代数幾何学シンポジウム記録
2003年度 pp.98-108

Mixed twistor structure と harmonic bundle について

大阪市立大学数学教室・望月拓郎

0.1 初めに

城崎での代数幾何学シンポジウム講演の報告をします. 研究の背景・目標などの説明に重点を置きます. 筆者自身による研究のより詳しい内容は [4], [5] を御覧下さい. (ただし [4] はもう古いです.)

1 Introduction

1.1 Simpson の Meta-Theorem

研究の原理は, 要約すると次のようになります.

Principle 1.1 (Simpson's Meta-Theorem) *mixed Hodge structure* の理論は *mixed twistor structure* の理論に一般化されるはずである.

Simpson 自身は次のように述べています. ([9] 参照)

Meta-Theorem *If the words "mixed Hodge structure" (resp. "variation of mixed Hodge structure") are replaced by the words "mixed twistor structure" (resp. "variation of mixed twistor structure") in the hypotheses and conclusions of any theorem in Hodge theory, then one obtains a true statement. The proof of the new statement will be analogous to the proof of the old statement.*

Meta-Theorem として述べられていますが, それ自身の証明が意図されているわけではないので, 以下では研究の目標を示す原理とみなすことにします. また, variation of twistor structure (harmonic bundle) の研究では variation of Hodge の場合の証明をそのまま翻訳するわけにはいかない部分もあります. これについては後で触れたいと思います.

1.2 問題 (Hodge から Twistor へ)

Simpson の Meta-Theorem から生じる問題で筆者が興味を持っているのは, 大雑把にいうと次の対応を完成することです. (Twistor structure の定義は 2.1 節を参照. harmonic bundle の定義は 3.1 節を参照.)

	Hodge		Twistor
Vector space 上の構造	$\boxed{\text{Hodge structure}}$	$\longleftrightarrow$	$\boxed{\text{Twistor structure}}$
Local system 上の構造	Polarized variation of Hodge structure	$\longleftrightarrow$	harmonic bundle (Polarized variation of twistor structure)
Perverse sheaf 上の構造	Hodge module (by Morihiko Saito)	$\overset{??}{\longleftrightarrow}$	Twistor module? (partially) by Sabbah

Variation of Polarized Hodge structures と harmonic bundle の類似をより深く理解するために, Simpson は図の twistor structure と variation of polarized twistor structure を導入しました. この対応をより精密にし, Hodge について知られていることを Twistor の場合に示すことが目標となります. これは 'Hodge' が比較的狭いのに対して, 'Twistor' がかなり広い範囲のものを含むと考えられているので, 非常に意義のあることだと考えます. また, 問題としてそれほど自明ではありません. たとえば, Polarized variation of Hodge structures については以前から非常に詳しく調べられているのですが, そこで知られている証明を Polarized variation of twistor structures の場合にそのまま安直に翻訳して適用できるかというと, 必ずしもそうはいきません.

さらに, Simpson の Meta-Theorem によれば Hodge の話は Twistor の話に拡張されるはずですから, Morihiko Saito による Hodge module の理論を拡張することが自然な問題となります. この方向では Sabbah による仕事があります. すなわち, Sabbah は "pure twistor D-module" というものを導入し, Hard Lefschez Theorem や decomposition theorem などの望ましい性質を持つことを示しました.

2 Mixed Twistor structure

2.1 Mixed twistor structure の定義

以下では, $\mathbb{P}^1$ の 3 点 $0, 1, \infty$ は固定しておく.

