代数幾何学シンポジウム記録
2002年度 pp.7-15

ADE 型随伴商写像の相対 de Rham コホモロジー[1]

吉永正彦 (Masahiko Yoshinaga)
京都大学数理解析研究所 (D·1)
email address: yosinaga@kurims.kyoto-u.ac.jp

1 Introduction

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の ADE 型単純リー環 $\mathfrak{g}$ に対して, その随伴群作用 $G \curvearrowright \mathfrak{g}$ に関する categorical quotient map $\chi : \mathfrak{g} \longrightarrow S := \mathfrak{g}//\mathrm{ad}(G)$ を随伴商写像と呼ぶ. 本稿ではこの写像に関する 2 次の相対 de Rham コホモロジー $\mathrm{H}^2(\chi_*\Omega^\bullet_{\mathfrak{g}/S})$ の構造, コスタント・キリロフ形式の役割と底空間 S のベクトル場 Der_S の作用 ∇ (Gauss-Manin 接続) を調べる.

動機は斎藤恭司の原始形式の理論をリー群論的に扱うことである. 原始形式の理論 ([Sa1]) を詳しく書くことは出来ないが, その主張によると, 孤立特異点を持つ超曲面 X_0 の半普遍変形 $X \xrightarrow{\phi} S$

$$
\begin{array}{ccc}
X_0 & \subset & X \\
\downarrow & & \downarrow \phi \\
0 & \in & S
\end{array}
$$

を考えると, 相対 de Rham コホモロジー $\mathrm{H}^*(\phi_*\Omega_{X/S})$ やパラメータ空間 S が様々な構造 (Gauss-Manin 接続, Hodge filtration, higher residue pairing, 平坦構造) を持ち, 特に, Der_S での微分によって全てのコホモロジー類を生成するある特別な元 (原始形式) が存在する. 一方, 一番単純な特異点のクラスである単純特異点 (ADE 型特異点) に関しては, その半普遍変形をリー群論的に構成することができる. 正確には, 単純リー環の随伴商写像 $\chi : \mathfrak{g} \to S$ をあるアフィン部分空間 (subregular transversal slice) $X \subset \mathfrak{g}$ に制限することによって単純特異点の半普遍変形族が得られるのである ([Br1], [Sl1]).

単純特異点に対する原始形式の理論をリー群論的な立場から見たらどうなっているのだろうか?

半単純リー環の随伴軌道にはコスタント・キリロフ形式 ζ があるが, 軌道上の閉 2 次微分形式であることから, ζ は 2 次の相対 de Rham コホモロジーの元だとみなせる. これを X に制限すると, 単純特異点の変形族の相対 de Rham コホモロジーの元が得られるが, 山田 ([Ya]) によって, これが (定数倍を除いて)ADE 型特異点に対応する原始形式であることが証明されている. しかし, 原始形式そのものがコスタント・キリロフ形式の制限であることが分かっても, 原始形式の理論全体, 特に相対 de Rham コホモロジーに現れる豊富な構造とリー群論的な世界の関係はまだよく分かっていない.

χ の一般ファイバーは, 旗多様体の余接束と微分同相なので, 2 次のコホモロジーは, 自然にカルタン部分代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ と同型である. 一方 $\chi|_X$ の一般ファイバーの 2 次のコ

[1]代数幾何学城崎シンポジウム, 2002 年 10 月 22 日

ホモロジーも, $\mathfrak{h}$ と同型である (より精密には, 消滅サイクルがルート格子と同型となる) ことが知られている. このことから, 埋め込み $X \hookrightarrow \mathfrak{g}$ の引き起こす 2 次の相対 de Rham コホモロジーの制限写像

$$\mathrm{H}^2(\chi_*\Omega^\bullet_{\mathfrak{g}/S}) \longrightarrow \mathrm{H}^2\left((\chi|_X)_*\Omega^\bullet_{X/S}\right) \tag{1}$$

が同型であることが予想される. (1) が同型であることが実際に証明できれば, 随伴商写像 χ の相対 de Rham コホモロジー自体が様々な面白い構造を持つことが期待される.

