代数幾何学シンポジウム記録
2001年度 pp.18-25

G-HILBERT SCHEME AND GRÖBNER BASIS

伊藤 由佳理

1. Introduction

G を $SL(3,\mathbb{C})$ の有限部分群, X を商 $\mathbb{C}^3/G$ とする. このとき X は 標準特異点 (canonical singularity) をもつ. ただしこの特異点は terminal singularity ではない.

この特異点に関しては次が知られている:

定理 1.1. *(Markushevich[3], Roan[3], Ito[2])* * **crepant resolution** $f : Y \longrightarrow X$ が存在する, すなわち Y は非特異で 標準束 K_Y は自明である.

Remark. crepant resolution Y は一般に複数個存在するが, 常に次の性質が成り立つ: Y の位相的オイラー数は 群 G の共役類の数と一致する. この事実は crepant resolution の存在を仮定した場合, 高次元でも成り立つことが知られており, 高次元 McKay 対応と呼ばれることもある.(cf. [12], [9], [2], [1])

2. Toric crepant resolution

この報告書では, 群が特に可換な場合について議論したい. 群が可換なとき その商 X はトーリック多様体になる. そこで群 G が $SL(3,\mathbb{C})$ の有限可換部分群である場合の crepant resolution を toric resolution で構成する方法を復習する.

実3次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の標準基底を $\{e^i | i = 1,2,3\}$ ととり, L を e^1, e^2 and e^3 で生成される lattice とする. このとき $N := L + \sum \mathbb{Z}v$ とおく. ただし和は $v = 1/r(a,b,c) \in G$ なるすべての元の上でとる.

このとき

$$\sigma := \left\{ \sum_{i=1}^{3} x_i e^i \in \mathbb{R}^3, \quad x_i \geq 0, \forall i, 1 \leq i \leq 3 \right\}$$

The author is partially supported by JSPS, the Grant-in-aid for Scientific Research (No.13740019).

*この右上の数字は論文の数を示している. すなわち有限部分群の分類を用いた証明を完成するにはこれらの論文がすべて必要となる. [10, 3, 11], [14, 15, 16], [5, 6]

は $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. の中の rational convex polyhedral cone となる.

対応するトーリック多様体 X_σ は $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\check{\sigma} \cap M])$, で定義される. この M は N の dual lattice であり, $\check{\sigma}$ は $M_{\mathbb{R}}$ の中の σ の dual cone であり,

$$\check{\sigma} := \{\xi \in M_{\mathbb{R}} | \xi(x) \geq 0, \forall x \in \sigma\}$$

で定義される.

このようにして $X = \mathbb{C}^3/G$ は lattice $N = L + \sum_{v \in \Phi} \mathbb{Z}v$ の中の cone σ で定義されるトーリック多様体になる. さらに $\Phi := \left\{\frac{1}{r}(a,b,c) \in G \mid a+b+c=r\right\}$ とおく. 3 次元の可換部分群による商特異点の crepant resolution は次のように定義される.

定理 2.1 (Markushevich [10], Roan [14]). *X の特異点解消は cone σ の単体分割によって得られる. 特に crepant resolution Y は e^1, e^2, e^3 と $\Phi \cup \bigcup_{i=1}^{3} \{e^i\}$ で定まる三角形の中の格子点を用いた三角形分割によって得られる fan Σ で決まるトーリック多様体 Y_Σ と同型である.*

Remark 2.2. 一般には X の crepant resolution はすべて Σ の単体分割によって得られる. したがって分割の方法の数だけ X の crepant resolution は存在する.

3. G-Hilbert schemes

ここでは X の crepant resolution を $\mathbb{C}^3$ 上の点の Hilbert scheme を用いて構成する中村氏の方法を紹介する. ただしこれはその構成方法より 前節で与えた X の crepant resolution のうちの特別な一つだけを与える.

前節同様 G は $SL(3,\mathbb{C})$ の有限可換部分群とし, X をその商 $\mathbb{C}^3/G$ とする.

