

マッケイ対応とヒルベルト・スキーム

北海道大学 中村 郁

1 ディンキン図形と ADE

ディンキン図形と呼ばれる簡単な図形, とりわけ ADE というディンキン図形が数学や数理解物理のいろいろな分野に登場する. 同じものが一見お互いに何の関係もないさまざまな分野に現われる, その理由はあまり明らかではない場合が多いが, しばしばそれらの間のより直接的な結びつきを期待させる. 本稿ではこれに関連した一つの話題としてマッケイ対応を考察する. ディンキン図形 ADE に関連して現れる対象を, 同じ系統ごとに整理して述べれば以下のようなになる:

(0) ディンキン図形 ADE

(1) $SL(2, \mathbb{C})$ の有限部分群, \mathbb{R}^3 中の正多面体とその回転群

(2) 2次元超曲面の単純特異点, 変形で安定な臨界点

(3) 単純古典リイ環 ADE, II_1 型因子環の特別な対, 量子群などの“単純な”結合代数の系列

(4) $SL(2, \mathbb{Z})$ -不変なある種の共形場理論の分配関数

(5) 3つの有限単純群フィッシャー群 F_{24} , ペピーモンスター \mathbb{B} , モンスター M の位数 2 の元に関する事実 (但し順に E_6, E_7, E_8 が対応)

たとえば (2) の単純特異点は非常に多くの特徴付けを持つ. [Durfee79] の報告によれば少なくとも 15 種類の特徴付けがある. したがってその中のどれによってこの問題の特異点の系列を定義すべきかも問題にはなる. それと同じことは (3) についても言えるが, (3) の場合はどの場合にも, その情報の本質的部分を回復するのに十分な図形 (tree) で表される正定値 2 次形式に行き着いて, そのあとはよく知られた分類により (0) の ADE に限られる. したがって対象はさまざまでも ADE に限る原理はほぼ同一と見てよいだろう. それと同様に, (2) の特異点ないし多項式は問題の設定は多少違うが, どれも厳しい条件を満たす多項式の標準形を扱うので, 分類結果が同じになるのはそれ程不思議ではない.

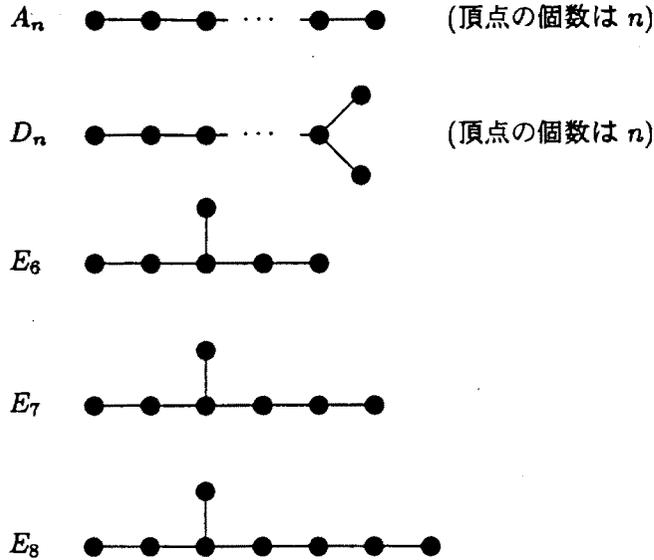


図 1: デインキン図形 ADE

(4)については省略するが、(5)については、北詰氏の北海道大学での解説などを参考にして少し説明したい。

有限単純群の分類では位数 2 の元 (involution) が大切な役割を果たす。モンスター M の位数 2 の元の共役類は 2 つあるが、中心化群の構造によって区別される。そのひとつ Fisher involution とよばれる方の共役類に着目する。Fisher involution をふたつとり a, b とする。このとき積 ab の位数は 1, 2, 3, 4, 5, 6 のどれかであることが知られている。さらに Fisher involution をいろいろ動かしたとき、積 ab の M における共役類は合計 9 個あり、そのうち積 ab の位数が 2, 3, 4 となるものはふたつずつあり、積 ab の位数が 1, 5, 6 となるものはただひとつある。これは E_8 の拡大デインキン図形 (図 2 参照) の 9 個の頂点の重複度と一致する。念のために言うと、 E_8 拡大デインキン図形の頂点の重複度とは、各頂点を『正 20 面体群』の既約表現と解釈すればその次数、あるいは各頂点を単純ルートと見れば最大ルートの係数を意味する。あるいは単純特異点の基本因子の係数と言っても同じである。同じことを F_{24} や \mathbb{B} で考えると E_6 と E_7 が出てくる。ただしこの対応 (これもマッケイ対応) では、頂点と頂点を結ぶ線分に意味を与えることはいまのところできていない。よく知られているように、モンスター M の共役類には McKay-Thompson 級数と呼ばれる保型関数が対応する。たとえば共役類 $\{e\}$ の McKay-Thompson 級数

は楕円モジュラー関数 $j(q)$ である. ということもあって, この不思議な対応を McKay-Thompson 級数を通じて理解できないか? というのが McKay の問題である.

