代数幾何学シンポジウム記録
2003年度 pp.120-126

On the invariant ring of two binary forms

内藤 弘嗣 (名古屋大学多元数理科学研究科)

1 Introduction and motivation

2 個の斉次多項式

$$f = \sum_{i_1+\cdots+i_r=m} a_I {x_1}^{i_1} {x_2}^{i_2} \cdots {x_r}^{i_r},$$

$$g = \sum_{j_1+\cdots+j_r=n} b_J {x_1}^{j_1} {x_2}^{j_2} \cdots {x_r}^{j_r},$$

を考える．ただし，$I = (i_1,\ldots,i_r)$, $J = (j_1,\ldots,j_r) \in {\mathbb{Z}_{\geq 0}}^r$, $1 \leq m < n$ とする．$S = \mathbb{C}[a_{m0\cdots0},\ldots,a_I,\ldots,a_{0\cdots0m},b_{n0\cdots0},\ldots,b_J,\ldots,b_{0\cdots0n}]$ を斉次多項式 f と g の係数で生成される多項式環とする．また $G := {\mathbb{G}_a}^{h^0(\mathbf{P}^{r-1},\mathcal{O}(n-m))}$ を加法群の直和とする．ここで群 G の多項式環 S への作用を次のように定義する．$(s_{n-m0\cdots0},\ldots,s_K,\ldots,s_{0\cdots0n-m})$ を群 G の元として，

$$\begin{cases} a_I & \mapsto & a_I, \\ b_J & \mapsto & b_J + \sum_{J-I=K\in{\mathbb{Z}_{\geq 0}}^r} s_K a_I. \end{cases}$$

例. $r=3, m=1, n=2$ のとき．

$$f = a_{100}x_1 + a_{010}x_2 + a_{001}x_3.$$

$$g = b_{200}{x_1}^2 + b_{110}x_1x_2 + b_{101}x_1x_3 + b_{020}{x_2}^2 + b_{011}x_2x_3 + b_{002}{x_3}^2.$$

$$G = {\mathbb{G}_a}^3 \curvearrowright S = \mathbb{C}[a_{100},a_{010},a_{001},b_{200},b_{110},b_{101},b_{020},b_{011},b_{002}].$$

$$f' := s_{100}x_1 + s_{010}x_2 + s_{001}x_3.$$

$$\begin{aligned} g + f'f &= (b_{200}+s_{100}a_{100}){x_1}^2 + (b_{110}+s_{010}a_{100}+s_{100}a_{010})x_1x_2 \\ &+ (b_{101}+s_{001}a_{100}+s_{100}a_{001})x_1x_3 + (b_{020}+s_{010}a_{010}){x_2}^2 \\ &+ (b_{011}+s_{001}a_{010}+s_{010}a_{001})x_2x_3 + (b_{002}+s_{001}a_{001}){x_3}^2. \end{aligned}$$

この例からわかるように、今考えている作用は群 G の元を係数とする斉次 $n-m$ 次多項式 f' を考えて, g に $f'f$ を加えることによって得られる作用である. 定義からイデアル $I=(f,g)\subset\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_r]$ はこの作用によって不変である. この作用による不変式環を S^G を調べたい.

研究の動機 1. 不変式論.
ヒルベルト [2] によって以下の定理が証明されている.

定理 1 簡約代数群が多項式環に作用しているとき, その不変式環は有限生成である.

作用している群が簡約代数群の場合は, この定理によって不変式環が有限生成であることが知られている. でも一般に簡約性をもたない群の場合は不変式環が有限生成になるかどうかわからず, ヒルベルト自身が十四問題として残している. ヒルベルトの十四問題に対しては次の永田 [4] の反例が有名である.

定理 2 $G={\mathbb{G}_a}^{13}$ のときに不変式環が有限生成でない作用が存在する.

永田の反例にでてくる作用に関しては, 向井 [3] が詳しく調べていて, 有限生成性の必要十分条件が分かっている. 今考えている作用は簡約性のない代数群による作用になっていて不変式環が有限生成になるかは知られていない.