定義 3.1. **G-Cluster** Z とは $\mathbb{C}^3$ の G-invariant subscheme Z であって, $H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$ が G の正則表現になっているものをいう. また **G-Hilbert scheme** は G-cluster の moduli space として定義する.

定理 3.2 (可換群:Nakamura [13], 一般:Bridgeland-King-Reid [4]). *$SL(3,\mathbb{C})$ のすべての有限部分群 G に対して, G-Hilbert scheme は $\mathbb{C}^3/G$ の crepant resolution になる.*

またさらに群が可換な場合, 次のような具体的な記述ができる:

定理 3.3 (Nakamura[13]). (1) 任意の可換部分群 $G \subset SL(3,\mathbb{C})$ と すべての *G-cluster* Z に対して, イデアル I_Z は 次の 7 つの方程式で定義される:

$$\begin{cases} x^{l+1} = \xi y^b z^f, \quad y^{b+1} z^{f+1} = \lambda x^l, \\ y^{m+1} = \eta z^c x^d, \quad z^{c+1} x^{d+1} = \mu y^m, \quad xyz = \pi. \\ z^{n+1} = \zeta x^a y^e, \quad x^{a+1} y^{e+1} = \nu z^n, \end{cases}$$

ただし $a, b, c, d, e, f, l, m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であり, ξ, η, ζ, λ, μ, ν, $\pi \in \mathbb{C}$.

(2) さらに次のいずれかが常になりたつ:

$$(A) \begin{cases} \lambda = \eta\zeta, \ \mu = \zeta\xi, \ \nu = \xi\zeta, \ \pi = \zeta\eta\xi, \\ l = a + d, \ m = b + e, \ n = c + f. \end{cases}$$

または

$$(B) \begin{cases} \xi = \lambda\mu, \ \eta = \nu\lambda, \ \zeta = \lambda\mu, \ \pi = \lambda\mu\nu, \\ l = a + d + 1, \ m = b + e + 1, \ n = c + f + 1. \end{cases}$$

このようにしてある一つの crepant toric resolution を得ることができる.

4. Gröbner fan

ここでも G は $SL(3,\mathbb{C})$ の有限可換部分群とし, 次の問題に対するひとつの答えを与えたい.

問題 4.1. toric crepant resolution のうち G-Hilbert scheme と同型になるトーリック多様体を与える fan Σ を求める方法はあるのか?

方法 1 Craw 氏と Reid 氏によって G-Hilbert scheme を与える単体分割を求める方法が具体的に与えられている. しかしこれは群の位数が大きくなればなるほど複雑な計算や作図が必要になる.

そこでここではより一般的に G-Hilbert scheme を与える方法 (**方法 2**) を紹介したい. これは Gröbner basis の理論を応用したものであり, 計算機を用いて求めることが可能になる. また Gröbner basis の理論への応用として, 本来求めにくい Initial form が G-Hilbert scheme と関連付けると簡単に与えられることも利点である.

定理 4.2. *I_G を G-homogenous ideal とすると G-Hilbert scheme は I_G の Gröbner fan で定まるトーリック多様体である.*

まず この定理に出てくる Gröbner fan を定義し, 実際に具体例で G-Hilbert scheme を構成してみよう. (Gröbner basis の定義等については [17] 参照.)

$k[\mathbf{x}]$ を多項式環とし, 単項式を $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ で表すことにする.

また weight vector を $w = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ とおく.

まず適当な term order $\prec$ で定義した Gröbner basis に対して, 次のような weight term oder $<_w$ を導入し, その新しい term oder による Gröbner basis を考える:

定義 4.3. $w \geq 0$ とし $\prec$ を任意の term order とする. このとき $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$ に対して **weight term order** $<_w$ を次のように定義する:

$$\mathbf{a} <_w \mathbf{b} \Longleftrightarrow w \cdot \mathbf{a} < w \cdot \mathbf{b} \text{ あるいは } (w \cdot \mathbf{a} = w \cdot \mathbf{b} \text{ かつ } \mathbf{a} \prec \mathbf{b}).$$

定義 4.4. 恒等的には 0 でない多項式 $f = \sum c_i \mathbf{x}^{\mathbf{a}_i}$ に対して, **initial form** $in_w(f)$ は内積 $w \cdot \mathbf{a}_i$ が最大になるような項 $\mathbf{x}^{a_i}$ の和として定義する.