Definition 2.1

(Pure twistor structure) $\mathbb{P}^1$ 上の *vector bundle* V *が* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ *の直和と同型の時,* V *は pure twistor structure of weight* n *と呼ばれる.*

(Mixed twistor structure) (V, W) *を* $\mathbb{P}^1$ *上の filtered vector bundle とする. 各* n *について,* $\mathrm{Gr}_n^W(V)$ *が pure twistor of weight* n *の時,* (V, W) *は mixed twistor structure と呼ばれる.*

Remark 2.1 $\mathbb{P}^1$ *上の vector bundle* V *が与えられると, 点* $1 \in \mathbb{P}^1$ *上の fiber* $V_{|1}$ *という vector space が得られます. この時,* V *を* $V_{|1}$ *上の '構造' とみなせます. この意味で, mixed twistor structure は vector space 上の '構造' とみなされます.*

2.2 Hodge structureとの比較

2.2.1 Twistor structure と Hodge structureの対応 (標語的に)

Mixed twistor structure は Mixed Hodge structure の下部にある構造として Simpson によって導入されました. その関係は標語的に言うと次のようになります.

$$\boxed{\text{Hodge structure}} = \boxed{\text{Twistor structure}} + \boxed{\text{Torus action}}.$$

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ は自然に $\mathbb{P}^1$ に作用します. mixed twistor structure (V, W) は $\mathbb{P}^1$ 上の filtered vector bundle でしたから, $\mathbb{C}^*$-作用の持ち上げを考えることができます. ですから, 上の等式は equivariant mixed twistor structure と mixed Hodge structure が対応する, ということを言っています.

この対応は filtered vector bundle に対する Rees bundle を考えることで与えられました. Pure の場合に, この対応をもう少し詳しく見ておくために, complex Hodge structure の定義を思い出しておきましょう.

Definition 2.2 (complex pure Hodge structure) *H を $\mathbb{C}$ 上の vector space, F, G を H の decreasing filtration とする. 次の条件が満たされる時, (H, F, G) は pure Hodge structure of weight n と呼ばれた.*

- *H は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間*
- *F, G は H 上の decreasing filtration であって, n-opposedness condition を満たす. すなわち,*

$$H = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}, \quad F^i = \bigoplus_{p \geq i} H^{p,q}, \quad G^j = \bigoplus_{q \geq j} H^{p,q}.$$

2.2.2 Hodge structure から Equivariant twistor structure を得る構成 (Rees bundle)

Pure Hodge structure から Pure twistor structure は次の手順で得られます. 混乱を避けるために, 複素平面 Spec $\mathbb{C}[\lambda]$ を $\mathbb{C}_\lambda$ であらわすことにします.

1. ベクトル空間 H より, $\mathbb{C}_\lambda^* := \mathbb{C}_\lambda - \{0\}$ 上の自明なベクトル束 $H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}_\lambda^*}$ が得られます. これは $\mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$-module としては, $H[\lambda, \lambda^{-1}]$ に対応しました. $\mathbb{C}_\lambda^*$ の $\mathbb{C}_\lambda^*$ への自然な作用があり, この作用は $H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}_\lambda^*}$ に自然に持ち上げられます.

2. F をベクトル空間 H の decreasing filtration とします. この時, $H[\lambda, \lambda^{-1}]$ の submodule が次のように与えられます.

$$\sum_p \mathbb{C}[\lambda] \cdot \lambda^{-p} \cdot F^p \subset H[\lambda, \lambda^{-1}].$$

これは $\mathbb{C}[\lambda]$ 上有限生成で torsion-free なので $\mathbb{C}_\lambda$ 上の vector bundle を与えます. この vector bundle を $\xi(H, F)$ であらわし, Rees bundle と呼びます. これは $\mathbb{C}_\lambda^*$ 上の vector bundle $H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}_\lambda^*}$ の $\mathbb{C}_\lambda$ 上の vector bundle への equivariant な延長を与えます. $\{0\}$ 上の fiber には F に付随する graded vector space $\mathrm{Gr}_F(H)$ があらわれます.

$$\begin{array}{ccccc} H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}_\lambda^*} & \subset & \xi(H, F) & \supset & Gr_F(H) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}_\lambda^* & \subset & \mathbb{C}_\lambda & \supset & \{0\} \end{array}$$

言い換えれば, $\mathrm{Gr}_F(H)$ を $\{0\}$ 上の fiber として付け加えることで, $H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*_\lambda}$ の equivariant な延長を与えていることになります.

