代数幾何学シンポジウム記録
2002年度 pp.24-27



# 曲線の数え上げについて

高橋 宣能

Abstract. 種数 0, 境界因子との交点の数を任意とした場合の相対 Gromov-Witten 不変量の系列を考えると、これは WDVV 方程式を満たす。さらに、このことの結果として同変局所 Gromov-Witten 不変量との符号を除いた一致が示される。

## 1. 種数 0 の相対 Gromov-Witten 不変量

コンパクト多様体 $X$ の中に超曲面 $Y$ を取るとき、$X\setminus Y$ の中の (アファイン) 曲線の数え上げを考えたい。

より正確には、対 $(X,Y)$ を考え、$X$ の中の (コンパクトな) 曲線について $Y$ との交わり方・接し方に条件を付けて数え上げを行なう。これが相対 Gromov-Witten 不変量である。

一例として、種数 0 の曲線 $C$ であって、$Y$ との交わり上に $C$ の素点が一つだけある (すなわち $\nu$ を $C$ の正規化写像として $\#\nu^{-1}(Y)=1$) という条件を考える。これはいわば「アファイン直線の数え上げ」を行なうことになる。

素朴には次のように考えられる。$C.Y=d$ となるものを考えることにして、1 点付き種数 0 安定写像 $(C,x_1,f)$ のモデュライ空間を下のようにあらわす。

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{x}_1 & \subset & \mathcal{C} & \xrightarrow{\tilde{f}} & X \\ & & \pi\downarrow & & \\ & & \bar{\mathcal{M}}_{0,1}(X) & & \end{array}$$

このとき $\tilde{\mathcal{E}}:=\pi_*(\tilde{f}^*\mathcal{O}_X(Y)\otimes(\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-d\tilde{x}_1)))$ は $\bar{\mathcal{M}}_{0,1}(X)$ 上の階数 $d$ のベクトル束になり、$Y$ を定める $\mathcal{O}_X(Y)$ の切断は $\mathcal{E}$ の切断を定める。これの零点集合がおよそ問題の集合になる。そこで $c_d(\mathcal{E})$ を考えればよいのではないか。

しかしこれでは $x_1$ を含む成分を丸ごと $Y$ の中に写すような写像も入ってしまい、あまり良い不変量にならない。

ここで Gathmann([Ga1]) による相対 Gromov-Witten 不変量の定義を述べる。これは代数的なものであるが、Ionel-Parker([IP]), Li-Ruan([LR]) による symplectic 幾何によるものもある。

まず、$Y$ は $X$ の非常に豊富な因子であると仮定しておく。そこで次の Cartesian diagram がある:

$$\begin{array}{ccc} Y\text{: very ample} & \subset & X\text{: smooth} \\ \cap & & \cap \\ H\text{: hyperplane} & \subset & \mathbb{P}^N. \end{array}$$

また、$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ を 0 以上の整数の組、$\beta\in H_2(X)$ としておく。このとき、$\bar{\mathcal{M}}^Y_\alpha(X,\beta)\subseteq\bar{\mathcal{M}}_{0,n}(X,\beta)$ を次を満たす $(C,x_1,\ldots,x_n,f)$ のなす部分集合と定義する:

(i) $\alpha_i>0$ ならば $f(x_i)\in Y$,
(ii) $A_0(f^{-1}Y)$ において $f^*Y\geq\sum\alpha_i x_i$.

あるいは言い換えると: $Z\subseteq f^{-1}Y$ を連結成分として、

- $Z$ は marked points $x_i$ 以外の点、または
- $Z = x_i$, $Z$ の近くで $f^*Y \geq \alpha_i x_i$, または
- $Z$ は曲線で、$Z$ と交わる成分を $C_1, \ldots, C_p$, $C_i \cap Z \in C_i$ における $(f|_{C_i})^*Y$ の重複度を $m_i$ として $Y.f_*Z + \sum m_i \geq \sum_{x_i \in Z} \alpha_i$.

すると次のことが成り立つ。

**命題 1.1.** $\bar{\mathcal{M}}_\alpha^H(\mathbb{P}^N, d)$ は、定義域 $C$ が既約 (すなわち $\mathbb{P}^1$ と同型)、かつその像が $H$ に含まれないようなものからなる集合の閉包である。

そこで次のように定義する。

**定義 1.2.** $\bar{\mathcal{M}}_\alpha^H(\mathbb{P}^N, d)$ を $\bar{\mathcal{M}}_n(\mathbb{P}^N, d)$ の被約閉部分スタックと見ることにより仮想基本類 $[\bar{\mathcal{M}}_\alpha^H(\mathbb{P}^N, d)]^{vir.}$ を定める。また、

$$[\bar{\mathcal{M}}_\alpha^Y(X, \beta)]^{vir.} := [\bar{\mathcal{M}}_\alpha^H(\mathbb{P}^N, Y.\beta)]^{vir.} \cap [\bar{\mathcal{M}}_n(X, \beta)]^{vir.}$$