(1) の右辺は $\zeta|_X$ を微分することによって, "ある種の" ベクトル場と $\mathrm{H}^2\left((\chi|_X)_*\Omega^\bullet_{X/S}\right)$ の同型が言えているので, (1) の左辺が同じ性質を持つことを示せば十分である. そのために, まず左辺の $\mathrm{H}^2(\chi_*\Omega^\bullet_{\mathfrak{g}/S})$ の $\mathcal{O}_S$ 加群としての構造, 及びベクトル場 Der_S の作用の様子を不変式論を使って, 詳しく調べる.

2 準備

この節では随伴商写像 $\chi : \mathfrak{g} \to S$ の相対 de Rham コホモロジーを扱う際に使う不変式論の結果と有限鏡映群の鏡映面に接触するベクトル場について必要な事項をまとめる.

2.1 G 作用と相対 de Rham コホモロジー

連結コンパクトリー群が作用している空間の de Rham コホモロジーを計算する際には, その群作用で不変な微分形式からなる subcomplex のコホモロジーを計算すれば良いのだが, 次はその相対 de Rham コホモロジー版である.

定理 2.1 ([Ve]) G は連結な簡約代数群 $(/\mathbb{C})$ でアフィン多様体 X へ作用している. Y もアフィン多様体で $f : X \to Y$ は G 不変写像とする. この時, 相対 de Rham complex $f_*\Omega^\bullet_{X/Y} := f_*\left(\frac{\Omega^\bullet_X}{f^{-1}\Omega^1_Y \wedge \Omega^{\bullet-1}_X}\right)$ の中で G 不変な元全体からなる subcomplex を $f_*\Omega^{\bullet,G}_{X/Y}$ とすると $f_*\Omega^{\bullet,G}_{X/Y} \to f_*\Omega^\bullet_{X/Y}$ は擬同型となる, つまりコホモロジーをとると同型が得られる,

$$\mathrm{H}(f_*\Omega^{\bullet,G}_{X/Y}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}(f_*\Omega^\bullet_{X/Y}).$$

□

我々が扱う随伴商写像 χ の場合には,

$$\mathrm{H}\left(\chi_*\Omega^{\bullet,G}_{\mathfrak{g}/S} = \frac{\chi_*\Omega^{\bullet,G}_{\mathfrak{g}}}{\chi_*\chi^{-1}\Omega^1_S \wedge \chi_*\Omega^{\bullet-1,G}_{\mathfrak{g}}}\right) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}(\chi_*\Omega^\bullet_{\mathfrak{g}/S}). \tag{2}$$

となるので, 次に $\mathfrak{g}$ 上の G 不変微分形式全体の集合 $\Omega^{\bullet,G}_{\mathfrak{g}}$ を調べる.

2.2 Chevalley の制限定理の一般化

$\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ を固定し, $H \subset G$ を対応する極大トーラス, $\mathfrak{g}$ のルート分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ $(\Phi \subset \mathfrak{h}^\vee)$ と置き, W をワイル群とする. さらに I をキリング形式として, $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ を

$$I(h, [e_\alpha, e_{-\alpha}]) = \alpha(h)\ ,\ \forall h \in \mathfrak{h}.$$

となるように固定する.

$\mathfrak{g}$ 上の G 不変な多項式 $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ に対して, f を $\mathfrak{h}$ に制限すると明らかに $f|_\mathfrak{h}$ は $\mathrm{N}_G(H)$ 不変となる. $N_G(H)/Z_G(H) \cong W$ なので, $\mathfrak{h}$ への制限によって

$$\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G \longrightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$$

なる写像を得るが, これが同型になるというのが古典的な Chevalley の制限定理であった. この制限写像を通すことによって, $\mathfrak{g}$ 上の G 不変式環の構造が $\mathfrak{h}$ 上の W 不変式環に帰着されるのである. ここでは多項式だけでなく, $\mathfrak{g}$ 上の G 不変な微分形式なども扱いたいので, A. Broer[Bro] に従って, より一般的な次の共変式の枠組で考える.