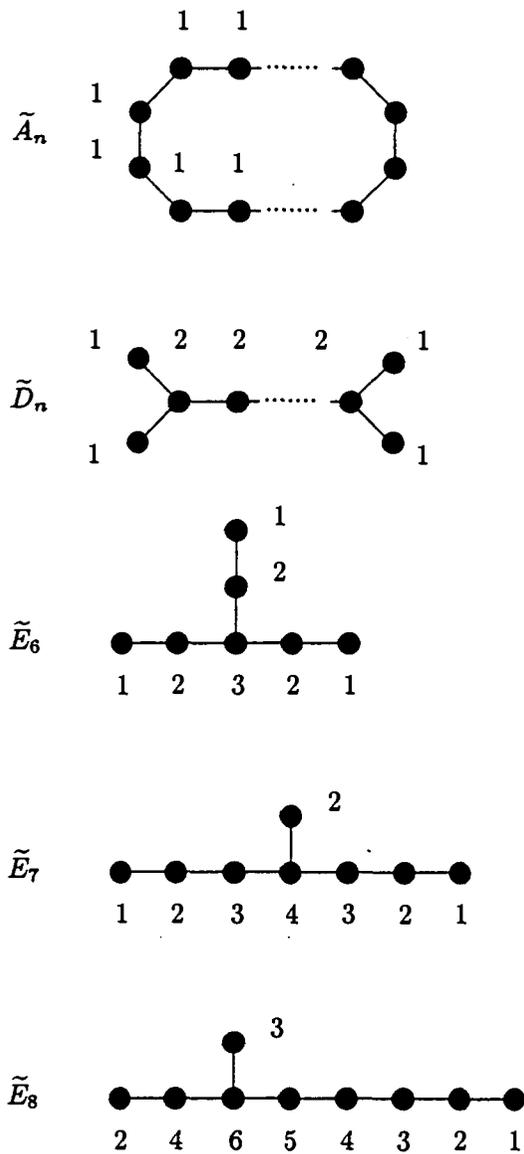


図 2: 拡大ディンキン図形

2 マッケイ対応

本稿では論文 [ItoNakamura1999] に基づいて、群軌道のヒルベルト・スキームを D_5 の場合に解説してみたい。のちに見るように群軌道のヒルベルト・スキームは「マッケイ対応」の予見する幾何学をすべて自然に実現する、と言ってよい。

2.1 不変式環

以後は (3)(4)(5) は忘れて古典的な (1)(2) に戻って話をしたい。 $SL(2, \mathbb{C})$ の有限部分群は $SL(2, \mathbb{C})$ の中で共役を除いて完全に分類されており、たとえば (0) で D_5 が対応する場合には、 Γ は

$$\sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{及び} \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

で生成される位数 12 の群である。但し $\varepsilon = e^{2\pi\sqrt{-1}/6}$ とする。

このときディンキン図形 D_5 を Γ から構成する方法は 2 通り知られている。

まず最もありふれた方法は \mathbb{C}^2 の商空間 $Y = \mathbb{C}^2/\Gamma$ を調べることである。 \mathbb{C}^2 の座標環を $\mathbb{C}[x, y]$ とし、 Γ -不変な $\mathbb{C}[x, y]$ の元のなす部分環 $\mathbb{C}[x, y]^{\Gamma\text{-inv}}$ とする。ただし簡単のため通常と違って始めから $\mathbb{C}[x, y]$ への作用として $g \in \Gamma$ を表わし、空間への作用は T_g と書くことにする。具体的にはつぎのように横ベクトルに行列 g を右から作用させる：

$$T_g : (x, y) \mapsto (g(x), g(y)) = (x, y) \cdot g \quad (g \in \Gamma).$$

通常は空間への作用を書くのだが、ここではあとで $\mathbb{C}[x, y]$ への表現を調べる必要が生ずるので、こうした方が便利なのである。たとえば、 $\tau(x) = -y$, $\tau(y) = x$ である。

このとき Y は $\mathbb{C}[x, y]^{\Gamma\text{-inv}}$ によって記述されるが、 Γ は原点 $(0, 0)$ を唯一の固定点として持ち、したがって Y は原点 $(0, 0)$ の像 O でのみ特異点を持つ。 $\mathbb{C}[x, y]^{\Gamma\text{-inv}}$ は Klein によってつぎの 3 つの元によって生成されることが知られている：

$$F = x^6 + y^6, \quad G = x^2y^2, \quad H = xy(x^6 - y^6).$$

容易にわかるように、関係式

$$4G^4 + H^2 - GF^2 = 0$$

が成立つ。したがって Y の O の近くでの様子は \mathbb{C}^3 の超曲面

$$4v^4 + w^2 - vu^2 = 0$$

の原点 $(0, 0, 0)$ の近くでの様子と一致する. これが (1) から (2) へ移るよく知られたプロセスであるが, ディンキン図形 D_5 はこの超曲面の特異点 $(0, 0, 0)$ の例外集合として得られる. 計算の結果を図示すれば図 2 のようになる.

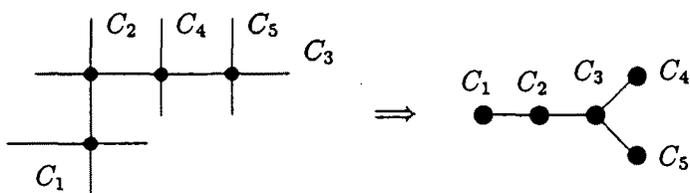


図 3: D_5 の例外集合

図 2 の左側の図の線分はそれぞれ 1 個の射影直線を表わし, 2 つの線分の交わりは対応する射影直線が 1 点で交差していることを示す. この図形の双対図形を考えると, 右側の図のようなディンキン図形 D_5 が出てくる.

2.2 $\Gamma(D_5)$ の表現論

次に Γ から同じディンキン図形を得るための McKay による第 2 の方法を説明したい.

