代数幾何学シンポジウム記録
2002年度 pp.16-23

Elliptic fibrations and Lagrangian fibrations

松下大介

北海道大学理学部数学教室
E-mail Address matusita@math.sci.hokudai.ac.jp

1 はじめに

表題の Lagrangian fibration 及びその関連する概念ををまず定義する。

定義 1.1 正規 *Kähler* 空間 X が *symplectic variety* とは X が次の二つの条件を満たすときを言う。

(1) X の非特異部分 X_{smooth} 上に非退化二形式 ω が存在する。

(2) ある特異点解消 $\eta : Y \to X$ があり、ω の引き戻し $\eta^*\omega$ は Y 全体に d-閉な正則二形式として延長される。

定義 1.2 X が *irreducible symplectic variety* とは、X がコンパクトな *symplectic variety* で、さらに

(1) $\mathrm{codim}(X_{\mathrm{sing}}) \geq 4$.

(2) $\dim H^{2k-1}(X, \mathcal{O}_X) = 0, \quad \dim H^{2k}(X, \mathcal{O}_X) = 1, \quad (1 \leq k \leq \dim X)$

を満たすときを言う。

注. X が非特異のとき、上記の定義は irreducible symplectic manifold と同値である。

定義 1.3 (X, ω) を *symplectic variety* とする。固有全射写像 $f : (X, \omega) \to S$ が *Lagrangian fibration* とは f の一般ファイバー F の非特異部分に ω を制限したとき零となり、$\dim F = (1/2) \dim X$ となるときを言う。

注.　定義からは f の一般ファイバーは正規多様体であることしか判らないが、実際は複素 torus となる。(Liouville の定理)

irreducible symplectic variety のもっとも簡単な例としては $K3$ 曲面があげられ、また Lagrangian fibration のもっとも簡単な例としては $K3$ 曲面 S の楕円ファイバー構造 $\pi : S \to \mathbb{P}^1$ や Abel 曲面からの楕円ファイバー構造などがある。この S を用いて次のような例を考える。

$$\pi' : \mathrm{Hilb}^2 S \to S^{(2)} \to (\mathbb{P}^1)^{(2)} \cong \mathbb{P}^2$$

ここで $*^{(2)}$ は対称積であり、$\mathrm{Hilb}^2 S$ は $S^{(2)}$ を特異点解消したものである。すると $\mathrm{Hilb}^2 S$ は irreducible simplectic variety となり、π' は Lagarangian fibration となる。現在知られている具体例を見る限りでは irreducible symplectic variety または Lagrangian fibration は $K3$ 曲面やその上の楕円ファイバー構造とよく似た性質を持つ。その一方で、知られている具体例はいずれも何らかの形で $K3$ 曲面もしくは Abel 曲面と関係がある。そのため $K3$ 曲面または Abel 曲面の楕円ファイバー構造と似た性質を持つことはある意味当然と言えないこともないのだが、それを一歩押し進めて、次の仮説を提唱したい。

作業仮説 1.4 X を *irreducible symplectic variety* とし $f : X \to S$ を *Lagrangian fibration* とする。すると f は $K3$ 曲面もしくは *Abel* 曲面上の楕円ファイバー構造と多くの類似点を持つ。

この作業仮説の中で f が Lagrangian fibration が持つ場合だけを考えるのは何故か、という疑問がわくが、以下のような結果 ([7, Theorem 2], [8, Theorem]) がある。

定理 1.5 (X, ω) を射影的 *irreuducible symplectic variety* とし、$f : X \to S$ を正規多様体間の写像で $0 < \dim S < \dim X$ を満たすものとする。このとき、f は *Lagrangian fibration* となる。

上記定理より Lagrangian fibration だけを考えれば良い。

2 得られた結果

作業仮説 1.4 の元に研究を進めた結果、現在までに以下の結果を得た。

定理 2.1 $f: X \to S$ を *Lagrangian fibration* とする。S が非特異のとき、以下の同形が成り立つ。

$$R^i f_* \mathcal{O}_X \cong \Omega^i_S.$$

つまり、高次順像は局所自由となる。

注. $f: X \to S$ が非特異多様体の間の射影的写像であるとき、f の discriminant locus が正規交叉因子であれば $R^k f_* \mathcal{O}_X$ は局所自由であることが知られている。この定理ははじめに S が曲線で f が半安定退化の場合に証明され、その後 Kollár [6, Theorem 2.6]、中山 [11, Theorem 2]、森脇 [10, Theorem 2.4] らによって現在の形に拡張された。一般に Lagrangian fibration の discriminant locus は正規交叉ではないが、それでも $R^1 f_* \mathcal{O}_X$ が局所自由であるということは f のファイバーがコホモロジー的にかなり良い性質を持つと期待される。