定義 2.2 M を有限次元 G 加群とするとき, $\mathfrak{g}$ から M への多項式写像全体, 及び $\mathfrak{g}$ から M への G 同変な写像全体をそれぞれ,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mor}(\mathfrak{g}, M) &:= \mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes_\mathbb{C} M,\\
\mathrm{Mor}_G(\mathfrak{g}, M) &:= \{\phi \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{g}, M) |\ \phi(\mathrm{ad}(g)x) = g\cdot\phi(x),\ g \in G, x \in \mathfrak{g}\}\\
&\quad \left(= (\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes_\mathbb{C} M)^G\right),
\end{aligned}$$

とおく. □

次に $\phi \in \mathrm{Mor}_G(\mathfrak{g}, M)$ を $\mathfrak{h}$ に制限することを考える. $t \in H, h \in \mathfrak{h}$ に対して,

$$t\cdot\phi(h) = \phi\left(\mathrm{ad}(t)h\right) = \phi(h)$$

より, $\phi(h) \in M^H$ となることが分かる. 同様に $\phi|_\mathfrak{h} : \mathfrak{h} \to M^H$ が W 同変であることも分かり, 制限写像

$$\rho_M : \mathrm{Mor}_G(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow \mathrm{Mor}_W(\mathfrak{h}, M^H)\ ,\ \phi \longmapsto \phi|_\mathfrak{h} \tag{3}$$

を得る. M が自明な G 加群 $\mathbb{C}$ の時に, 上の写像 ρ_M が同型になることを主張しているのが, Chevalley の制限定理である. カルタン部分代数の density から, ρ_M の単射性が直ちに導かれるが, 一般に ρ_M は全射にならない. しかし次の全射性の判定条件が知られている.

定理 2.3 ([Bro]) 制限写像

$$\rho_M : \mathrm{Mor}_G(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow \mathrm{Mor}_W(\mathfrak{h}, M^H)$$

が同型になるための必要十分条件は, M を $\mathfrak{h}$ に関してウェイト分解した時, そのウェイトとして 2α（$\alpha \in \Phi$ は $\mathfrak{g}$ のルート）が現れないことである. (この条件を満たす表現を Broer は **「小さい表現」(small representation)** と呼んでいる.) □

我々は $\mathfrak{g}$ 上の微分形式に対して, この結果を用いたいのだが, $\Omega_{\mathfrak{g}}^p = \mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes \overset{p}{\wedge} \mathfrak{g}^\vee \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes \overset{p}{\wedge} \mathfrak{g}$ なので, $M = \overset{p}{\wedge} \mathfrak{g}$ の場合を考えれば良い.

補題 2.4 $\mathfrak{g}$ が単純リー環の時,

(i) 随伴表現 $\mathfrak{g}$ は小さな表現である.

(ii) $\overset{2}{\wedge} \mathfrak{g}$ が小さい. $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ は ADE 型.

証明 (i):ルートが他のルートの 2 倍にならないという有名な事実を言い換えたもの.
(ii):まず $\overset{2}{\wedge} \mathfrak{g}$ のウェイトが

$$\{0\} \cup \Phi \cup \{\alpha + \beta | \alpha, \beta \in \Phi, \alpha \neq \beta\}.$$

で与えられることに注意する. ADE 型の場合は, 全てのルートの長さが等しいことを思い出すと, $\alpha, \beta \in \Phi, \alpha \neq \beta$ に対して,

$$|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta| = 2|\alpha|$$

なので, $\overset{2}{\wedge} \mathfrak{g}$ は小さい. 逆は分類論を使う. □

注意 2.5 ADE の場合でも 3 次以上の外積は小さい表現ではない.

以下 $\mathfrak{g}$ は ADE 型単純リー環とすると, 以上をまとめて次の同型を得る.

$$\rho_2 : \Omega_{\mathfrak{g}}^{2,G} \xrightarrow{\cong} \left(\mathbb{C}[\mathfrak{h}] \otimes (\overset{2}{\wedge} \mathfrak{g})^H \right)^W$$

さらにここで, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$ ($\mathfrak{h}^\perp = \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ はキリング形式 I に関する $\mathfrak{h}$ の直行補空間) と分解する. これは $\mathfrak{h}$ の regular な点において, χ のファイバー方向とそれに直行する方向に分けることに対応している. 相対微分形式の定義と有限鏡映群不変な微分形式に関する Solomon の結果 (定理 2.6) から 2 次の相対微分形式が

$$\Omega_{\mathfrak{g}}^{2,G} \cong \Omega_{\mathfrak{g}/S}^{2,G} \oplus \chi^* \Omega_S^2$$

$$\rho_2 : \Omega_{\mathfrak{g}/S}^{2,G} \xrightarrow{\cong} \left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi+} \mathbb{C}[\mathfrak{h}] \cdot e_\alpha \wedge e_{-\alpha} \right)^W \tag{4}$$

と記述できることが分かる. ちなみにこの同型を使うとコスタント・キリロフ形式 ζ は

$$\rho_2(\zeta) = \sum_{\alpha\in\Phi^+} \frac{e_\alpha \wedge e_{-\alpha}}{\alpha} \tag{5}$$

と表される (定数倍は無視している).

