$\theta : \mathrm{Irr}(G) \to \mathbb{Q}$ を任意の写像とする．G の有限次元表現 $V = \oplus_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)} V_\rho \otimes \rho$ に対し，$\theta(V) = \sum_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)} \theta(\rho) \dim V_\rho$ と置く．有限の台を持つ $E \in \mathrm{Coh}^G(\mathbb{C}^n)$ についても，$\theta(E) = \theta(H^0(E))$ と置く．

定義 2.1. 有限の台を持つ $E \in \mathrm{Coh}^G(\mathbb{C}^n)$ が θ-stable とは,

- $\theta(E) = 0$,
- $F \subset E$ が自明でない同変真部分加群であれば，$\theta(F) > 0$,

が成り立つことを言う．不等号が等号付きであるとき，E は θ-semi-stable であるという．

後で主に考えるのは，$H^0(E)$ が G の正則表現 R である場合である．

$$R = \bigoplus_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)} R_\rho \otimes \rho$$

と分解したとき，$\dim R_\rho = \dim \rho$ となるのが正則表現であった．$E \in \mathrm{Coh}^G(\mathbb{C}^n)$ で G の表現として $H^0(E) \cong R$ となるものを，筆者の共同研究者である A. Craw に倣って G-constellation と呼び，G-constellation の全体を $\mathrm{Coh}^G_R(\mathbb{C}^n)$ と表すことにする．

補題 2.2. $\theta : \mathrm{Irr}(G) \to \mathbb{Q}$ を，$\theta(R) = 0$ かつ $\theta(\rho_0) < 0$, $\theta(\rho) > 0 (\rho \neq \rho_0)$ を満たすものとする．このとき，$E \in \mathrm{Coh}^G_R(\mathbb{C}^n)$ について，次は同値である．

- E は *θ-stable* である．
- E は *θ-semi-stable* である．
- $E \cong \mathcal{O}_Z$ となる *subscheme*（すなわち，*G-cluster*）$Z \subset \mathbb{C}^n$ が存在する．

Proof. $\theta(R) = \sum_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)} (\dim \rho)\theta(\rho) = 0$ であって $\dim \rho_0 = 1$ であるから，仮定により R の非自明な部分表現 S については $\theta(S) \neq 0$ である．従って θ-stability と θ-semi-stability は一致する．さらに，$\theta(S) < 0$ となるのは S が $R_{\rho_0} \otimes \rho_0$ を含むときである．従って，E が θ-stable であるということは，$E \cong_G R$ としたときに，E が $R_{\rho_0} \otimes \rho_0$ の一つの元で $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$-加群として生成されるということと同値である． □

従って，上のような θ に対しては，G-Hilb$(\mathbb{C}^n)$ が，θ-stable な G-constellation のモデュライ空間である，ということになる．

以下，中島に従って $\mathbb{C}^n$ 上の同変連接層を「可換性条件」を満たす箙の表現とみなし，そのモデュライ空間を構成する．すなわち，G の表現 V と $\theta(V) = 0$ とな

る $\theta : \mathrm{Irr}(G) \to \mathbb{Q}$ について，θ-stable な $E \in \mathrm{Coh}_V^G(\mathbb{C}^n)$ のモデュライ空間を構成する．$Q = \mathbb{C}^n$ で，$G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ により与えられる G の表現を表すことにする．$E \in \mathrm{Coh}_V^G(\mathbb{C}^n)$ と G の表現空間としての同型 $E \cong_{\mathbb{C}[G]} V$ の組を与えるということは，V への多項式環の G-同変な作用を与える，ということである．そこで，

$$\mathcal{N}(V) = \{ B \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, Q \otimes V) \mid B \wedge B = 0 \},$$