動機 2. モジュライ理論.
幾何学的対象 Proj S^G (正確には不変式環は二重に次数づけされている) は何を表しているのか. これを考えるのは代数幾何学として意味のある問題だと思う. 作用の定義から分かるように, Proj $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_r]/I$ のモジュライ空間の双有理幾何学を考えることになる. 主定理の証明中に出てくるが, $\mathbb{P}^1$ 上の stable pair のモジュライにもなっていて, それを利用して不変式環の有限生成性を導く.

2 Construction of parameter space

行列 $M=(m_{K,J})$ を以下の様に定義する.

$$m_{K,J}=\begin{cases} a_{J-K} & \text{if} \quad J-K\in{\mathbb{Z}_{\geq 0}}^r, \\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

ただし, $J=(j_1,\ldots,j_r), K=(k_1,\ldots,k_r)\in{\mathbb{Z}_{\geq 0}}^r$ で $j_1+\cdots+j_r=n, k_1+\cdots+k_r=n-m$ とする. 指数 J,K には辞書式順序を入れておく. 行列 M のサイズは $(h^0(\mathbb{P}^{r-1},\mathcal{O}(n-m)),h^0(\mathbb{P}^{r-1},\mathcal{O}(n)))$ となる. ここからは $h^0(\mathbb{P}^{r-1},\mathcal{O}(*))$ を $h^0(*)$ と略記する.

例. $r=3, m=1, n=2$ のとき.

$$M=\begin{bmatrix} a_{100} & a_{010} & a_{001} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{100} & 0 & a_{010} & a_{001} & 0 \\ 0 & 0 & a_{100} & 0 & a_{010} & a_{001} \end{bmatrix}.$$

行列 M は a_I を $\mathbb{P}^{h^0(m)-1}$ の斉次座標と思うことにより, 自然に射

$$\varphi : \mathbb{P}^{h^0(m)-1} \longrightarrow \mathrm{Gr}(h^0(n-m), h^0(n))$$

を定める. 行列 M の $h^0(n-m)$ 次の小行列式に a_I の斉次 $h^0(n-m)$ 次式が全て出てくるので, この射 φ は埋め込みになっている. 直積

$$\mathbb{P}^{h^0(m)-1} \times \mathrm{Gr}(h^0(n-m)+1, h^0(n)),$$

の中で部分多様体 $X := \{(P,U) | \varphi(P) \subset U\}$ を考える. 第一成分への射影 $X \longrightarrow \mathbb{P}^{h^0(m)-1}$ は X の作り方より $\mathbb{P}^{h^0(n)-h^0(n-m)-1}$-束になっている. 行列 M に一行付け加えた新たな行列

$$M_b := \begin{bmatrix} & & M & & \\ & & & & \\ b_{n0\cdots0} & \cdots & b_J & \cdots & b_{0\cdots0n} \end{bmatrix}$$

を考える. $D_1, \ldots, D_l$ を行列 M_b の $h^0(n-m)+1$ 次の小行列式とする. すると直積

$$\mathbb{P}^{h^0(m)-1} \times \mathrm{Proj}\,\mathbb{C}[D_1, \ldots, D_l].$$

の中で, $\mathbb{P}^{h^0(m)-1}$ の斉次座標 a_I と小行列式 $D_k (1 \leq k \leq l)$ に出てくる a_I とを同一視することにより X は得られる. 定義した X と不変式環 S^G の関係は次の様である.

命題 3 $S^G \cong TC(X)$, ただし $TC(X) := \bigoplus_{L \in \mathrm{Pic}X} H^0(X, L)$.

命題3は次の補題を用いて証明される.

補題 4 $A = \mathbb{C}[a_{m0\cdots0}, \ldots, a_{0\cdots0m}, D_1, \ldots, D_l]$ を a_I と D_k で生成される可換環とする. そのとき $S^G \cong S \cap A[a_{m0\cdots0}{}^{-1}] \cong S \cap A[a_{0\cdots0m}{}^{-1}]$ となる.