2.3 有限鏡映群とベクトル場

この節では有限鏡映群の不変式論と, 鏡映面に接触したベクトル場の構造について必要なことをまとめる.

V を内積 I を持った実 ℓ 次元ベクトル空間とする. このとき, $O(V, I)$ の既約な有限部分群 W で, 直行鏡映変換で生成 (有限鏡映群) される群を考える. W のなかの各直行鏡映変換の鏡映面 $H \subset V$ を集めたものを $\mathcal{A}$ で表し, 各 $H \in \mathcal{A}$ に対して, その定義式 $\alpha_H \in V^\vee$ $(\mathrm{Ker}(\alpha_H) = H)$ を固定しておく. Chevalley によって, V 上の W 不変式環が ℓ 個の代数的に独立な斉次多項式 $P_1, P_2, \cdots, P_\ell \in \mathbb{R}[V]^W$ で生成されることが証明されている. ここで次数を $\deg P_1 \le \deg P_2 \le \cdots \le \deg P_\ell$ としておくと, 次が成り立つ,

$$2 = \deg P_1 < \deg P_2,\ \deg P_{\ell-1} < \deg P_\ell. \tag{6}$$

$\pi : V \to S := V//W = \mathrm{Spec}\mathbb{R}[V]^W$ を categorical quotient map とする. π の Jacobian は $(x_1, \cdots, x_\ell \in V^\vee$ を V の座標系とする) 鏡映面の定義式の積

$$\frac{\partial(P_1, \cdots, P_\ell)}{\partial(x_1, \cdots, x_\ell)} \doteq Q := \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H \tag{7}$$

になる. また V 上の W 不変微分形式については,

定理 2.6 ([So]) V 上の微分形式で, W 不変なものは S 上の微分形式の引き戻しである. つまり

$$\Omega_V^{\bullet, W} = \pi^* \Omega_S^\bullet.$$

□

次に鏡映面に多重に接する V 上のベクトル場を定義する.

定義 2.7 ([Te1]) 非負整数 m に対して, 接触度数 m で各鏡映面に接するベクトル場全体の集合を

$$\mathbb{D}^m(\mathcal{A}) := \{\delta \in \mathrm{Der}_V \mid \delta\alpha_H \in \alpha_H^m \cdot \mathbb{R}[V] \textit{ for all } H \in \mathcal{A}\}$$

で定義する. □

この接触度数によって, filtration $\mathrm{Der}_V = \mathbb{D}^0(\mathcal{A}) \supset \mathbb{D}^1(\mathcal{A}) \supset \cdots$, が定義される. δ が W 不変ベクトル場の場合は H に関する鏡映変換が $\delta\alpha_H$ の符号を変えることから, $\mathbb{D}^{2m}(\mathcal{A})^W = \mathbb{D}^{2m+1}(\mathcal{A})^W$ となることを注意しておく.

後にカルタン部分代数上のベクトル場の加群と相対 de Rham コホモロジーの同型を示すのだが, 相対 de Rham コホモロジーには Gauss-Manin 接続としてベクトル場が作用している. 次の定義は対応するベクトル場の接続である.

定義 2.8 接続 $\nabla : \mathrm{Der}_V \times \mathrm{Der}_V \to \mathrm{Der}_V$ を $\delta_1, \delta_2 \in \mathrm{Der}_V$, $\delta_2 = \sum_{i=1}^{\ell} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ に対し,

$$\nabla_{\delta_1}\delta_2 := \sum_{i=1}^{\ell}(\delta_1 f_i)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

と定義する. またはこの接続は $\alpha \in V^\vee$ に対して

$$(\nabla_{\delta_1}\delta_2)\alpha = \delta_1\delta_2\alpha \tag{8}$$

を満たすことでも特徴づけられる. □

(7) から $\frac{\partial}{\partial P_1}, \frac{\partial}{\partial P_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial P_\ell}$ は鏡映面にそって極をもった V 上の有理ベクトル場とみなせるが, 特に (6) の最高次の生成元が一つだけであるという事実から, ベクトル場 $D := \frac{\partial}{\partial P_\ell}$ は定数倍を除いて一意的に決まる. これを**原始ベクトル場**と呼ぶ ([Sa3]). 接続 ∇ を通して原始ベクトル場と接触度数 filtration は密接に関わっている.