とおく．ただし，$B \wedge B$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, \wedge^2 Q \otimes V)$ の元である．$B \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, Q \otimes V)$ は V への $\bigoplus_n (\overset{n}{\otimes} Q^*)$ の作用を与え，$B \wedge B = 0$ はそれが可換である，すなわち多項式環の作用から来るための条件である．よって，$B \in \mathcal{N}(V)$ が上のような $E \in \mathrm{Coh}_V^G(\mathbb{C}^n)$ と $E \cong_{\mathbb{C}[G]} V$ の組だと思える．$\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}[G]}(V) \subset \mathrm{GL}(V)$ により G の表現としての V の自己同型群を表す．これは，

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}[G]}(V) = \prod_{\rho \in \mathrm{Irr}(G)} \mathrm{GL}(V_\rho).$$

と分解する．

$$\mathrm{PAut}_{\mathbb{C}[G]}(V) := \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}[G]}(V)/\mathbb{C}^*$$

とおく．ただし，$\mathbb{C}^*$ は V のスカラー乗法群である．この $\mathrm{PAut}_{\mathbb{C}[G]}(V)$ は $\mathcal{N}(V)$ に共役により作用する．$\mathrm{PAut}_{\mathbb{C}[G]}(V)$ の指標群は

$$\{ \theta : \mathrm{Irr}(G) \to \mathbb{Z} \mid \theta(V) = 0 \}$$

であることに注意する．このような θ は $\mathcal{N}(V)$ 上の自明な直線束の線形化を与える．

定理 2.3 (King[Ki]). *$B \in \mathcal{N}(V)$ とする．これが $\mathrm{PAut}_{\mathbb{C}[G]}(V)$ の作用と線形化 θ に関して GIT の意味で (semi-)stable であることと，対応する $E \in \mathrm{Coh}_V^G(\mathbb{C}^n)$ が θ-(semi-)stable であることとは，同値である．*

そこで，

$$\mathcal{M}_\theta(V) := \mathcal{N}(V)^{\theta\text{-s}} /\!/ \mathrm{PAut}_{\mathbb{C}[G]}(V), \quad \overline{\mathcal{M}_\theta(V)} := \mathcal{N}(V)^{\theta\text{-ss}} /\!/ \mathrm{PAut}_{\mathbb{C}[G]}(V)$$

とおくと，これらは θ-stable および θ-semi-stable な $E \in \mathrm{Coh}_V^G(\mathbb{C}^n)$ のモデュライ空間となる．$\overline{\mathcal{M}_0(V)}$ はアフィンスキームであり，$\overline{\mathcal{M}_\theta(V)}$ はその上に射影的である．

本稿においては，V が正則表現の場合を考察する．G-Hilb に対しては，Hilbert-Chow morphism というものが存在したが，

命題 2.4. *$V = R$(正則表現) のとき，$\mathcal{M}_\theta \to \mathbb{C}^n/G : E \mapsto \mathrm{supp}(E)$ はスキームの射になる．特に，自由軌道のなす開集合上この射は同型である．また，θ-stability と θ-semi-stability とが一致するとき，この射は射影的である．*

さらに，

命題 2.5. $V = R$ のとき，$M_\theta := M_\theta(R)$ 上には *universal family* が存在する．

Proof. $\mathcal{N} := \mathcal{N}(R)$ 上のベクトル束 $\bigoplus_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)} R_\rho \otimes \mathcal{O}_\mathcal{N}$ は自然な $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}[G]}(R)$ の作用を持つ．部分群 $\mathrm{Aut}'_{\mathbb{C}[G]}(R) \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}[G]}(R)$ を

$$\mathrm{Aut}'_{\mathbb{C}[G]}(R) = \{\, (g_\rho)_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)} \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}[G]}(R) \mid g_{\rho_0} = 1 \,\}$$

により定義する．ここで，ρ_0 は自明な表現であるから，$\dim R_{\rho_0} = 1$ であり，

$$\mathrm{Aut}'_{\mathbb{C}[G]}(R) \cong \mathrm{PAut}_{\mathbb{C}[G]}(R)$$

となる．$\mathrm{PAut}_{\mathbb{C}[G]}(R)$ の $\mathcal{N}^{\theta\text{-s}}$ への作用は自由であり，$R_\rho \otimes \mathcal{O}_\mathcal{N}$ は $\mathrm{Aut}'_{\mathbb{C}[G]}(R)$ の同変な作用を受けるから，$\mathcal{M}_\theta$ 上のベクトル束 $\mathcal{R}_\rho$ に decent する．$\mathcal{N}$ の定義から universal homomorphism

$$\bigoplus_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)} R_\rho \otimes \mathcal{O}_\mathcal{N} \to Q \otimes \left(\bigoplus_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)} R_\rho \otimes \mathcal{O}_\mathcal{N} \right)$$