まず Γ の既約表現を分類することから始める. D_5 の場合

$$\sigma \mapsto \sigma, \quad \tau \mapsto \tau$$

という自分自身を対応させる写像は Γ の 2 次元既約表現を与える. これは ρ_{nat} と ρ_2 とも表わす. すなわち, $\rho_{\text{nat}}(\sigma) = \sigma, \rho_{\text{nat}}(\tau) = \tau$ である. Γ の全ての元に 1 を対応させるのも, 1 つの 1 次元表現になる. これは ρ_0 で表わし単位表現と呼ぶ. Γ が $SL(2, \mathbb{C})$ のどんな有限部分群であっても, いつも ρ_{nat} と ρ_0 は定まることに注意したい. このふたつの表現は以下の議論でも特別な役割を果たす.

次にたとえば多項式 $P_1(x, y) = xy$ をとる. P_1 は σ と τ の作用によって

$$\sigma P_1 = P_1, \quad \tau P_1 = -P_1$$

のように変化する. 正確に計算したいひとのために注意しておく, $\sigma(x) = \varepsilon x, \sigma(y) = \varepsilon^{-1}y, \tau(x) = -y, \tau(y) = x$ である. さらに $\sigma P_1(x, y) :=$

$P_1(\sigma(x), \sigma(y)) = P_1(-y, x)$ と計算する. そこでこの P_1 の変化の様子を考慮して

$$\rho_1(\sigma) = 1, \quad \rho_1(\tau) = -1$$

のように定義すると, 容易に分かるように ρ_1 も Γ の 1 次元表現を与える. 以下

$$P_4(x, y) = x^3 + iy^3, \quad P_5(x, y) = x^3 - iy^3$$

とすると P_4, P_5 も 1 次元表現 ρ_4, ρ_5 を定める. ただし $i = \sqrt{-1}$ とする. 簡単な計算で,

$$\begin{aligned} \sigma P_4 &= -P_4, & \tau P_4 &= iP_4 \\ \sigma P_5 &= -P_5, & \tau P_5 &= -iP_5 \end{aligned}$$

が分かる. この他 Γ にはもう 1 つ 2 次元既約表現 (の同値類) ρ_3 があるが, それはテンソルの記号を用いて, $\rho_3 = \rho_2 \otimes \rho_4$ と定義すればよい. 具体的には

$$\rho_3(\sigma) = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho_3(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

である.

各表現 ρ_k に対して $\chi_k = \text{tr}(\rho_k)$ と定義する.

ところで Γ の共役類は以下の 6 個である, ただし $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする:

$$\begin{aligned} &\{e\}, \{-e\}, \{\sigma, \sigma^5\}, \{\sigma^2, \sigma^4\}, \\ &\{\tau, \sigma^2\tau, \sigma^4\tau\}, \{\sigma\tau, \sigma^3\tau (= \tau^3), \sigma^5\tau\}. \end{aligned}$$

各指標は共役類の関数として表 1 の値をとる. 指標が違えば既約表現の同値類も異なる. さらに, 表 1 で e の下に並んだ数字 1, 1, 2, 2, 1, 1 について 2 乗して和をとると

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 12 = \Gamma \text{ の元の個数}$$

が成り立つ. よく知られているように「この等式が成り立つと既約表現の同値類はもうそれ以外には存在しない」. そこで既約表現の同値類はすべてわかったことになる.

2.3 McKay の発見

S を Γ の共役類の集合とする. 各共役類は表 1 の最初の列の 6 つの元 $e, -e, \dots, \tau^3$ によって代表される. 指標 χ_k は S 上の関数である. そこで関

表現	指標	e	$-e$	σ	σ^2	τ	τ^3
ρ_0	χ_0	1	1	1	1	1	1
ρ_1	χ_1	1	1	1	1	-1	-1
ρ_2	χ_2	2	-2	1	-1	0	0
ρ_3	χ_3	2	2	-1	-1	0	0
ρ_4	χ_4	1	-1	-1	1	i	$-i$
ρ_5	χ_5	1	-1	-1	1	$-i$	i

表 1: Γ の指標

数 χ_k と χ_2 の積を S 上の関数として χ_0, \dots, χ_5 までの和として表わすことを考える. たとえば

$$\chi_2^2 \text{ は } S \text{ 上 表の左から順に } 4, 4, 1, 1, 0, 0$$

という値をとる. これは $\chi_0 + \chi_1 + \chi_3$ がとる値に等しい. したがって

$$\chi_2^2 = \chi_0 + \chi_1 + \chi_3$$

が成り立つ. 同様に

$$\chi_0 \chi_2 = \chi_1 \chi_2 = \chi_2, \quad \chi_3 \chi_2 = \chi_2 + \chi_4 + \chi_5$$

$$\chi_4 \chi_2 = \chi_3, \quad \chi_5 \chi_2 = \chi_3$$

が確かめられる. これらの関係式から表現 ρ_i のテンソル積に関する関係が導かれる:

$$\rho_2 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_0 + \rho_1 + \rho_3, \quad \rho_0 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_1 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_2,$$

$$\rho_3 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_2 + \rho_4 + \rho_5, \quad \rho_4 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_3,$$

$$\rho_5 \otimes \rho_{\text{nat}} = \rho_3.$$

著しい特徴は右辺の χ_i (あるいは ρ_i) の係数が 0 又は 1 に等しいことである. そこで次のようにして図形を作る:

各 χ_i に対して 1 つの頂点 (図 4 の黒丸) を対応させ, $\chi_2 \chi_i$ の右辺に χ_j が現れたら頂点 i と頂点 j を線分で結ぶことにする.