定理 2.1 の応用としては次のようなものがある。

系 2.2 $f: X \to S$ を *irreducible symplectic variety* の $0 < \dim S < \dim X$ なる正規多様体への全射写像とする。S が非特異とすると S のホッジ数は射影空間に等しい。

注 系 2.2 に対してはより強く $S \cong \mathbb{P}^n$ となることが期待されるが、f が section を持つ場合は宮岡 [3, Theorem 9.2] により $S \cong \mathbb{P}^n$ となることが示されている。

系 2.3 $M(2,0,2n)$ を $K3$ 曲面 S 上の階数 2、$c_1 = 0$、$c_2 = 2n$ である *torsion free sheaf* の *moduli* とする。すると $M(2,0,2n)$ の双有理同値なモデルで *irreducible symplectic variety* となるものがある。

注 irreducible symplectic manifold があまり研究されてこなかった一つの理由として、例が非常に少ないという点があげられる。実際、1980 頃に藤木先生、Beauville 先生が [1] において二つの系列を構成してから、それ以外のものが O'Grady により発見されるまでに 17 年という年月が必要であった。しかも O'Grady [12] によって発見された新しい例は 10 次元と 6 次元にしか存在しない。そこで、特異点を許して考えることにより、 O'Grady が得たものが孤立した存在ではなく系列をなしていることを示したい。上記の系はその第一歩である。

系 2.4 X を $2n$ 次元 *irreducible symplectic variety* とし、$f: X \to \mathbb{P}^n$ を *Lagrangian fibration* とする。また、X の倉西族 $\mathcal{X} \to S$ の中に超曲面 T があり、次の可換図式

が成立する。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \times_S \mathcal{T} & \to & \mathbb{P}^n_{\mathcal{T}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T} & = & \mathcal{T} \end{array}$$

注　知られている irreducible symplectic variety の具体例は全て $\mathbb{P}^n$ 上の Lagrangian fibration を持つことがわかっている。このことと、系 2.4 ををあわせると irreducible symplectic variety でファイバー構造を持つものはその倉西空間の中で余次元 1 の族をなすことが判る。これは $K3$ 曲面の小平の定理、$K3$ 曲面で楕円ファイバー構造を持つものは倉西空間の中で超曲面の族をなす、のひとつの高次元化とみなせる。

3　系の証明

系 2.2 の証明　[6, Corollary 3.2] より次の関係式が成立する。

$$h^k(X, \omega_X) = \sum_{p+q=k} h^q(S, R^p f_* \omega_X). \tag{1}$$

定理 2.1 および $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$ より, 上式の右辺は S のホッジ数の和となる。X は irreducible symplectic manifold なので

$$h^k(X, \mathcal{O}_X) = h^0(X, \Omega^k_X) = \begin{cases} 0 & k \equiv 1 \pmod 2 \\ 1 & k \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

以上の式から系 2.2 を得る。 □

系 2.3 の証明　[13, 3.3] より、S を適当なものに取れば、$M(2,0,2n)$ と双有理同値な多様体 X で Lagrangian fibration $X \to \mathbb{P}^n$ を持つものが取れる。これに系 2.2 の証明中の関係式 (1) を逆に使うと X のコホモロジーが計算でき、$h^i(X, \mathcal{O}_X)$ は双有理不変量なので、系の主張を得る。 □

系 2.4 の証明　$L := f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ とおく。[4, 1.14] より、倉西空間の超曲面 $\mathcal{T}$ と $\mathcal{X} \times_S \mathcal{T}$ 上の line bundle $\mathcal{L}$ で $\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_0} \cong L$ を満すものが存在する。$\mathcal{X}_s$ で倉西族の s におけるファイバーを表し、$\mathcal{L}_s$ で $\mathcal{L}$ の $\mathcal{X}_s$ への制限を表わす。定理 2.1 より

$$H^i(\mathbb{P}^n, R^j f_* L) = H^i(\mathbb{P}^n, R^j f_* \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = H^i(\mathbb{P}^n, \Omega^j_{\mathbb{P}^n}(1)).$$