が存在するが，これは $\mathrm{Aut}'_{\mathbb{C}[G]}(R)$ の作用と可換であるから，$\mathcal{M}_\theta$ 上の

$$\bigoplus_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)} \mathcal{R}_\rho \to Q \otimes \left(\bigoplus_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)} \mathcal{R}_\rho \right)$$

に decent する．すなわち，$\mathcal{R} := \bigoplus_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)} \mathcal{R}_\rho \otimes \rho$ には多項式環 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_\theta} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ の作用が入り，universal family となる． □

定義 2.6. 上の証明中の $\mathcal{R}_\rho$ を tautological vector bundle と呼ぶ．

$\mathrm{Aut}'_{\mathbb{C}[G]}(R)$ の定義により，$\mathcal{R}_{\rho_0}$ は自明な直線束である．

$\eta : \mathrm{Irr}(G) \to \mathbb{Z}$ に対し，

$$L(\eta) := \bigotimes_{\rho\in\mathrm{Irr}(G)} \det(\mathcal{R}_\rho)^{\otimes\eta(\rho)} \tag{2.1}$$

とおく．$\mathcal{M}_\theta$ の構成により，$L(\theta)$ は ample である．

3 Bridgeland-King-Reid の定理

この節では，$G \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ または，$G \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ とし，θ-stability と θ-semi-stability は一致すると仮定する．簡単のため $\mathcal{M}_\theta$ を $\mathcal{M}$ と表すことにする．$\mathcal{M}$ 上には，universal family を与える $\mathcal{R} = \bigoplus_\rho \mathcal{R}_\rho \otimes \rho$ が存在したが，これを $\mathcal{M} \times \mathbb{C}^n$ 上の G-同変連接層とみて，$\mathcal{C}$ と書く．ただし，G は $\mathcal{M}$ には自明に作用している．$\pi_{\mathcal{M}}, \pi_{\mathbb{C}^n}$ により $\mathcal{M} \times \mathbb{C}^n$ からのそれぞれの射影を表す．$D(\mathcal{M})$ および $D^G(\mathbb{C}^n)$ により，$\mathcal{M}$ および $\mathbb{C}^n$ 上の連接層および G-同変連接層の作る導来圏を表す．函手 $\Phi : D(\mathcal{M}) \to D^G(\mathbb{C}^n)$ および $\Psi : D^G(\mathbb{C}^n) \to D(\mathcal{M})$ を次のように定義する：

$$\Phi(-) = \mathbb{R}\pi_{\mathbb{C}^n *}(\pi_{\mathcal{M}}{}^*(- \otimes \rho_0) \otimes \mathcal{C})$$

そして

$$\Psi(-) = \left(\mathbb{R}\pi_{\mathcal{M}*}(\mathcal{C}^\vee[n] \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \pi_{\mathbb{C}^n}{}^*(-)\right)^G .$$

ここで，

$$\mathcal{C}^\vee = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}\times\mathbb{C}^n}}(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}\times\mathbb{C}^n})$$

は $\mathcal{C}$ の derived dual である．[BKR] と全く同じ議論により，次が示される．

定理 3.1. $G \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $n = 2$ または 3 とする．このとき，$\mathcal{M}_\theta \to \mathbb{C}^n/G$ は *crepant resolution* であり，Φ, Ψ は互いに逆の圏同値である．