補題 2.9 ([Yo]) ∇_D はベクトル場の接触度数を丁度 2 減らす. すなわち, $\delta, \delta' \in \mathrm{Der}_V$ が $\nabla_D\delta' = \delta$ を満たしているとき, $\alpha = \alpha_H$, $(H \in \mathcal{A})$ に対して, 次が同値,

$$\delta\alpha \in \alpha^m \cdot \mathbb{R}[V] \Longleftrightarrow \delta'\alpha \in \alpha^{m+2} \cdot \mathbb{R}[V].$$

□

定理 2.10 ([Sa2], [Te2]) $k \geq 1$ に対して,

(i) $\nabla_{\frac{\partial}{\partial P_i}}(\mathbb{D}^{2k+1}(\mathcal{A})^W) \subset \mathbb{D}^{2k-1}(\mathcal{A})^W$, $i = 1, 2, \cdots, \ell$.

(ii) $\nabla_D : \mathbb{D}^{2k+1}(\mathcal{A})^W \longrightarrow \mathbb{D}^{2k-1}(\mathcal{A})^W$ は全単射.

(iii) $\mathbb{D}^{2k-1}(\mathcal{A})^W$ はランク ℓ の自由 $\mathbb{C}[V]^W$ 加群.

□

3 Finite covering.

相対 de Rham コホモロジー $\mathrm{H}^2(\Omega^{\bullet,G}_{\mathfrak{g}/S})$ を調べるために, 次の diagram

$$\begin{array}{ccc} X := G/H \times \mathfrak{h} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \mathfrak{g} \\ \mathrm{pr}\downarrow & & \downarrow\chi \\ \mathfrak{h} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{h}/W \cong S \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc} (g[H], h) & \longmapsto & \mathrm{ad}(g)h \\ \downarrow & & \downarrow \\ h & \longmapsto & \overline{h} \end{array}\right). \tag{9}$$

を考える. この図式より, 問題の相対 de Rham コホモロジーを $\mathrm{H}^2(\Omega^{\bullet,G}_{\mathfrak{g}/S}) \xrightarrow{\tilde{\pi}^*} \mathrm{H}^2(\Omega^{\bullet}_{X/\mathfrak{h}})$ と埋め埋め込むことができる. $X := G/H \times \mathfrak{h}$ を考えることの利点は, $X/\mathfrak{h}$ が自明な

fibration なので, 相対 de Rham コホモロジーは簡単に扱うことができ, また $\mathfrak{g}/S$ は大体 $X/\mathfrak{h}$ を W で割ったものとみなせることから, $\mathrm{H}^2(\Omega^{\bullet,G}_{\mathfrak{g}/S})$ を $\mathrm{H}^2(\Omega^{\bullet,G}_{X/\mathfrak{h}})^W$ と比較することで調べられる.

$\mathfrak{g}/S$ の場合と同様に, G 不変な相対微分形式 $\Omega^{\bullet,G}_{X/\mathfrak{h}}$ を考えれば十分なのだが, $X/\mathfrak{h}$ のファイバーが等質空間になっているので, G 不変な切断は, 実は基点での値によって自動的に決まってしまう. $\mathrm{T}^*_{[H]}(G/H) \cong \mathfrak{h}^\perp$ なので,

$$\begin{aligned} \Omega^{2,G}_{X/\mathfrak{h}} &\cong \mathbb{C}[\mathfrak{h}] \otimes \left(\overset{2}{\wedge}\, \mathrm{T}^*_{[H]}(G/H) \right)^H \\ &\cong \left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathbb{C}[\mathfrak{h}] \cdot e_\alpha \wedge e_{-\alpha} \right) \end{aligned}$$

となる. この同型と (4) をあわせ, $\tilde{\pi}$ の鏡映面 $\mathfrak{h}_\alpha := \{\alpha = 0\}$ に沿った退化の様子を調べることにより, $\tilde{\pi}$ での引き戻しが具体的に次のように書き下せる.