補題4の証明. 記号が煩雑になるので $r=3, m=1, n=2$ のときだけ記す. 一般の場合の証明も全く同様の方法でできる. 行列

$$M_b = \begin{bmatrix} a_{100} & a_{010} & a_{001} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{100} & 0 & a_{010} & a_{001} & 0 \\ 0 & 0 & a_{100} & 0 & a_{010} & a_{001} \\ b_{200} & b_{110} & b_{101} & b_{020} & b_{011} & b_{002} \end{bmatrix}$$

において, D_1 を第 $1,2,3,4$ 列 からできる小行列式, D_2 を第 $1,2,3,5$ 列からできる小行列式, D_3 を第 $1,2,3,6$ 列からできる小行列式とし, $D_4,\dots,D_{15}$ を残りの小行列式とする. $A' = \mathbb{C}[a_{100}, a_{010}, a_{001}, D_1, D_2, D_3]$ を $a_{100}, a_{010}, a_{001}, D_1, D_2, D_3$ で生成される可換環とする. 部分環 $A'[{a_{100}}^{-1}] \subset S[{a_{100}}^{-1}]$ はアフィン多様体の射

$$\pi : \operatorname{Spec} S[{a_{100}}^{-1}] \longrightarrow \operatorname{Spec} A'[{a_{100}}^{-1}]$$

を導く. 群 $G = {\mathbb{G}_a}^3$ は自然に $\operatorname{Spec} S[{a_{100}}^{-1}]$, に作用している. 任意の点 $Q = (\alpha_{100}, \alpha_{010}, \alpha_{001}, d_1, d_2, d_3) \in \operatorname{Spec} A'[{a_{100}}^{-1}]$ に対して,

$$P := (\alpha_{100}, \alpha_{010}, \alpha_{001}, 0, 0, 0, {\alpha_{100}}^{-3} d_1, {\alpha_{100}}^{-3} d_2, {\alpha_{100}}^{-3} d_3) \in \operatorname{Spec} S[{a_{100}}^{-1}]$$

とすると, 明らかに $\pi(P) = Q$ となるので π は全射である. また $\operatorname{Spec} S[{a_{100}}^{-1}]$ の G-軌道は $(*,*,*,0,0,0,*,*,*)$ のなる点を唯一含むので, 任意の π のファイバーは G-軌道になっている. 以上より $S[{a_{100}}^{-1}]^G \cong A'[{a_{100}}^{-1}]$ となる. よって

$$S^G = S[{a_{100}}^{-1}]^G \cap S \cong A'[{a_{100}}^{-1}] \cap S = A[{a_{100}}^{-1}] \cap S.$$

$A[{a_{001}}^{-1}] \cap S$ についても全く同じ方法で証明できる. $\square$

補題 4 より, a_I, b_J に関して 0 でない斉次な元 $p \in S^G$ は定数倍を除いて正因子 $D \subset X$ を定める. よってそれは自然に $H^0(X, L)$ の元を定めている. この対応によって全座標環 $TC(X)$ と不変式環 S^G は同型になっている.

3 Stable pairs

E を $\mathbb{P}^1$ 上の階数 2 のベクトル束として, その次数 d を固定しておく. $\phi \in H^0(\mathbb{P}^1, E)$ を 0 でない大域切断とする.

定義 5 組 (E, ϕ) が, 任意の部分直線束 $L \subset E$ に対して,

$$\begin{cases} \deg L \le \frac{1}{2}\deg E - \frac{1}{2}\sigma & \text{if} \quad \phi \in H^0(L), \\ \deg L \le \frac{1}{2}\deg E + \frac{1}{2}\sigma & \text{if} \quad \phi \notin H^0(L), \end{cases}$$

を満たすとき σ-半安定といい, 不等式が等号を許さないとき σ-安定という.