4 $G \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の場合

前節における圏同値としての McKay 対応を前提として，$\mathcal{M}_\theta$ が θ に応じてどのように変わるのか，考えよう．$G \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ のときは，generic な θ に対しては $\mathcal{M}_\theta$ はみな $\mathbb{C}^2/G$ の最小特異点解消であり代数多様体としては同じものであるが，GIT 商としては変化するものである．この様子は Weyl 群により記述できる (Kronheimer, [Kr])．本節では，このことを函手 Φ を使って説明する．

$$\Pi := \{\theta : \mathrm{Irr}(G) \to \mathbb{Q} \,|\, \theta(R) = 0\}$$

とおく．θ-stability によって，Π にはいわゆる chamber structure が入る．

補題 1.1 により，$K^G_o(\mathbb{C}^2)$ は，既約表現を単純ルートに対応させることにより，アフィンルート系に対するルート格子だと見ることができる．(正則表現が minimal imaginary root に対応する.) すると，$K^G_o(\mathbb{C}^2)/\mathbb{Z}[R \otimes \mathcal{O}_o]$ は有限型のルート格子であり，Π は，それに対応するウェイトの空間となる．

次は本質的には Kronheimer によるもので，2 次元の場合の chamber structure を調べる際に重要な鍵となる．次のような定式化及び証明は中島による．

補題 4.1 (Root Lemma, [Kr], [CS]). $S \neq 0$ を正則表現 R の部分表現とし，適当な θ に対して $\mathcal{M}_\theta(S)$ が空でないとする．このとき，$\mathcal{M}_\theta(S)$ は2次元または0次元である．2次元になるとき，$S = R$ であり，0次元になるとき，S は $K_o^G(\mathbb{C}^2)/\mathbb{Z}[R \otimes \mathcal{O}_o]$ においてルートに対応する．

Proof. $F \in \mathcal{M}_\theta(S)$ とする．この点における $\mathcal{M}_\theta(S)$ の（接空間の）次元は

$$\begin{aligned}\dim G\text{-}\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(F,F) &= \dim G\text{-}\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(F,F) + \dim G\text{-}\operatorname{Ext}^2_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(F,F) - <F,F> \\ &= 2 - <F,F>.\end{aligned}$$

従って，$\mathcal{M}_\theta(S) \neq \emptyset$ ならば，$<F,F> \leq 2$ である．これは，S を有限型ルート格子の元と見ると，0 またはルートに対応することと同値である． □

$\theta \in \Pi$ を $\mathrm{Coh}^G_R(\mathbb{C}^2)$ 上 semi-stability と stability とが一致するものと仮定する．Π において，θ の属する chamber を次のように定義する：

$$C(\theta) = \{\, \eta \in \Pi \mid \eta\text{-stability と } \theta\text{-stability は一致する} \,\}$$

命題 4.2. $\eta \in C(\theta)$ であることと，(2.1) の $L(\eta)$ が $\mathcal{M}_\theta$ 上 *ample* であることは同値である．

Proof. $\eta \in C(\theta)$ ならば，モデュライの構成により $L(\eta)$ は ample である．θ_0 を $C(\theta)$ を囲む wall 上に general に（これは本質的ではない）取る．θ_0 は wall 上にあるから，$E \in \mathcal{M}_\theta$ で θ_0-stable でないものが存在する．θ_0 を wall 上 general に取ったから，$F \subset E$ で，F と E/F が θ_0-stable になるものが存在する．F と E/F は同型ではなく (G の表現としても同型でない) ともに θ_0-stable なので，$G\text{-}\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(E/F,F)$ や $G\text{-}\operatorname{Ext}^2_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(E/F,F)$ は（後者は Serre 双対をとれば）消える．従って，

$$\dim G\text{-}\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(E/F,E) = - <F,E/F> = <F,F> = 2$$

となる．射 $\mathcal{M}_\theta \to \overline{\mathcal{M}_{\theta_0}}$ は，このような E をみな $F \oplus E/F$ のクラスに写すから，少なくとも一つの射影直線を一点につぶす．$L(\theta_0)$ は $\overline{\mathcal{M}_{\theta_0}}$ 上 GIT により定まる (fractional) line bundle の引き戻しであるから，ample でない． □