定理 3.1 $\tilde{\pi}^* : \Omega^{2,G}_{\mathfrak{g}/S} \longrightarrow \Omega^{2,G}_{X/\mathfrak{h}}$ は次で与えられる.

$$\sum_{\alpha\in\Phi^+} \alpha f_\alpha \cdot e_\alpha \wedge e_{-\alpha} \longmapsto -\sum_{\alpha\in\Phi^+} \alpha^3 f_\alpha \cdot e_\alpha \wedge e_{-\alpha}. \tag{10}$$

□

次に $X/\mathfrak{h}$ の相対 de Rham コホモロジーについてだが, これも実質的にはファイバーのコホモロジーの話で, よく知られている. カルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ と G/H の 2 次のコホモロジーの同型対応から次の同型が得られる.

定理 3.2 ([BH]) $\mathrm{Der}_\mathfrak{h} := \mathbb{C}[\mathfrak{h}] \otimes \mathfrak{h}$ を $\mathfrak{h}$ 上のベクトル場全体の集合とする. この時, 次の写像が $\mathrm{Der}_\mathfrak{h}$ と相対 de Rham コホモロジーの同型を引き起こす.

$$\mu : \mathrm{Der}_\mathfrak{h} \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^2(\Omega^{2,G}_{X/\mathfrak{h}}),\ \delta \longmapsto \mu(\delta) := \sum_{\alpha\in\Phi^+} (\delta\alpha) \cdot e_\alpha \wedge e_{-\alpha}$$

ただし $(\delta\alpha)$ はベクトル場 δ に関する関数 α の微分である. □

ここで同型が "微分" で与えられていることから, これが $X/\mathfrak{h}$ の Gauss-Manin 接続に関する共変微分と解釈することができる. つまり, コスタント・キリロフ形式 (5) の $\tilde{\pi}$ での引き戻し (の (-1) 倍) を $\tilde{\zeta} := -\tilde{\pi}^*\zeta$ とおくと, (5) と定理 3.1 より, $\tilde{\zeta} := \sum_{\alpha\in\Phi^+} \alpha \cdot e_\alpha \wedge e_{-\alpha} \in \mathrm{H}^2(\Omega^{2,G}_{X/\mathfrak{h}})$ となり, 上の同型は

$$\nabla_\bullet[\tilde{\zeta}] : \mathrm{Der}_\mathfrak{h} \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^2(\Omega^{2,G}_{X/\mathfrak{h}}) \ :\ \delta \longmapsto \nabla_\delta[\tilde{\zeta}] \tag{11}$$

で与えられることが分かる.

以上をまとめて次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Der}_{\mathfrak{h}} & \xrightarrow[\cong]{\nabla_{\bullet}[\zeta]} & \mathrm{H}^2(\Omega^{\bullet,G}_{X/\mathfrak{h}}) & & \\ \cup & & \cup & & \\ \mathrm{Der}^W_{\mathfrak{h}} & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{H}^2(\Omega^{\bullet,G}_{X/\mathfrak{h}})^W & \xleftarrow{\tilde{\pi}^*} & \mathrm{H}^2(\Omega^{\bullet,G}_{\mathfrak{g}/S}) \end{array}$$

定理 3.1 より, $\delta \in \mathrm{Der}^W_{\mathfrak{h}}$ に対して, $\nabla_\delta[\tilde{\zeta}]$ が $\Omega^{2,G}_{\mathfrak{g}/S}$ の $\tilde{\pi}$ での引き戻しとなるための必要十分条件は, $\delta\alpha$ が α^3 で割りきれること, つまり $\delta \in \mathbb{D}^3(\mathcal{A})$ であることが分かる (ここで, 十分性は ADE 型以外では成り立たないことに注意しておく). しかしこの時 $\omega \in \Omega^{2,G}_{\mathfrak{g}}$ が

$$\nabla_\delta[\tilde{\zeta}] = \tilde{\pi}^*\omega$$

を満たしているとしても, $\bar{\omega} \in \Omega^{2,G}_{\mathfrak{g}/S}$ が相対閉微分形式になるとは限らない. ω が閉, つまり $\nabla_\delta[\tilde{\zeta}] \in \tilde{\pi}^*\left(\mathrm{H}^2(\Omega^{\bullet,G}_{\mathfrak{g}/S})\right)$ となるために $\delta \in \mathbb{D}^3(\mathcal{A})^W$ が満たすべき条件を調べる. (8) より,