上の計算結果から分かるように, $a_{ij} = a_{ji}$ なのでひとつの樹木 (tree) を矛盾なく作ることができる. 図 4 の左側の図がその tree である. 左の図から

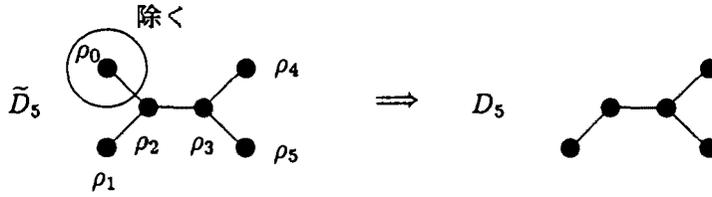


図 4: 表現のディンキン図形

ρ_0 の対応する頂点とそこから出る線分をすべて除くと、よく知られたディンキン図形 D_5 が得られる。この事実は McKay によって発見された。

なぜ全然違う方法で同じ図形が出てくるのだろうか？ 現在までに「マッケイ対応」の説明は、表現論的には Springer, 代数幾何的には Gonzalez–Sprinberg と Verdier によるものなど多数知られている。Springer は「(0) と (1) の間のマッケイ対応」の, $SL(2, \mathbb{C})$ の有限部分群の分類に依存しない一般的な証明を与えた。一方 [GSV83] は、1つの既約表現の同値類に対し、ベクトル束の特性類を通じて Y の最小特異点解消 X の例外集合の既約成分が 1つ対応することを示し、その対応によってディンキン図形が一致することを示した。

本稿の残る部分で、それらとは異なる観点から McKay の発見に説明を与えてみたい。[ItoNakamura99] による新しい説明である。これによると、「例外集合の非特異点のおおのに既約表現が対応し、1つの既約成分に沿うては既約表現の同値類が変化しない……」というもう少し精密な説明になる。既約表現もその同値類も同じようなものだが、既約表現の同値類は有限個であるのに対し既約表現は無数にある。そしてその差は無視できない。

なぜ ρ_{nat} によるテンソル積をとるのか？ なぜ頂点 ρ_0 は除くのか？ この問題も同じ文脈で考えてみたい。

3 群の軌道のヒルベルト・スキーム

3.1 n 点のヒルベルト・スキーム

簡単のため $X = \mathbb{C}^2$ とする。まず X 上の n 点のチャウ・スキーム $X^{(n)}$ を考える。 n 点とは、

$$Z = n_1 P_1 + \cdots + n_r P_r, \quad n = n_1 + \cdots + n_r, \quad P_i \neq P_j$$

という形の順序を無視した形式和のことである。つまり

$$X^{(n)} = X \times \cdots \times X / S_n$$

となる。この $X^{(n)}$ は特異点を持つ。

つぎに記号上紛らわしいが $X^{[n]}$ という空間を定義する。 $X^{[n]}$ が表題の n 点のヒルベルト・スキームであるが、つぎのように定義する：

$$\begin{aligned} X^{[n]} &= \left\{ I \subset \mathbb{C}[x, y]; \quad \begin{array}{l} I \text{ は } \mathbb{C}[x, y] \text{ のイデアルで} \\ \mathbb{C}[x, y] \text{ での余次元が } n \text{ に等しい} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ I \subset \mathbb{C}[x, y]; \quad \begin{array}{l} I \text{ は } \mathbb{C}[x, y] \text{ の部分ベクトル空間で} \\ xI \subset I, yI \subset I, \dim \mathbb{C}[x, y]/I = n \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$X^{[n]} \ni I$ に対しては X 上の部分集合 Z が I の零点集合として自然に定まる。一般にはこの Z の構造は複雑だが、 n 個の点とみなしうような部分集合がともかく定まる。 $X^{[n]}$ は $\text{Hilb}^n(X)$ とも表される。

つぎの事実が次節以降の議論の出発点である。

定理 3.2 (Fogarty) $X = \mathbb{C}^2$ とする。このとき正則写像 $\pi: X^{[n]} \rightarrow X^{(n)}$ が定義され、この写像によって $X^{[n]}$ は $X^{(n)}$ の特異点解消となる。写像 π は点 P_1, \dots, P_r を Z の台としたとき、

$$\pi: Z \mapsto n_1 P_1 + \cdots + n_r P_r$$

として定義される。但し $n_i = Z$ の P_i での重複度 (この定義は省略)。

3.3 Γ の固定点集合

Γ を $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の有限部分群とし、定理 3.2 で $n = \Gamma$ の位数の場合を考える。 Γ は \mathbb{C}^2 に作用するので $X = \mathbb{C}^2$ のとき $X^{[n]}$ にも $X^{(n)}$ にも作用する。 π により Γ の固定点はまた Γ の固定点に写像される。 Γ の固定点集合をそれぞれ $(X^{[n]})^\Gamma, (X^{(n)})^\Gamma$ で表わすことにすると

$$\pi^\Gamma: (X^{[n]})^\Gamma \rightarrow (X^{(n)})^\Gamma$$

という写像ができる。定理 3.4 によって $(X^{[n]})^\Gamma$ も特異点がない。

定理 3.4 [ItoNakamura99] $n = \Gamma$ の位数 とする。このとき

- (1) $(X^{(n)})^\Gamma = \mathbb{C}^2/\Gamma$,
- (2) $(X^{[n]})^\Gamma$ (の主要な連結成分) は \mathbb{C}^2/Γ の最小特異点解消となる。

§1 で注意した通り, 曲面の最小特異点解消は唯ひとつ定まる. ここで Γ を §2 で考察した 2 面体群とすると, 例外集合は §1 で計算したものと一致する. 定理 3.4 は Γ の具体的記述を必要とせずに証明されるが, 以下詳細に調べれば分かるように, 単に例外集合がディンキン図形 D_5 と一致するだけでなくもう少しおもしろい現象が起きている. $(X^{[n]})^\Gamma$ (の主要な連結成分) がこの節の表題の「群 Γ の軌道のヒルベルト・スキーム」である. これを $\text{Hilb}^\Gamma(X)$ と表わす.