これを函手 Φ を使って言い換える．$\eta : \mathrm{Irr}(G) \to \mathbb{Q}$ は $K_o^G(\mathbb{C}^2)$ から $\mathbb{Q}$ への写像に拡張できるが，$D_o^G(\mathbb{C}^2)$ の object も $\eta(\cdot)$ の中に代入することにする．

系 4.3. $\mathcal{M}_\theta \to \mathbb{C}^2/G$ の例外直線を $E_1, \ldots, E_r$ とすると，

$$C(\theta) = \{\, \eta \in \Pi \mid \eta(\Phi(\mathcal{O}_{E_i})) > 0 \, (i = 1, \ldots, r) \,\}$$

Proof. $\Phi(\mathcal{O}_{E_i})$ は $\mathbb{R}\Gamma(\mathcal{R}|_{E_i})$ を $D_o^G(\mathbb{C}^2)$ の object と思ったものに他ならない．すると，E_i 上の Riemann-Roch の定理により，$\eta(\Phi(\mathcal{O}_{E_i}))$ は $L(\eta)|_{E_i}$ の次数と一致する． □

系 4.4. $C(\theta)$ は *Weyl chamber* である．

Proof. $\{[\mathcal{O}_{E_i}]\} \subset K_0(\mathcal{M}_\theta)$ は（$<,>$ について）ルート系の基底をなすが，Φ は双線形形式 $<,>$ を保つので，$[\Phi(\mathcal{O}_{E_i})]$ もルート系の基底となる．よって上の系から $C(\theta)$ は Weyl chamber である． □

とくに，$\mathcal{M}_\theta$ が G-Hilb と（モデュライ空間として）一致するときを考えると，

系 4.5. G-$\mathrm{Hilb}(\mathbb{C}^2)$ に対応する *chamber* C_0 は $\{\eta \in \Pi \mid \eta(\rho) > 0\,(\rho \neq \rho_0)\}$ である．

Proof. C_0 は補題 2.2 により，上の集合を含む Weyl chamber なので上の集合そのものである． □

5 伊藤-中村の定理

前節の考察と，伊藤-中村の定理の関係を説明する．G-Hilb というのは，モデュライ空間のうち，tautological vector bundle $\mathcal{R}_\rho$ がすべて global section で生成される，ということで特徴付けられる．G-Hilb に対応する chamber C_0 は，

$$\begin{aligned} C_0 &= \{\eta \in \Pi \mid \eta(\rho) > 0\,(\rho \neq \rho_0)\} \\ &= \{\eta \in \Pi \mid \eta(\Phi(\mathcal{O}_{E_i})) > 0\} \end{aligned}$$

であった．これらの不等式はそれぞれ wall を定めるから，非自明な既約表現に $\rho_1, \ldots, \rho_r$ と適当に番号を付けると，

$$\eta(\rho_i) = \eta(\Phi(\mathcal{O}_{E_i})) \quad \forall \eta \in \Pi$$

となる．Π の定義により，$\rho_i \otimes \mathcal{O}_o$ と $\Phi(\mathcal{O}_{E_i})$ は $K_o^G(\mathbb{C}^2)/\mathbb{Z}[R \otimes \mathcal{O}_o]$ の中で一致する．ここで $[\Phi(\mathcal{O}_{E_i}(-1))] = [\Phi(\mathcal{O}_{E_i})] - [\Phi(\mathrm{point})]$ もまた同じクラスを定めるが，$\mathcal{R}_\rho$ が global section で生成されることから $\Phi(\mathcal{O}_{E_i}(-1)) = \mathbb{R}\Gamma(\mathcal{R} \otimes \mathcal{O}_{E_i}(-1))$ は sheaf であり，さらに $\mathcal{R}_{\rho_0}$ が自明な直線束であることから G の表現としては ρ_0 を含まない．従って $K_o^G(\mathbb{C}^2)$ の中で $[\Phi(\mathcal{O}_{E_i}(-1))] = [\rho_i \otimes \mathcal{O}_o]$ であり，$\Phi(\mathcal{O}_{E_i}(-1))$ は sheaf であるから，

$$\Phi(\mathcal{O}_{E_i}(-1)) \cong \rho_i \otimes \mathcal{O}_o$$

である．すなわち，第1節で予告したように対応している．なお，[KV] や [I] とは Φ や Ψ の定義が違う ($\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}^\vee[n]$ が入れ替わっている) ので，この表示も少しずれている．