定義 4.5. イデアル I に対して **initial ideal** $in_w(I)$ は次の initial form すべてで生成されるイデアルである:

$$in_w(I) := \langle in_w(f) \mid f \in I \rangle.$$

定義 4.6. 有限集合 $\mathcal{G} \subset I$ が $<_w$ に関する I に対する **Gröbner basis** であるとは, $in_w(I)$ が $\{in_w(g) | g \in \mathcal{G}\}$ で生成されるときをいう.

定義 4.7. Gröbner basis $\mathcal{G}$ が **reduced** であるとは 任意の 2 つの元 $g, g' \in \mathcal{G}$ に対して, g' のどの項も $in_w(g)$ で割れないときをいい, 一意に定まる.

定義 4.8. I に対する **universal Gröbner basis** $\mathcal{U}$ は I に対する相異なる reduced Gröbner basis の和集合である.

定義 4.9. 2 つの weight vector $w, w' \in \mathbb{R}^n$ が I に関して **同値**であるとは, $in_w(I) = in_{w'}(I)$ であるときをいう.

命題 4.10. *weight vector* の同値類,

$$c[w] = \{w' \in \mathbb{R}^n \mid in_w(g) = in_{w'}(g) \text{ for } \forall g \in \mathcal{G}\}$$

は *relatively open convex polyhedral cone* である. ただし $\mathcal{G}$ は I の $<_w$ に関する *Gröbner basis* である.

定義 4.11. I に対する **Gröbner fan** とは $\forall w \in \mathbb{R}^n$ に対して定まる closed cone $\overline{c[w]}$ の集合である.

命題 4.12. *Gröbner fan* は *fan* である.

5. Example

本節では, G-Hilbert scheme の例を Gröbner fan を用いて見てみよう.

群が $G := \frac{1}{2}(1,1,0) \oplus \frac{1}{2}(0,1,1) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ の場合, crepant resolution は全部で 4 つある. そのうちの 1 つが G-Hilbert scheme と同型である. その G-cluster の定義方程式は以下のようになる (cf. 定理 3.3):

$G_1:\ x = a_1yz,\ y^2 = b_1,\ z^2 = c_1,\ xyz = a_1b_1c_1,$

$G_2:\ x^2 = a_2,\ y = b_2zx,\ z^2 = c_2,\ xyz = a_2b_2c_2,$

$G_3:\ x^2 = a_3,\ y^2 = b_3,\ z = c_3xy,\ xyz = a_3b_3c_3,$

$$G_4: \begin{cases} x^2 = b_4c_4,\ y^2 = a_4c_4,\ z^2 = a_4b_4, \\ yz = a_4x,\ zx = b_4y,\ xy = c_4z,\ xyz = a_4b_4c_4, \end{cases}$$

ただし $a_i,\ b_i,\ c_i \in \mathbb{C}$.

一方, I_G に対する universal Gröbner basis $\mathcal{U}$ は

$$\mathcal{U} = \{x^2-1, y^2-1, z^2-1, xy-z, yz-x, zx-y, xyz-1\}$$

となり, weight vectors $(w_x, w_y, w_z) \in \mathbb{R}^3$ は 4 つの同値類に分かれる. さらに対応する initial ideals をも列記すると次のようになる:

$c_1[w]: w_x > w_y \geq 0,\ w_x > w_z \geq 0,\ w_x > w_y + w_z,$

$\quad in(I) = \langle x, y^2, z^2 \rangle,$

$c_2[w]: w_y > w_x \geq 0,\ w_y > w_z \geq 0,\ w_y > w_z + w_x,$

$\quad in(I) = \langle x^2, y, z^2 \rangle,$

$c_3[w]: w_z > w_x \geq 0,\ w_z > w_y \geq 0,\ w_z > w_x + w_y,$

$\quad in(I) = \langle x^2, y^2, z \rangle,$

$c_4[w]: w_x + w_y > w_z \geq 0,\ w_y + w_z > w_x \geq 0, w_z + w_x > w_y \geq 0,$

$\quad in(I) = \langle x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx \rangle.$

ここで注目すべき点は, G-cluster の定義方程式 G_i の左辺の単項式と weight vector の各同値類における initial ideal の生成元に同じものが出てきていることである.

6. Applications

(1) **代数多様体の分類理論への応用** Gröbner fan は正則な三角形分割の一つを与えているだけでなく, 他のすべての正則な三角形分割の情報をも与える. また正則な三角形分割によって得られる fan に対応するトーリック多様体は射影的である. しかも 3 次元の $SL(3,\mathbb{C})$ の有限部分群による商特異点の場合, Gröbner fan は crepant resolution を与え, 非特異である. したがって 定理 4.2 の系として次がいえる:

系 6.1. *Gröbner fan の "flip" により 射影的な crepant resolution の間の flop が記述できる.*

ここに出てくる "flip" は極小モデル理論の flip ではなく, Gröbner basis の用語である.

(2) **McKay 対応への応用** 2 次元の任意の商特異点に対する McKay 対応では, 例外因子に対応する既約表現として special representation というものがある (cf. [7]). その special representation も Gröbner basis の言葉で記述できる:

定理 6.2 (Ito [8]). (a) $GL(2,\mathbb{C})$ の有限巡回部分群で *quasi-reflection* を持たない G に対して, *G-homogeneous ideal I_G に対する Gröbner fan* によって定まるトーリック多様体は $\mathbb{C}^2/G$ の最小特異点解消に同型である. *(つまりこの場合も G-Hilbert scheme に同型である, といえる.)*

(b) 群 G の既約表現 ρ_k が *special resentation* であるのは対応する表現が ρ_k であるような *initial ideal $in_w(I)$* が単項式でない生成元をもつときに限る.

(3) **G-Hilbert schemes と Gröbner fan の関係** ここで G-Hilbert scheme と Gröbner fan について知られている事実をまとめておく. ただし X を有限群 G による商 $\mathbb{C}^n/G$ とし, Y をその最小特異点解消, H を G-Hilbert scheme そして F を G-homogeneous ideal I_G によって定まるトーリック多様体とする.

<u>2 次元</u>: $GL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群の場合, 最小特異点解消 $Y \longrightarrow X$ は G-Hilbert scheme と同型である, つまり $Y \cong H$. また巡回群に対しては, $Y \cong H \cong F$ が成り立つ.

3 次元: 任意の $G \subset SL(3,\mathbb{C})$ に対して, Y は creapnt resolution であり, G-Hilbert scheme H はあるひとつの crepant resolution に同型である. さらに可換群に対しては $H \cong F$ がなりたつ.

高次元: いくつかの例が計算されている:

(1) $G = \frac{1}{2}(1,1,1,1) \subset SL(4,\mathbb{C})$ の場合, X は terminal singularity をもち crepant resolution は存在しない. しかし G-Hilbert scheme H は非特異であり, Gröbner fan によって定義されるトーリック多様体 F に同型である.

(2) 同じく 4 次元で, $G = \frac{1}{2}(1,1,0,0) \oplus \frac{1}{2}(0,1,1,0) \oplus \frac{1}{2}(0,0,1,1)$, すなわち, $G \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 3}$ のとき, X は canonical であるが terminal singularity ではなく, crepant resolution Y が存在する. 一方 G-Hilbert scheme は非特異であるが crepant resolution ではない. さらに Gröbner fan は G-Hilbert scheme H と同型なトーリック多様体 F を与える.