と定める。

以下では特に $X = \mathbb{P}^2$, $Y = B$ を直線または非特異二次曲線とする。また、$c = 3 - \deg B$ と書くことにしておく。

$P \in H^4(\mathbb{P}^2)$, $Q \in H^2(B)$ をそれぞれ点の双対類とする。$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, ただしここでは $\alpha_i > 0$ とし、また $\sum \alpha_i = (\deg B).d$ を仮定する。$m$ を非負整数として $\bar{\mathcal{M}}_{(0^m)\cup\alpha}^B(\mathbb{P}^2, d)$ を考え、最初の $m$ 個の marking を $x_1, \ldots, x_m$, 残りを $y_1, \ldots, y_k$ と書くことにする。また $x_i$ における評価写像を $ev_i$ と書き、一方 $y_i$ における評価写像は $B$ への射と見て $\bar{ev}_i$ と書く。次のような不変量を定める。

**定義 1.3.**

$$M_\alpha := \left(\prod_{i=1}^{cd+k-1} ev_i^* P\right) [\bar{\mathcal{M}}_{(0^{cd+k-1})\cup\alpha}^B(\mathbb{P}^2, d)]^{vir.},$$

$$m_d^k := \frac{1}{k} \sum_{\sum \alpha_i = (\deg B)d} \left(\prod \alpha_i\right)^{-1} M_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}.$$

実際には $M_\alpha$ を扱いたいのだが、今のところその線形結合 $m_d^k$ を考えた方がうまくいっている。$m_d^k$ はおよそ「$B$ と $k$ 点で交わる有理曲線の集合の次数」と言っていいだろう。

## 2. Recursive formula

上と同様 $c = 3 - \deg B$ と書くことにして、次の漸化式が成り立つ。

**定理 2.1.** $cd + k \geq 4$ のとき $m_d^k$ は

$$\begin{aligned}
&(k-1) \sum_{k_1+k_2=k, d_1+d_2=d} \binom{k-2}{k_1-1} \times \\
&\times \left\{ \binom{cd+k-4}{cd_1+k_1-2} d_1^2 d_2^2 - \binom{cd+k-4}{cd_1+k_1-3} d_1 d_2^3 \right\} m_{d_1}^{k_1} m_{d_2}^{k_2} \\
+ \;&(\deg B) \sum_{k_1+k_2-1=k, d_1+d_2=d} \binom{k-1}{k_1-1} \times \\
&\times \left\{ \binom{cd+k-4}{cd_1+k_1-3} d_1 d_2^2 - \binom{cd+k-4}{cd_1+k_1-4} d_2^3 \right\} m_{d_1}^{k_1} m_{d_2}^{k_2}.
\end{aligned}$$

この証明には [KM] における $\mathbb{P}^2$ 上の有理曲線の数え上げの場合と同様の曲線の退化を用いる。いろいろなデータを一般の位置に取っておくと、次の 3 種類の退化が現れる:

(1) 既約なもの。
(2) 既約成分が 2 つあり、$B$ の外で交わるもの。
(3) 既約成分が 2 つあり、$B$ 上で交わるもの。

(1) のようなものの数は $M_\alpha$ の形に書け、漸化式の左辺を与える。(2) および (3) のようなものの数は重複度も考えると $M_{\dots}M_{\dots}$ および $\alpha_i M_{\dots}m_{\dots}$ の形となり、漸化式右辺の一つ目および二つ目の項を与える。

この計算にはモデュライ上の交点の多重度の解析が必要となるので Vakil の方法にしたがって次のように調べる:

- 射影により target が $(\mathbb{P}^1, pt.)$ の場合に帰着。
- target が曲線の場合、写像の変形空間は各分岐点での変形空間の積となる。そこで $z \mapsto z^d$ のような場合に帰着する。
- 具体的に式を書いて調べる。

## 3. 同変局所 Gromov-Witten 不変量、WDVV 方程式

ここでも $X = \mathbb{P}^2$, $B$ を 2 次以下の非特異曲線とする。
$V = \mathbb{L}(\mathcal{O}(-B)) \to \mathbb{P}^2$ を $\mathcal{O}_X(-B)$ に対応する直線束とする。
以下記号は [Gi1], [Gi2] にならうことにして、

- $X_{g,n,d}$ は $X$ への種数 $g$, 次数 $d$, $n$ 点付きの安定写像のモデュライ空間
- $e_1, \dots, e_n : X_{g,n,d} \to X$ は評価写像
- $V'_{g,n,d}$ は $X_{g,n,d}$ 上のベクトル束で、$f : C \to X$ に対応する点でのファイバーが $H^1(C, f^*V)$ であるようなもの

とする (といってもここでは $g = 0$ の場合しか使わないが)。$V$ には $S^1$ がスカラー倍で作用している。$S^1$-同変オイラー類を $Euler_{S^1}$ で表す。

**定義 3.1.** $d > 0$ のとき

$$\langle t_1, \dots, t_n \rangle_{n,d} := \int_{[X_{0,n,d}]} e_1^* t_1 . \cdots . e_n^* t_n . Euler_{S^1}(V'_{0,n,d}),$$