上のことと Φ が圏同値であることから，$y \in \mathcal{M} = G\text{-}\mathrm{Hilb}(\mathbb{C}^2)$ をとると，

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathcal{M}}(\mathcal{O}_{E_i}(-1), \mathcal{O}_y) \cong G\text{-}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(\mathcal{O}_o \otimes \rho_i, \Phi(\mathcal{O}_y))$$
$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathcal{M}}(\mathcal{O}_y, \mathcal{O}_{E_i}(-1)) \cong G\text{-}\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(\Phi(\mathcal{O}_y), \mathcal{O}_o \otimes \rho_i).$$

左辺はいずれも $y \in E_i$ のとき 1 次元，それ以外の時 0 であり，$\Phi(\mathcal{O}_y)$ は $y \in \mathcal{M}$ に対応する G-cluster Z_y の構造層である．従って，次の二つが得られた．

定理 5.1 (中島の Hecke 対応の例 [N1] Theorem 5.10; [N2] Exapmle 6.3). 次は同値.

$$y \in E_i \iff \mathcal{O}_{Z_y} \text{ の } socle \text{ が } \rho_i \text{ を含む}$$
$$\iff \mathcal{O}_{Z_y} \text{ の } socle \text{ が } \rho_i \text{ を一つだけ含む}$$

定理 5.2 (伊藤-中村 [INm2]). 次は同値.

$$y \in E_i \iff 0 \to \mathcal{O}_o \otimes \rho_i \to \mathcal{O}_{Z'} \to \mathcal{O}_{Z_y} \to 0 \text{ の形の拡大が存在}$$
$$\iff I_y/mI_y \text{ が } \rho_i \text{ を含む}$$
$$\iff I_y/mI_y \text{ が } \rho_i \text{ を一つだけ含む}$$

注 *5.3 (中島 [N2]).* $< [\mathcal{O}_o \otimes \rho_i], [\Phi(\mathcal{O}_y)] >=< [\mathcal{O}_o \otimes \rho_i], [R \otimes \mathcal{O}_o] >= 0$ などから，$\dim G\text{-}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(\mathcal{O}_o \otimes \rho_i, \Phi(\mathcal{O}_y)) = \dim G\text{-}\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}(\Phi(\mathcal{O}_y), \mathcal{O}_o \otimes \rho_i)$ となるので，上の二つの定理は同値である．

Φ が圏同値であることを使って C_0 の wall を決定し，さらに定理 5.1 および 定理 5.2 を導いた．逆に定理 5.1 があれば C_0 は簡単に求められることに注意しておく．すなわち，自明でない既約表現 ρ は必ず socle にあらわれるので，$\eta \in C_0$ について $\eta(\rho) > 0$ を満たす.

6　$G \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ の場合

この節では，A. Craw (Utah 大学) と現在行っている共同研究について触れる．$G \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ の場合を考える．この場合は $\mathbb{C}^3/G$ の crepant resolution はいろいろあり，$\mathcal{M}_\theta$ も実際変化する．そのような様子について調べ，特に任意の射影的 crepant resolution は $\mathcal{M}_\theta$ として得られるか，ということを問題にする．

2 次元の時と違ってもはや（補題 4.1 や）命題 4.2 のようなことは成り立たない．Π の次元の方が Picard 群のランクよりも一般には高くなること（そして，$C(\theta)$ は狭義凸であること）を思えば，これは必然である．η に $L(\eta)$ を対応させる写像が，$C(\theta)$ から $\mathcal{M}_\theta$ の ample cone への全射であることを期待して，現在研究中である．（もしそうであれば，すべてのフロップが wall crossing により得られる．）