よって $i + j > 0$ なれば $H^i(\mathbb{P}^n, R^j f_* L) = 0$ となる。Leray spectral sequence より $i > 0$ であれば $\dim H^i(X, L) = 0$ となる。$\dim H^i(\mathcal{X}_s, \mathcal{L}_s)$ は S 上の上半連続関数なの

で、$i>0$ ならば $R^i\pi_*\mathcal{L}=0$ である。ゆえに $\pi_*\mathcal{L}$ は局所自由であり、$\dim H^0(X,L)=\dim H^0(\mathcal{X}_s,\mathcal{L}_s)=n+1$ となる。線型系 $|L|$ は自由なので $|\mathcal{L}_s|$ も自由となる。従って $\mathcal{X}_s$ から $\mathbb{P}^n$ 上への写像が存在し、これは [8, Theorem 1] により Lagrangian fibration となる。 □

4 定理 2.1 の証明の概略

命題 4.1 $f:(X,\omega)\to S$ を *Lagrangian fibration* とし, X、S を共に非特異、f を *smooth* と仮定する。このとき

$$R^1f_*\mathcal{O}_X\cong\Omega^1_S$$

が成立する。

証明. 次の exact sequence を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} 0\to & T_{X/S} & \to & T_X & \to & f^*T_S & \to 0 \\ & & & \downarrow\omega & & & \\ 0\to & f^*\Omega^1_S & \to & \Omega^1_X & \to & \Omega^1_{X/S} & \to 0. \end{array}$$

[9, Theorem 2] より f のすべてのファイバーはLagrangian submanifold である。よって ω は同形

$$f^*T_S\cong\Omega^1_{X/S}$$

を与える。この同形の direct image を取り、$\Omega^1_{X/S}$ と $R^1f_*\mathcal{O}_X$ が互いに双対であることを考えると、同形

$$R^1f_*\mathcal{O}_X\cong\Omega^1_S$$

を得る。 □

補題 4.2 $f:(X,\omega)\to S$ を *Lagrangian fibration* とし、X、S は射影的かつ S は非特異とする。このとき $R^if_*\mathcal{O}_X$ は *reflexive* である。

証明. X の特異点解消を $\eta:Y\to X$ とする。[2, Proposition 1.3] より X は高々有理特異点しか持たないので、$R^if_*\mathcal{O}_X$ と $R^i(f\circ\eta)_*\mathcal{O}_Y$、及び $R^if_*\omega_X$ と $R^i(f\circ\eta)_*\omega_Y$ はそれぞれ同形である。さて [6, Corollary 3.9] より $R^i(f\circ\eta)_*\mathcal{O}_Y$ は torsion sheaf と torsion free sheaf の直和で書け、torsion free part は reflexive である。また [5, Theorem 2.1] より $R^1(f\circ\eta)_*\omega_Y$ は torsion free である。ω が同形 $\mathcal{O}_X\cong\omega_X$ を定め

ることから、$R^i(f\circ\eta)_*\mathcal{O}_Y \cong R^i(f\circ\eta)_*\omega_Y$。よって $R^i(f\circ\eta)_*\mathcal{O}_Y$ は reflexive となり、$R^if_*\mathcal{O}_X$ もそうなる。 □

注. 定理 2.1 の主張は射影的かつ proper な写像について成り立つべき性質のものであるが、上の命題の証明で使用した Kollár の結果の元となる次の定理がネックとなり、X が射影的という条件をはずすことができない。

定理 4.3 $f: X \to S$ を射影多様体の間の全射写像とする。X が非特異であれば、

$$Rf_*\omega_X \sim_{\text{q.i.s.}} \sum R^if_*\omega_X[i]$$

が成立する。

この定理も射影的かつ proper な写像について成り立つべきであるが、著者はこの定理がこれ以上拡張されているかどうか知らない。もしこの定理の拡張をご存じの方がおられたら教えて頂ければ幸である。