Thaddeus [5] と Bertram [1] によって次のことが示されている.

定理 6 以下の (1), (2) を満たす図式が存在する.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& X_1 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "g_1"] & & X_2 \arrow[dl, "f_2"'] \arrow[dr, "g_2"] & & X_3 \arrow[dl, "f_3"'] & \cdots & X_{p-2} \arrow[dr, "g_{p-2}"] & & X_{p-1} \arrow[dl, "f_{p-1}"'] \arrow[dr, "g_{p-1}"] & \\
Y_1 & & Y_2 & & Y_3 & & & & Y_{p-1} & & Y_p
\end{tikzcd} \tag{D}$$

ただし $p = [\frac{d-1}{2}]$.
(1) X_i は $d-2i-2<\sigma<d-2i$ のときの σ-半安定な組 (E,ϕ) の非特異なモジュライ空間になっている. また Y_i は $\sigma = d-2i$ のときのモジュライ空間になっていて, 特に $Y_1 \cong \mathbb{P}^{d-2}$ である.
(2) $f_1 : X_1 \to Y_1$ は正規有理曲線 $C \subset Y_1 \cong \mathbb{P}^{d-2}$ に沿った blow up である. $g_1 : X_1 \to Y_2$ は C と 2 点で交わる直線 (2-secant line) の strict transform を 1 点につぶし, それ以外の部分では同型な写像である. $f_2 : X_2 \to Y_2$ は 2-secant line の像における g_1 とは違った方向への blow up である. $g_2 : X_2 \to Y_3$ は C と 3 点で交わる平面 (3-secant plane) の strict transform を 1 点につぶし, それ以外の部分では同型な写像である. $f_3 : X_3 \to Y_3$ は 3-secant plane の像における g_2 とは違った方向への blow up である. 以下 f_i, g_i は同様な写像である.

4 Main Theorem

この章では次の主定理を証明する.

定理 7 不変式環 S^G は $r=2$ のとき有限生成である.

証明. 2 個の斉次多項式

$$f = \sum_{i_1+i_2=m} a_{i_1 i_2} {x_1}^{i_1} {x_2}^{i_2},$$

$$g = \sum_{j_1+j_2=n} b_{j_1 j_2} {x_1}^{j_1} {x_2}^{j_2}$$

において 2 節で構成した $\mathbb{P}^{m-1}$-束 $X \to \mathbb{P}^m$ がある. 命題 3 より $TC(X) \cong S^G$ となっている.
Case 1. $n = m+1$ のとき.
定理 6 の図式 (D) を $d = m+n = 2m+1$ として適用すると,

$$\begin{tikzcd}
& X_1 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "g_1"] & & X_2 \arrow[dl, "f_2"'] \arrow[dr, "g_2"] & & X_3 \arrow[dl, "f_3"'] & \cdots & X_{m-2} \arrow[dr, "g_{m-2}"] & & X_{m-1} \arrow[dl, "f_{m-1}"'] \arrow[dr, "g_{m-1}"] & \\
Y_1 & & Y_2 & & Y_3 & & & & Y_{m-1} & & Y_m
\end{tikzcd}$$

となる. 定理 6 より $g_{m-1} : X_{m-1} \to Y_m \cong \mathbb{P}^m$ は $\mathbb{P}^{m-1}$-束になる. モジュライ空間 Y_m に対応するベクトル束は $E = \mathcal{O}(m) \oplus \mathcal{O}(m+1)$ であり, 大域切断は $\phi = (f, 0)$ である. ただし $0 \neq f \in H^0(\mathcal{O}(m))$. またモジュライ空間 X_{m-1} に対応するベクトル束は $E = \mathcal{O}(m) \oplus \mathcal{O}(m+1)$ であり, 大域切断は $\phi = (f, g)$, $0 \neq f \in H^0(\mathcal{O}(m))$, $0 \neq g \in H^0(\mathcal{O}(m+1))$ である. E の自己同型はまさしく最初に考えていた群の作用に