$C(\theta)$ を系 4.3 と同様の形に書くことができる：

定理 6.1. $G \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ をアーベル群とし，$\theta \in \Pi$ を *θ-stability* と *θ-semi-stability* とが一致するものとする．このとき，$\mathcal{M}_\theta$ 上コンパクトな *divisor* と既約表現の組 $(D_1,\sigma_1),\dots,(D_s,\sigma_s)$ および $(E_1,\tau_1)\dots,(E_t,\tau_t)$ があって，$C(\theta)$ は $\eta \in \Pi$ についての，次のような形の不等式で定義される．

1. 任意の例外直線 C について，$\eta(\Phi(\mathcal{O}_C)) > 0$
2. $i = 1,\dots,s$ について，$\eta(\Phi(\mathcal{R}^*_{\sigma_i}|_{D_i})) > 0$
3. $i = 1,\dots,t$ について，$\eta(\Phi(\mathcal{R}^*_{\tau_i} \otimes \omega_{E_i})) < 0$

1 は 2 次元の時と同様，$L(\eta)$ が ample であるための条件であり，C は端射線を定めるものに限って良い．2 も 3 も Φ が sheaf (のシフト) 同士の対応を与える場合ばかりである．その意味では，このような wall を調べることは，伊藤-中村の定理の高次元化とみることができる．実際，G-Hilb の場合には，上の不等式は Craw による explicit な McKay 対応 [C] と関係がある．なお，アーベル群に限っているのは，城崎で喋った "G-igsaw puzzle" によるモデュライの記述を用いるためである．

References

[BKR] Bridgeland, T., King, A. and Reid, M.: The McKay correspondence as an equivalence of derived categories, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 3, 535-554

[CS] Cassens, H. and Slodowy, P.: On Kleinian singularities and quivers, in Singularities (Oberwolfach, 1996), Progr. Math. **162**(1998), 263-288

[C] Craw, A.: An explicite construction of the McKay correspondence for A-Hilb $\mathbb{C}^3$, preprint alg-geom/0010053

[I] Ishii, A.: On the McKay correspondence for a finite small subgroup of $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$, J. Reine. Angew. Math. (to appear)

[INj] Ito, Y. and Nakajima, H.: McKay correspondence and Hilbert shcemes in dimension three, Topology **39**(2000), 1155-1191

[INm1] Ito, Y. and Nakamura, I.: McKay correspondence and Hilbert schemes, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **72** (1996), no. 7, 135-138

[INm2] Ito, Y. and Nakamura, I.: Hilbert schemes and simple singularities, New Trends in Algebraic Geometry, (Proc. Wariwick, 1996, K. Hulek et al., eds), Cambridge University Press (1999), 151-233

[KV] Kapranov, M. and Vasserot, E.: Kleinian singularities, derived categories and Hall algebras, Math. Ann. **316** (2000), no. 3, 565-576

[Ki] King, A.: Moduli of representaions of finite dimensional algebras, Quart. J. Math. Oxford **45**(1994), 515-530

[Kr] Kronheimer, P.: The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients, J. Diff. Geom. **29**(1989), 665-683

[M] McKay, J.: Graphs, singularities and finite groups, Proc. Symp. Pure Math., **37**, Amer. Math. Soc. (1980), 183-186.

[N1] Nakajima, H.: Varieties associated with quivers, in Representation theory of algebras and related topics, CMS conference proceedings **19**, AMS (1996), 139-157

[N2] Nakajima, H.: Quiver varieties and McKay correspondence –Lectures at Hokkaido University, 2001 Dec.–, 「開カラビ・ヤウ多様体をめぐって」報告集

[S] Sardo-Infirri, A.: Resolutions of orbifold singularities and the tranceportation problem on the McKay quiver, preprint alg-geom/-9610005

[T] Thaddeus, M.: Geometric invariant theory and flips, J.Amer. Math. Soc. **9**(1996), 691-723

京都大学工学研究科土木システム工学専攻
email: `akira@kusm.kyoto-u.ac.jp`