$$\begin{aligned} d\nabla_\delta[\tilde{\zeta}] &= \sum_{\alpha\in\Phi^+} d(\delta\alpha)\wedge(e_\alpha\wedge e_{-\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha\in\Phi^+}\sum_i \frac{\partial}{\partial P_i}(\delta\alpha)dP_i\wedge(e_\alpha\wedge e_{-\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha\in\Phi^+}\sum_i \left((\nabla_{\frac{\partial}{\partial P_i}}\delta)\alpha\right)dP_i\wedge(e_\alpha\wedge e_{-\alpha}) \\ &= \sum_i dP_i\wedge\sum_{\alpha\in\Phi^+}\left((\nabla_{\frac{\partial}{\partial P_i}}\delta)\alpha\right)\cdot(e_\alpha\wedge e_{-\alpha}). \end{aligned}$$

と変形される. ここで $\delta \in \mathbb{D}^3(\mathcal{A})^W$ だったので, 定理 2.10 より, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial P_i}}\delta \in \mathbb{D}^1(\mathcal{A})^W$. $\bar{\omega} \in \Omega^{2,G}_{\mathfrak{g}/S}$ が閉になるためには,

$$\sum_{\alpha\in\Phi^+}\left((\nabla_{\frac{\partial}{\partial P_i}}\delta)\alpha\right)\cdot(e_\alpha\wedge e_{-\alpha}) = \tilde{\pi}^*\eta_i\ ,\ \eta_i \in \Omega^{2,G}_{\mathfrak{g}/S}\ (i=1,\cdots,\ell)$$

という η_i が存在しなければなければならない. 定理 3.1 より, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial P_i}}\delta \in \mathbb{D}^3(\mathcal{A})^W$ でなければならないが, 再び定理 2.10 より, これは, $\delta \in \mathbb{D}^5(\mathcal{A})^W$ を意味する. よってコスタント・キリロフ形式の微分によって,

$$\mathbb{D}^5(\mathcal{A})^W \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^2(\Omega^\bullet_{\mathfrak{g}/S}).\ :\ \delta \longmapsto \nabla_\delta[\zeta]$$

なる同型を得る. □

ADE 型以外の場合, 高次のコホモロジーについては今のところ分かっていない.

参考文献

[BH] A. Borel, F. Hirzebruch, Characteristic classes and homogeneous spaces. I. Amer. J. Math. **80** (1958) 458–538.

[Br1] E. Brieskorn, Singular elements of semi-simple algebraic groups. Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), **2**, pp. 279–284.

[Bro] A. Broer, The sum of generalized exponents and Chevalley's restriction theorem for modules of covariants. Indag. Math. (N.S.) **6** (1995), no. 4, 385–396.

[Sa1] K. Saito, Period mapping associated to a primitive form. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **19** (1983), 1231–1264.

[Sa2] K. Saito, On a linear structure of the quotient variety by a finite reflexion group. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **29** (1993), no. 4, 535–579.

[Sa3] K. Saito, Finite reflexion group and related geometry (A motivation to the period mapping for primitive forms). preprint, 2000

[Sl1] P. Slodowy, Simple singularities and simple algebraic groups. Lecture Notes in Mathematics,**815**. Springer (1980)

[So] L. Solomon, Invariants of finite reflection groups. Nagoya Math. J. **22** (1963) 57–64.

[Te1] H. Terao, Multiderivations of Coxeter arrangements. Invent. Math. **148**(2002), 659–674.

[Te2] H. Terao, The Hodge filtration and contact-order filtration of derivations of Coxeter arrangements. (math.CO/0205058) preprint

[Ve] J. Vey, Un problème de cohomologie relative. Ark. Mat. **15** (1977), no. 1, 21–31.

[Ya] H. Yamada, Lie group theoretical construction of period mapping. Math. Z. **220** (1995), no. 2, 231–255.

[Yo] M. Yoshinaga, The primitive derivation and freeness of multi-Coxeter arrangements. Proc. Japan acad. Ser. A Math. Sci **78**(2002),no.7, 116–119.