3. 一般に, $\mathbb{C}$ 上の vector space H に二つの decreasing filtration F, G が与えられると, $\mathrm{Gr}_F(H)$, $\mathrm{Gr}_G(H)$ をそれぞれ0上の fiber, ∞ 上の fiber としてつけ加えることで, $\mathbb{P}^1$ 上の equivariant vector bundle $\xi(H, F, G)$ が得られます.

2. 3. の構成の例を見ておきましょう.

Example

$H := \mathbb{C}$, $F^p = H \supset F^{p+1} = 0$ の時, $\xi(H, F)$ は次のようになります.

$$\xi(H, F) = \sum_i \mathbb{C}[\lambda] \cdot z^{-i} \cdot F^i = \mathbb{C}[\lambda] \cdot \lambda^{-p} \cdot F^p = \mathcal{O}_{\mathbb{C}_\lambda}(p \cdot 0).$$

さらに $G^q = H \supset G^{q+1} = 0$ だとすると, $\xi(H, F, G) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(p \cdot 0 + q \cdot \infty)$ となります. この equivariant vector bundle を $\mathcal{O}(p, q)$ とあらわしましょう. torus action を忘れると, $\mathcal{O}(p+q)$ に同型になることに注意しましょう.

4. (H, F, G) が pure Hodge structure の時, $H = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$ という直和分解が得られ, 各 $H^{p,q}$ 上では F, G は上の **Example** のようになっています. したがって, 次の同型が得られます.

$$\xi(H, F, G) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(p, q) \simeq H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n).$$

すなわち, (H, F, G) が pure Hodge structure of weight n の時, Rees bundle $\xi(H, F, G)$ は pure twistor of weight n になっています.

2.2.3 Equivariant twistor structure から Hodge structure を得る構成

はじめに $\xi(H, F, G) \otimes \mathcal{O}(n, 0) \simeq \xi(H, F[n], G)$ に注意しましょう. ($\mathcal{O}(n, 0)$ に関しては, 上の **Example** を参照.) ここで, filtration $F[n]$ は $F[n]^i = F^{i-n}$ で与えられます. また, (H, F, G) が Hodge structure of weight m であることと, $(H, F[n], G)$ が Hodge structure of weight $m + n$ であることの同値性もすぐにわかります.

V を equivariant pure twistor of 0 だとします. この時, global section のなす vector space $H^0(\mathbb{P}^1, V)$ と $H := V_{|1}$ (点 $1 \in \mathbb{P}^1$ 上の fiber) の間には自然な同型があります. $H^0(\mathbb{P}^1, V)$ 上には自然に torus action が誘導されるので, weight decomposition が得られます. これが H の Hodge decomposition を与えます. そして, 二つの filtration F, G と同型 $V \simeq \xi(H, F, G)$ が得られます.

V を equivariant pure twistor of weight n の時には, $V \otimes \mathcal{O}(-n, 0)$ を考えることで, weight 0 の場合に帰着されます.

2.2.4 Fixed point としての Hodge structure

Hodge structure が equivariant twistor structure である, という事実は Hodge structure が torus action の fixed point とみなされることを意味します. すなわち, 'twistor 全体' には自然に torus action がはいりますが, この作用に関する不動点集合が 'Hodge 全体' に対応する, と見ることができます. Simpson の Meta-Theorem は不動点で成り立つことの多くが, 不動点以外の点でも成り立つことを主張している, と見ることもできます.

2.3 Meta-Theoremが成り立つ例

Meta-Theorem で成り立つことが期待されるのは, いわゆる weight の理論です. そのために, Twistor の場合に基本になるのは次のよく知られた事実です.

Lemma 2.1 *$n > m$ の時, $Hom(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(m)) = 0$.* ∎

これを用いると, 例えば次のような性質がわかります.