定理 3.4 によれば π^Γ は \mathbb{C}^2/Γ の原点の上以外では同型である. したがって例外集合は原点上に集中している. 言い換えれば

$$E = \{I \in \text{Hilb}^\Gamma(X); I \subset \mathfrak{m}\}$$

が π^Γ の例外集合を与える. ただし $\mathfrak{m} = x\mathbb{C}[x, y] + y\mathbb{C}[x, y]$ とする.

3.5 余不変式環

まず, \mathfrak{n} を不変式 F, G, H で生成される $\mathbb{C}[x, y]$ のイデアルとする. このとき \mathfrak{n} は Γ の作用で不変なイデアルなので商環 $\mathbb{C}[x, y]/\mathfrak{n}$ (これを Γ の余不変式環と呼ぶ) にも Γ が作用する. もちろん Γ の作用は多項式の次数を変えないから $\mathbb{C}[x, y]/\mathfrak{n}$ を同次式ごとに分けておくと, その各同次式の部分に Γ が作用する. V_m を次数 m の同次式で生成される部分空間とすると,

$$\mathbb{C}[x, y]/\mathfrak{n} = \bigoplus_{m=0}^7 V_m$$

となる. $V_0 = \mathbb{C}$ である. V_m 及びその表現の同値類は表 2 の通りである.

表 2 の中で $\{f\}$, $\{f, g\}$ とあるのは, それぞれ f , または f および g で生成されるベクトル空間を表わす. 以下 Γ の作用で不変な部分ベクトル空間のことを, 簡単のために Γ 加群と呼ぶことにする. たとえば V_2 は 2 つの Γ 加群 $\{xy\}$ 及び $\{x^2, y^2\}$ の直和である. 各々の直和成分は ρ_1 及び ρ_3 に同値な既約表現なのでこれを $V_2(\rho_1)$, $V_2(\rho_3)$ によって表わすことにする. その他も同様である.

3.6 例外集合 E の既約成分 E_i

表 2 は表現の同値類で見ると, 次数 4 を中心に対称に分布している. これは余不変式環のもつ双対性であるが, この双対性を用いて E の既約成分に相当する射影直線 \mathbb{P}^1 を構成することができる.

m	$V_m(\rho)$	表現の同値類
1	$\{x, y\}$	ρ_2
2	$\{xy\} \oplus \{x^2, y^2\}$	$\rho_1 + \rho_3$
3	$\{x^2y, -xy^2\} \oplus \{x^3 + iy^3\} \oplus \{x^3 - iy^3\}$	$\rho_2 + \rho_4 + \rho_5$
4	$\{y^4, x^4\} \oplus \{x^3y, -xy^3\}$	$\rho_3 + \rho_3$
5	$\{y^5, -x^5\} \oplus \{xy(x^3 - iy^3)\} \oplus \{xy(x^3 + iy^3)\}$	$\rho_2 + \rho_4 + \rho_5$
6	$\{x^6 - y^6\} \oplus \{x^5y, -xy^5\}$	$\rho_1 + \rho_3$
7	$\{x^6y, -xy^6\}$	ρ_2

表 2: 余不変式環の分解

まず $V_2(\rho_1) \oplus V_6(\rho_1)$ を見てみよう. $V_2(\rho_1) = \{xy\}$, $V_6(\rho_1) = \{x^6 - y^6\}$ である. そこで

$$I_1(s) = (xy + s(x^6 - y^6)) + \mathfrak{n}$$

と定義する. $I_1(s)$ は $xy + s(x^6 - y^6)$ 及び F, G, H で生成される $\mathbb{C}[x, y]$ のイデアルである. このとき, どんな $s \in \mathbb{C}$ に対しても

$$\dim \mathbb{C}[x, y]/I_1(s) = 12$$

が成り立つ. たとえば $s = 0$ とすると, 表から $\dim \mathbb{C}[x, y]/I_1(s) = 12$ が分かる. $s \neq 0$ だと面倒ではあるが同じことが示される.

つぎの問題は $s \rightarrow \infty$ の極限を求めることである. $E \ni I$ ならば $\mathbb{C}[x, y]/I$ も Γ 加群となるが Γ 加群としては Γ の正則表現になる. この結果, $I \supset \mathfrak{n}$ となるので $\dim \mathbb{C}[x, y]/I = 12$, $\dim \mathbb{C}[x, y]/\mathfrak{m} = 23$ を考慮すれば, E は $\mathbb{C}[x, y]/\mathfrak{n}$ の余次元 11 の部分空間のグラスマン多様体 $\text{Gr}(\mathbb{C}[x, y]/\mathfrak{n}, 11)$ の部分集合であることが分かる. グラスマン多様体はコンパクトなので無限点列 $I_1(s)$ ($s \in \mathbb{C}$) は収束する. そこで $I_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} I_1(s)$ と定義する. 正確には

$$I_1(\infty)/\mathfrak{n} = \lim_{s \rightarrow \infty} I_1(s)/\mathfrak{n}$$

となるような \mathfrak{n} を含む $\mathbb{C}[x, y]$ のイデアルとして $I_1(\infty)$ を定義する.