定理 2.1 の証明の概略. $f: X \to S$ を定理の仮定を満たす Lagrangian fibration とする。f の一般ファイバーは非特異なので、f の discriminant locus を考えることができ、それを D で表す。命題 4.1 から、次の同形を得る。

$$R^1f_*\mathcal{O}_X|_{S\setminus D} \cong \Omega^1_{S\setminus D} \tag{2}$$

補題 4.2 より、$R^1f_*\mathcal{O}_X$ は reflexive なので、上記同形を S の余次元 1 の点まで延長すれば、定理は従う。ここで、同形が延長出来ることを示すのに、次の二つの命題を使う。

命題 4.4 *$f: X \to S$ を射影多様体の間の Lagrangian fibration とし、S を非特異と仮定する。このとき、写像*

$$R^1f_*\mathcal{O}_X \to \Omega^1_S$$

が存在し、これは同形 (2) の延長になっている。

命題 4.5 *$f: X \to S$ を射影多様体間の Lagrangian fibration とし、S を非特異と仮定する。このとき次の三つの条件を満たす S の開集合 U が存在する。*

(1) $\operatorname{codim}(S\setminus U) \geq 2$

(2) $R^1f_*\mathcal{O}_X|_U$ は局所自由

(3) $\wedge^k(R^1f_*\mathcal{O}_X|_U) \cong R^kf_*\mathcal{O}_X|_U$

この二つの命題の証明は少し複雑なのでここでは省略する。興味のある方は私のホームページ http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/papers.html をご覧ください。さて、これらの命題を仮定して定理を示すことにする。$n = \dim S$ とする。命題 4.4 から写像

$$R^1 f_* \mathcal{O}_X \to \Omega_S^1$$

を得るが、この写像の U への制限の n 階の wedge 積を取ると、命題 4.5 より自明でない写像 $R^n f_* \mathcal{O}_X|_U \to \Omega_U^n$ を得る。補題 4.2 より、この写像は S 全体に延長される。一方、[5, Corollary 7.6] より同形 $R^n f_* \mathcal{O}_X \cong \omega_S$ が存在する。従って $\wedge^n R^1 f_* \mathcal{O}_X|_U$ は Ω_U^n と同形であり、これから同形

$$R^1 f_* \mathcal{O}_X|_U \cong \Omega_U^1$$

を得る。これと命題 4.5 より、

$$R^k f_* \mathcal{O}_X|_U \cong \Omega_U^k$$

を得るが、再び補題 4.2 より、$R^k f_* \mathcal{O}_X$ は reflexive なので上記の同形は S 全体まで延長され、定理を得る。 □

参考文献

[1] A. Beauville, *Varie'te's Kählериennes dont la premie're classe de Chern est nulle.* J. Differential Geom. **18** (1983), no. 4, 755–782.

[2] A. Beauville, *Symplectic singularities*, Invent. Math., **139**, (2000), 541–549.

[3] K. Cho, Y. Miyaoka and N.I. Shepherd-Barron, *Characterization of a projective n-space and applications to complex symplectic manifolds* , in *Higher dimensional birational geometry* , Adv. Stud. Pure Math., **35**, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2002), 1–88.

[4] D. Huybrechts, *Compact hyperkähler manifolds: basic results*, Invent. Math., **135**, (1999), 63–113.

[5] J. Kollár, *Higher direct images of dualizing sheaves I*, Ann. of Math., **123**, (1986), 11–42.

[6] ______, *Higher direct images of dualizing sheaves II*, Ann. of Math., **124** (1986), 171–202.

[7] D. Matsushita, *On fibre space structures of a projective irreducibe symplectic manifold*, Topology, **38** (1999), 79-83.

[8] ______, *Addendum to: On fibre space structures of a projective irreducible symplectic manifold*, Topology, **40** (2001), 431–432.

[9] ______, *Equidimensionarity of Lagrangian fibrations on holomorphic symplectic manifolds*, Math. Res. Letters, **7** (2000), 389–391.

[10] A. Moriwaki, *Torsion freeness of higher direct images of canonical bundles*, Math. Ann., **276** (1987), 385–398.

[11] N. Nakayama, *Hodge filtrations and the higher direct images of canonical sheaves*, Invent. Math., **85**, (1986), 217–221.

[12] G. O'Grady, *Desingularized moduli spaces of sheaves on a $K3$*. J. Reine Angew. Math. **512** (1999), 49–117.

[13] K. Yoshioka, *Twisted stability and Fourier-Mukai transform*, math.AG/0106118,