また

$$\langle t_1, \dots, t_n \rangle_{n,0} := \int_{[X_{0,n,0}]} e_1^* t_1 . \cdots . e_n^* t_n . Euler_{S^1}(V'_{0,n,0}) Euler_{S^1}(V)^{-1}$$

として

$$F(\lambda, t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{d=0}^{\infty} q^d \langle t, \dots, t \rangle_{n,d}$$

とおく。ただし $\lambda$ は $H^*_{S^1}(pt., \mathbb{C})$ の自然な生成元。さらに $H^*(X, \mathbb{C}(\lambda))$ 上の pairing

$$\langle \phi, \psi \rangle := \int_X \phi . \psi . Euler_{S^1}^{-1}(V)$$

を定め、$\langle , \rangle$ に関する gradient を $\nabla$ とする。

**定理 3.2** ([Gi1], WDVV 方程式。本当はもっと一般的). $H^*(X, \mathbb{C})$ の線形な座標 $(t_\alpha)$ をとるとき、

$$\langle \nabla F_{\alpha,\beta}, \nabla F_{\gamma,\delta} \rangle = \langle \nabla F_{\alpha,\delta}, \nabla F_{\gamma,\beta} \rangle.$$

ただし、$f_\alpha$ は $\partial f / \partial t_\alpha$ を意味する。

今の場合、$L$ を直線の類、$P$ を点の類として $t = t_0.1 + t_1.L + t_2.P$ と書き、$b := \deg B$ とすると

$$\begin{aligned} F(\lambda, t) &= \frac{1}{6}(b^2\lambda^{-3}t_0^3 + 3b\lambda^{-2}t_0^2t_1 + 3\lambda^{-1}t_0^2t_2 + 3\lambda^{-1}t_0t_1^2) \\ &\quad + \sum_{d>0} q^d e^{dt_1} \sum_n \langle P^n \rangle_{n,d} \frac{t_2^n}{n!}, \end{aligned}$$

また $n_d^i \in \mathbb{Q}$ を使って

$$\sum_n \langle P^n \rangle_{n,d} \frac{t_2^n}{n!} = \sum_i n_d^i \frac{\lambda^i}{i!} \frac{t_2^{(3-b)d+i}}{((3-b)d+i)!}$$

と書ける。$n_d^0$ が通常の局所 Gromov-Witten 不変量である。

ここで $\alpha = \beta = 2, \gamma = \delta = 1$ として WDVV 方程式を書き下すと

$$F_{222} = \lambda(F_{112}^2 - F_{122}F_{111}) + b(F_{222}F_{111} - F_{122}F_{112})$$

となる。これを展開すると前節の recursive relation とほぼ同じものになり、次のことがわかる。

**定理 3.3.**

$$m_d^k = (-1)^{(\deg B).d+k} n_d^{k-1}.$$

これは相対不変量と局所不変量の間のある種の双対性と見られる。

## References

[CH] Caporaso, L., and Harris, J.: Counting plane curves of any genus. Invent. Math. **131** no. 2, 345–392 (1998)

[CKYZ] Chiang, T.-M., Klemm, A., Yau, S.-T., and Zaslow, E.: Local mirror symmetry: calculations and interpretations. Adv. Theor. Math. Phys. **3** no. 3, 495–565 (1999)

[Ga1] Gathmann, A.: Absolute and relative Gromov-Witten invariants of very ample hypersurfaces. Preprint, math.AG/9908054

[Ga2] Gathmann, A.: Relative Gromov-Witten invariants and the mirror formula. Preprint, math.AG/0009190

[Gi1] Givental, A.: Equivariant Gromov-Witten invariants. Int. Math. Res. Not. no. 13, 613–663 (1996)

[Gi2] Givental, A.: Elliptic Gromov-Witten invariants and the generalized mirror conjecture. In *Integrable systems and algebraic geometry (Kobe/Kyoto, 1997)*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 107–155 (1998)

[IP] Ionel, E., and Parker, T.: Relative Gromov-Witten Invariants. Preprint, math.SG/9907155

[KM] Kontsevich, M., and Manin, Y.: Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry. Commun. Math. Phys., **164** no. 3, 525–562 (1994)

[LR] Li, A., and Ruan, Y.: Symplectic surgery and Gromov-Witten invariants of Calabi-Yau 3-folds I. Preprint, math.AG/9803036

[Ta1] Takahashi, N.: Mirror symmetry and $\mathbb{C}^\times$. Proc. Amer. Math. Soc. **129** no. 1, 29–36 (2001)

[Ta2] Takahashi, N.: Log Mirror Symmetry and Local Mirror Symmetry. Commun. Math. Phys. **220** no. 2, 293-299 (2001)

[V] Vakil, R.: Counting curves on rational surfaces. Manuscr. Math. **102** no. 1, 53-84 (2000)

739-8526 東広島市鏡山 1-3-1 広島大学大学院理学研究科数学専攻

*E-mail address*: takahasi@math.sci.hiroshima-u.ac.jp