以後 $I \in E$ に対して, $I/(\mathfrak{m}I + \mathfrak{n})$ を $V(I)$ と表す. これはイデアル I の不変式以外の生成元を表している. E の部分集合を

$$E_1 = \{I \in E; \Gamma\text{-加群 } V(I) \text{ が表現 } \rho_1 \text{ を含む}\}$$

と定義すれば, (証明を要することではあるが)

$$E_1 = \{I_1(s); s \in \mathbb{C}\} \cup I_1(\infty)$$

となり, E_1 は射影直線 \mathbf{P}^1 と同型である. 同様に

$$E_2 = \{I \in E; \Gamma\text{-加群 } V(I) \text{ が表現 } \rho_2 \text{ を含む}\}$$

と定義すれば, E_2 も射影直線 \mathbf{P}^1 と同型となる. たとえば $t \neq 0$ に対して

$$I_2(t) = (x^2y - ty^5, xy^2 - tx^5) + n$$

と定めれば, $I_2(t) \in E_2$ である. $I_2(0), I_2(\infty)$ は上と同様に定義する. ここで

$$\{x^2y, xy^2\} = V_3(\rho_2), \{y^5, -x^5\} = V_5(\rho_2)$$

であることを注意したい. 以下同様に E_3 には $V_4(\rho_3)$ (2次元) を, 更につぎの E_4 には $V_5(\rho_4), V_3(\rho_4)$, E_5 には $V_5(\rho_5)$ と $V_3(\rho_5)$ を用いればよく, E_3, E_4, E_5 がすべて射影直線となることも同様に証明できる.

つぎのように言うこともできる. Γ の既約表現 ρ に対し, 例外集合の各既約成分 $E(\rho)$ は集合としては, Γ 加群 $\rho \oplus \rho$ のなかにある ρ と同型な全ての Γ 加群のなす集合と一致する:

$$E(\rho) = \{V : \Gamma\text{-加群}; V \simeq \rho, V \subset \rho \oplus \rho\} \simeq \mathbf{P}^1$$

ここで, \mathbf{P}^1 との同型は Schur の補題から従う. $E(\rho)$ の右辺を $\mathbf{P}(\rho \oplus \rho)$ と書くことにする.

3.7 E_1 と E_2 の交差

それでは, E_1 と E_2 の交点はどうなるかを調べてみよう.

$I_1(s) \in E_1$ ($s \in \mathbf{C}$) は $V(I_1(s)) \simeq \rho_1$ となるので, 他の成分 E_j ($j \neq 1$) に含まれることはない. 問題なのは $I_1(\infty)$ だけだが, これは E_2 にも含まれる. まず

$$I_1(s) = (xy + s(x^6 - y^6)) + n$$

なので $I_1(\infty) \cap n$ はもちろん成り立つ. つぎに $s \neq 0$ のとき, $I_1(s)$ は $\frac{1}{s}xy + (x^6 - y^6)$ を含むから, $s \rightarrow \infty$ の極限として $x^6 - y^6 \in I_1(\infty)$ がわかる. しかしここで

$$I_1(\infty) = (x^6 - y^6) + n$$

と定めると $I_1(\infty) \notin X^{[12]}$ となってしまう. そこでつぎのように考える:

- (1) 8次式は全て $I_1(s)$ に含まれる,
- (2) $n \subset I_1(s)$ を考慮して計算すると7次式も全て $I_1(s)$ に含まれる,
- (3) $x(xy + x(x^6 - y^6)) \in I_1(s)$ なので (2) を考慮すると $x^2y \in I_1(s)$, 同様に $xy^2 \in I_1(s)$,

(4) したがって $x^2y, xy^2 \in I_1(\infty)$.

このことから $I_1(\infty)$ は $x^6 - y^6, x^2y, xy^2$ を含むことになる. 結局正しい答は

$$I_1(\infty) = (x^6 - y^6, x^2y, xy^2) + \mathfrak{n} = (V_6(\rho_1), V_3(\rho_2)) + \mathfrak{n}$$

となる. こうして $I_1(\infty) \in \text{Hilb}^\Gamma(X) = (X^{[12]})^\Gamma$ も成り立つ. E_2 の方から同じように E_1 の方へ向かう極限を計算することもできる. 計算により

$$I_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} I_1(s), \quad I_2(0) = \lim_{t \rightarrow 0} I_2(t)$$

の2つの極限が一致することが確かめられる. この $I_1(\infty)$ が E_1 と E_2 の交点になる. このとき $V(I_1(\infty)) = V_6(\rho_1) + V_3(\rho_2) = \rho_1 + \rho_2$ である.

このあたりの事情はもう少し一般的な書き方をした方が分かりやすいと思うので, つぎのように書き直してみる. まず一般に有限次元の G 加群 W に対して $I(W) = W \cdot \mathbb{C}[x, y] + \mathfrak{n}$ と定義する. 適当な W を選ぶと $I(W)$ は $\text{Hilb}^\Gamma(X) = (X^{[12]})^\Gamma$ に含まれる. ところで例外集合 E に属する任意の I は \mathfrak{n} を含むので

$$V(I) := I/(mI + \mathfrak{n})$$

と定義すると, $V(I)$ は有限次元 Γ 加群となる. $V(I)$ は商加群だが, 実際には I の部分加群として実現される. たとえば $V(I_1(s)) = \{xy + s(x^6 - y^6)\}$ である. ここで $I \in E$ ならば, $I = I(V(I))$ が成り立つことに注意する.