他ならないので, $X_{m-1} \cong X$ となる. 定理6より $X_1, \ldots, X_{m-1}$ は余次元1では同型なので

$$TC(X_1) \cong \cdots \cong TC(X_{m-1}) \cong TC(X) \cong S^G$$

となる. L_i, M_i を射 f_i, g_i を定める直線束とすると, $\mathbb{P}^1$-束

$$\mathbb{P}_i := \mathbb{P}(L_i \oplus M_i) \to X_i.$$

が定まる. l_i, M_i が base point free なので, 普遍直線束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_i}(1)$ も base point free になる. よって座標環

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}_i, \mathcal{O}(n))$$

は有限生成である. それを制限した環 $TC(X_i)|_{L_i\mathbb{Z}_{\geq 0} \oplus M_i\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ も有限生成であり, この様な i は有限個しかないので不変式環 S^G は有限生成である.
Case 2. $n - m > 1$ のとき.
図式 (D) を $d = m + n$ で適用する. 更にその図式を正規有理曲線 $C \subset Y_1 \cong \mathbb{P}^{m+n-2}$ の m-secant 多様体に制限した図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
& \widetilde{X}_1 \arrow[dl, "\widetilde{f}_1"'] \arrow[dr, "\widetilde{g}_1"] & & \widetilde{X}_2 \arrow[dl, "\widetilde{f}_2"'] \arrow[dr, "\widetilde{g}_2"] & & \widetilde{X}_3 \arrow[dl, "\widetilde{f}_3"'] & \cdots & \widetilde{X}_{m-2} \arrow[dr, "\widetilde{g}_{m-2}"] & & \widetilde{X}_{m-1} \arrow[dl, "\widetilde{f}_{m-1}"'] \arrow[dr, "\widetilde{g}_{m-1}"] & \\
\widetilde{Y}_1 & & \widetilde{Y}_2 & & \widetilde{Y}_3 & & & & \widetilde{Y}_{m-1} & & \widetilde{Y}_m
\end{tikzcd}$$

定理6より, 射 $\widetilde{g}_{m-1} : \widetilde{X}_{m-1} \to Y_m \cong \mathbb{P}^m$ は $\mathbb{P}^{m-1}$-束になっていて, モジュライ空間 $\widetilde{Y}_m$ に対応するベクトル束と大域切断は $E = \mathcal{O}(m) \oplus \mathcal{O}(n)$, $\phi = (f, 0), 0 \neq f \in H^0(\mathcal{O}(m))$ であり, モジュライ空間 $\widetilde{X}_{m-1}$ に対応するベクトル束と大域切断は $E = \mathcal{O}(m) \oplus \mathcal{O}(n)$ $\phi = (f, g), 0 \neq f \in H^0(\mathcal{O}(m))$, $0 \neq g \in H^0(\mathcal{O}(n))$ となる. よって $\widetilde{X}_{m-1} \cong X$ となり, Case1 と同じ議論により不変式環 S^G は有限生成となる. □
Thaddeus [6] による complete quadrics のモジュライの図式を用いて次の定理が証明できる.

定理 8 不変式環 S^G は $m = 1, n = 2$ のとき有限生成である.

参考文献

[1] A. Bertram, Stable pairs and log flips, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 62.1, 1997, 185-201.

[2] D. Hilbert, Über die theorie der algebraischen formen, Math. Ann., 36, 1890, 473-534.

[3] S. Mukai, Counterexample to Hilbert's fourteenth problem for three dimensional additive group, RIMS preprint 1343, Kyoto, 2001.

[4] M. Nagata, On the fourteenth problem of Hilbert, Internatinal Cong. Math., Edingburgh, 1958.

[5] M. Thaddeus, Stable pairs, linear systems and the Verlinde formula, Invent. math., 117, 1994, 317-353.

[6] M. Thaddeus, Complete collineations revisited, Math. Ann., 315, 1999, 469-495.