7. Disucussion

本稿の主定理 (定理 4.2) の高次元への拡張として, 次の予想が考えられる.

予想 7.1. $SL(n,\mathbb{C})$ の有限部分群 G に対して, I_G を G-homogenous ideal ととる. このとき 点 I_G を含む G-Hilbert scheme の成分はトーリック多様体であり, I_G に対する Gröbner fan で定義される.

この予想の主張はほぼ正しいと思われるが, 完全な証明が現時点で出来ていないので, さらにこの予想を仮定した際に考えられる応用を述べておく:

♡ G-Hilbert scheme の smoothness は Gröbner fan の中の cone が単体的かどうかで判断できる.

♡ Gröbner fan で定まるトーリック多様体のオイラー数はトーリック幾何学の一般論より Gröbner fan の中の cone の数で決まる.

♡♡ G-Hilbert scheme が crepant resolution であるならば 非特異かつオイラー数が群 G の共役類の数に等しくなくてはならない. (cf. [1], [2])

References

[1] V. Batyrev, *Non-Archimedean integrals and stringy Euler numbers of log-terminal pairs*, J. Eur. Math. Soc. 1 (1999), 5–33.

[2] V. Batyrev and D. Dais, *Strong McKay correspondence, string theoretic Hodge numbers and mirror symmetry*, Topology, **35**, (1996), 901–929.

[3] J. Bertin and D. Markushevich, *Singularités quotients non abéliennes de dimension 3 et variétés de Calabi-Yau*, MathÀnn; **299**, (1994), 105–116.

[4] T. Bridgeland, A. King and M. Reid, *The McKay correspondence as an equivalence of derived categories*, J. AMS, **14**, (2001), 535–554.

[5] Y. Ito, *Crepant resolution of trihedral singularities and the orbifold Euler characteristic*, InternJourôf Math; **6**, (1995), 33–43.

[6] ———, *Gorenstein quotient singularities of monomial type in dimension three*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **2**, (1995), 419–440.

[7] ———, *Special McKay correspondence*, to appear in Actes de l'école d'été "Géométrie des variétés toriques" (Grenoble, 2000), Séminaires et Congrès (Société Mathématique de France), RIMS-1345, math.AG/0111314.

[8] ———, *Special representations via Gröbner basis* in preparation.

[9] Y. Ito and M. Reid, *The McKay correspondence for finite subgroups of $SL(3,\mathbb{C})$*, in: Higher dimensional complex varieties (Trento, Jun 1994), M. Andreatta and others Eds., de Gruyter, 1996, 221–240.

[10] D. G. Markushevich, M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov, *Description of a class of superstring compactifications related to semi-simple Lie algebras*, CommMathPhys; **111**, (1987), 247–274.

[11] D. Markushevich, *Resolution of $\mathbb{C}^3/H_{168}$*, Math. Ann. **308**, (1997), 279–289.

[12] J. McKay, *Graphs, singularities, and finite group*, in Santa Cruz conference on finite groups (Santa Cruz, 1979), Proc. Symp. Pure Math. **37**, AMS, (1980), 183–186.

[13] I. Nakamura, *Hilbert schemes of abelian group orbits*, J. Algebraic Geom., **10**, (2001), 757–779.

[14] S.-S. Roan, *On the generalization of Kummer surfaces*, JDiffGeometry **30**, (1989), 523–537.

[15] ———, *On $c_1 = 0$ resolution of quotient singularity*, InternJourôf Math; **5**, (1994), 523–536.

[16] ———, *Minimal Resolution of Gorenstein Orbifolds in Dimension Three*, Topology, 35, (1996), 489–508.

[17] B. Sturmfels, *Gröbner Basis and Convex Polytopes* Univ. Lect. Series, **8**, AMS (1995).

〒 192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1 東京都立大学大学院 理学研究科 数学教室
E-mail address: `yukari@comp.metro-u.ac.jp`