以上の準備のもとで, $I_1(\infty)$ と $I_2(0)$ の計算をつぎのように整理することができる: まず, $W \in \mathbf{P}(V_6(\rho_1) \oplus V_2(\rho_1))$ (すなわち, $W \subset V_6(\rho_1) \oplus V_2(\rho_1)$, $W \simeq \rho_1$) $W \neq V_6(\rho_1)$ に対して $I(W)$ をとり, $\mathbf{P}(V_6(\rho_1) \oplus V_2(\rho_1))$ の中で W が $V_6(\rho_1)$ に近づく極限を考える. S_k は k 次同次式の空間を表すものとして, このとき

$$\begin{aligned} I_1(\infty)/\mathfrak{n} &= \lim_{W \rightarrow V_6(\rho_1)} I(W)/\mathfrak{n} \\ &= V_6(\rho_1) + \sum_{k \geq 1} S_k \cdot V_2(\rho_1) + \mathfrak{n}/\mathfrak{n} \\ &= I(V_6(\rho_1) \oplus S_1 V_2(\rho_1))/\mathfrak{n} \\ &= I(V_6(\rho_1) \oplus V_3(\rho_2))/\mathfrak{n} \end{aligned}$$

同様に $W \in \mathbf{P}(V_3(\rho_2) \oplus V_5(\rho_2))$, $W \neq V_3(\rho_2), V_5(\rho_2)$ に対して $I(W)$ をと

り, W が $V_3(\rho_2)$ に近づく極限を考える. そうすると,

$$\begin{aligned}
 I_2(0)/n &= \lim_{W \rightarrow V_3(\rho_2)} I(W)/n \\
 &= V_3(\rho_2) + \sum_{k \geq 1} S_k \cdot V_5(\rho_2) + \sum_{k \geq 1} S_k \cdot V_3(\rho_2) + n/n \\
 &= I(V_3(\rho_2) + S_1 \cdot V_5(\rho_2))/n \\
 &= I(\{S_1 V_5(\rho_2)\}[\rho_1] \oplus V_3(\rho_2))/n \\
 &= I(V_6(\rho_1) \oplus V_3(\rho_2))/n
 \end{aligned}$$

ただしここで, $\{S_1 \cdot V_5(\rho_2)\}[\rho_1]$ は $S_1 V_5(\rho_2)$ の ρ_1 成分を表す. したがって, $I_1(\infty) = I_2(0)$ となる理由は

$$\begin{aligned}
 S_1 \cdot V_2(\rho_1) &= \{x, y\} \cdot V_2(\rho_1) = V_3(\rho_2), \\
 S_1 \cdot V_5(\rho_2) &= \{x, y\} \cdot V_5(\rho_2) = V_6(\rho_1) + \{F\} + GV_2(\rho_3)
 \end{aligned}$$

という等式の右辺に $V_3(\rho_2)$, $V_6(\rho_1)$ が出てくる点にある. これらの等式はテンソル積の分解と同等である. 実際 $\rho_{\text{nat}} = \{x, y\}$ だから, 表現 ρ_k の関係として表せば,

$$\rho_{\text{nat}} \otimes \rho_1 = \rho_2, \quad \rho_{\text{nat}} \otimes \rho_2 = \rho_1 + \rho_0 + \rho_3$$

となる. 右辺の余不変式環でのふるまいを問題にすれば F, G はゼロとして扱われるので, 余不変式環を見るということが, デインキン図形を計算するときの単位表現を無視する操作に対応することがわかる.

以上から2つの極限 $I_1(\infty), I_2(0)$ が一致するのは, 実は McKay の発見したテンソルの分解法則の図形がデインキン図形 D_5 だからにほかならない. つまり分解法則のデインキン図形が D_5 であるために例外集合 E が D_5 の形をとる, というシナリオになる. これはマッケイ対応の望ましいひとつの説明になるだろう.

余不変式環での右辺の計算は一般には表現のテンソル積とは異なるのだが, E_i と E_j の交点を求めるのに必要となる範囲では両者に差はない. とくに余不変式環の同次成分に含まれる表現の既約成分の重複度は 0, 1 または 2 に等しい. また, 2 に等しくなるのは次数が Coxeter 数 (D_5 の場合だと 8 に等しい) の $\frac{1}{2}$ のときに限る. この事実は ρ_{nat} をテンソルしたときの余不変式環における表現の分解の既約成分が, ほとんどの場合ただひと通りになることを意味するので重要である. これは直接計算によらず表現の分解規則だけから証明できる. (McKay, Springer, Shinoda による) この事実の証明はマッケイ対応の説明として本質的な部分でもあるが, ここでは省略したい.

3.8 一般の場合

以上の議論を一般の場合に書き直して、この報告を終えたいと思う。前節で定義した $V(I)$ を用いて Γ の既約表現の同値類 ρ, ρ' に対し、 E の部分集合をつぎのように定義する：

$$\begin{aligned} E(\rho) &:= \{I \in E; V(I) \supset \rho\} \\ P(\rho, \rho') &:= \{I \in E; V(I) \supset \rho \oplus \rho'\} \end{aligned}$$

定理 3.9 [ItoNakamura99]

Γ を $SL(2, \mathbb{C})$ の有限部分群とする。そのとき

- (1) $\text{Hilb}^\Gamma(\mathbb{C}^2)$ は \mathbb{C}^2/Γ の最小特異点解消である。
- (2) Γ の任意の単位表現と異なる既約表現 ρ に対して $E(\rho)$ は \mathbb{P}^1 と同型な E の既約成分であり、対応 $\rho \mapsto E(\rho)$ は Γ の単位表現以外の既約表現の同値類と E の既約成分の間の 1 対 1 写像を与える。
- (3) 異なる ρ と ρ' が表現のディンキン図形のなかで線分で結ばれているときのみ $P(\rho, \rho') \neq \emptyset$ となり、このとき $P(\rho, \rho')$ は 1 点となる。さらにそのとき $E(\rho)$ と $E(\rho')$ は $P(\rho, \rho')$ で横断的に交わる。また E の特異点はこのようにして得られる $P(\rho, \rho')$ に限る。したがって、ふたつのディンキン図形は一致する。

3.10 説明の概略 — まとめ

マッケイ対応の不思議さはふたつのディンキン図形が一致することだけではなかった。なぜ ρ_{nat} とのテンソル積をとり、 ρ_0 を除くとうまくいくのか？ これも一緒に答えたい問題である。本稿の説明の概略は (省略した部分もあわせると) 以下のようになる：

- (1) 最小特異点解消の例外集合 E の各点に余不変式環の部分表現が対応し、その対応により単位表現と異なる既約表現の同値類と E の既約成分の 1 対 1 対応を与える。
- (2) 表現のディンキン図形の線分に対して、既約成分の交点を構成できる。
- (3) E の中でふたつの既約成分の交点を計算するために極限をとると、余不変式環の中で 1 次式の空間 $\{x, y\}$ との積が自然に出てくる。
- (4) 不変式は表現 ρ_0 を定める。したがって、表現のディンキン図形を作るときの ρ_0 を除く操作は、余不変式環を考えることに相当する。
- (5) $\{x, y\}$ は ρ_{nat} と同じなので、もともと ρ_{nat} とのテンソル積は余不変式環での 1 次式の空間 $\{x, y\}$ との積にかなり近いものであるが、

- (6) 余不変式環の同次成分に含まれる表現の既約成分の重複度は $0, 1$ または 2 であって、 2 となるのは次数が Coxeter 数 (D_5 の場合だと 8 に等しい) の $\frac{1}{2}$ のときに限る。
- (7) したがって、余不変式環のなかで既約成分の交点に関する大切な部分では、 $\{x, y\}$ との積と ρ_{nat} とのテンソル積の既約表現への分解規則は一致する。
- (8) したがって、ふたつのディンキン図形が一致する。

3.11 その後の進展

群軌道のヒルベルト・スキームの研究は始まったばかりである。以下敬称を略してその後の進展を述べる。3次元の場合に筆者は筱田健一、五味靖(上智大学)と共同で研究をすすめている。また2次元で $\Gamma \subset \text{GL}(2, \mathbb{C})$ の場合には木藤理恵(北海道大学)、石井亮(京都大学)、Wunram や Riemenschneider(Hamburg)らの研究でほぼ完全になっている。3次元の場合ヒルベルト・スキームの親戚筋にあたるモジュライ空間は、石井亮によって研究が進められている。可換群の場合だけではあるが、これでもう十分複雑である。このほか伊藤由佳理(都立大学)-中島啓(京都大学) [ItoNakajima00], Reid(Warwick) とその弟子達 [BMK01] によっても、3次元の場合にマッケイ対応の一般化など詳細な研究が進められている。

参考文献

- [BMK01] T. Bridgeland, M. Reid, A. King, Mukai implies McKay : the McKay correspondence as an equivalence of derived categories, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001) 535-554.
- [Durfee79] A. Durfee, *Enseign. Math.* **25** (1979) 131-163.
- [GNS00] Y. Gomi, I. Nakamura, K. Shinoda, *Hilbert schemes of G-orbits in dimension three*, Special issue in honor of K. Kodaira, *Asian J. Math.* **4** (2000) 51-70.
- [GNS01] Y. Gomi, I. Nakamura, K. Shinoda, *Coinvariant algebras of finite subgroups of $\text{SL}(3, \mathbb{C})$* ,
- [GSV83] G. Gonzalez-Sprinberg, J. Verdier, *Construction Géométrique de la correspondance de McKay*, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* **16** (1983) 409-449.

- [Harada99] 原田耕一郎, モンスター - 群の広がり, 岩波書店 (1999).
- [ItoNakamura99] Y. Ito, I. Nakamura, *Hilbert schemes and simple singularities*, London Math. Lecture Notes. Series 264, Cambridge university press (1999) 151-233.
- [ItoNakajima00] Y. Ito and H. Nakajima, *McKay correspondence and Hilbert schemes in dimension three*, *Topology* 39 (2000) 1155-1191.
- [Kidoh98] R. Kidoh, *Hilbert schemes and cyclic quotient surface singularities*, to appear in *Hokkaido Math. J.*
- [McKay80] J. McKay, *Graphs, singularities, and finite group*, *Proc. Symp. Pure Math.*, AMS 37, 1980, pp.183-186.
- [N01] I. Nakamura, *Hilbert schemes of abelian group orbits*, *Jour. Alg. Geom.* 10 (2001) 757-779.
- [S87] T. A. Springer, *Poincaré series of binary polyhedral groups and McKay correspondence*, *Math. Ann.* 278 (1987) 99-116.