Lemma 2.2 *$(V^{(i)}, W^{(i)})$ $(i = 1, 2)$ を mixed twistor とし, morphism $f : V^{(1)} \longrightarrow V^{(2)}$ が filtration $W^{(i)}$ を保つとします. この時, f は $W^{(i)}$ に関して strict, すなわち, $f(W_h^{(1)}) = f(V^{(1)}) \cap W_h^{(2)}$ が成り立つ.* ∎

Remark 2.2 もちろん Hodge で上の Lemma に対応する主張が成り立つこともよく知られています.

これは mixed twistor structure の著しい性質です. 例えば, Lemma 2.2 の f に関して, $\mathrm{Im}(f)$ は自動的に $V^{(2)}$ の subbundle になることや, $\mathrm{Gr}^W(f)$ と f の rank の一致などがすぐに得られます.

filtration つきの vector space で考えると, このようなことは成り立ちませんでした. filtration つきの complex を考えると, Gr をとってから cohomology をとったものと, cohomology をとってから Gr をとったものは一般には同型ではなく, それらをつなぐものとして spectral sequence があらわれましたが, mixed twistor の category ではそのようなことは起こりません. 標語的に言うならば, mixed twistor では, weight filtration に関する Gr をとっても, 元のものとそれほど違わない, ということがいえます.

Simpson による次の定理も挙げておきます.

Theorem 2.1 *Mixed twistor structure の category は abelian* ∎

これは Deligne による ‘Mixed Hodge structure の category は abelian’ という定理の拡張になっていて, Meta-Theorem が成り立つ例になっています.

3 Harmonic bundle

Simpson が twistor structure を導入したのは, harmonic bundle と polarized variation of Hodge structures の関係をより深く理解するためでした. まず harmonic bundle について思い出しておきます.

3.1 定義

X を complex manifold, $(E, \overline{\partial}_E)$ を X 上の holomorphic vector bundle, θ を E の Higgs field とします. ここで Higgs field θ とは, $End(E) \otimes \Omega^{1,0}$ の holomorphic section で $\theta^2 = 0$ を満たすものでした.

h を $(E, \overline{\partial}_E)$ の hermitian metric とします. h と $\overline{\partial}_E$ から operator ∂_E が $\overline{\partial}_E h(u,v) = h(\overline{\partial}_E u, v) + h(u, \partial_E v)$ によって定まりました. 一方, h と θ から $\theta^\dagger$ が $h(\theta \cdot u, v) = h(u, \theta^\dagger \cdot v)$ という条件で定まりました. すると, E の connection $\mathbb{D}^1$ が次の条件で与えられます.

$$\mathbb{D}^1 := \overline{\partial}_E + \partial_E + \theta + \theta^\dagger.$$

Definition 3.1 $\mathbb{D}^1$ が *flat* の時, $(E, \overline{\partial}_E, h, \theta)$ を *harmonic bundle* と呼ぶ.

Remark 3.1 上の定義で考えている metric は pluri-harmonic metric と呼ばれるもので, もう少し弱い条件を満たすものとして harmonic metric と呼ばれるものがあります. すなわち, X を Riemannian manifold, rank r の L を X 上の flat bundle とします. この時 L に hermitian metric h をとると, X の universal covering から対称空間 $GL(r)/U(r)$ への写像が得られます. ($GL(r)$ の作用の分だけ ambiguity があります.) この写像が harmonic map の時, metric h は harmonic metric と呼ばれました. 考えたいのは pluri-harmonic metric の方ですから, 'harmonic bundle' よりは 'pluri-harmonic bundle' の方が名前として適切かもしれません.

harmonic metric と pluri-harmonic metric は別物ですが, X が compact Kahler の時には一致します. (Siu, Corlette, Simpson)

3.2 harmonic bundle に関してよく知られている結果

標語的には, 滑らかな代数多様体 X の上で次のような対応が成り立つと考えられています.

Topology		Differential geometry		Algebraic geometry
semisimple local system	$\longleftrightarrow$	harmonic bundle	$\longleftrightarrow$	stable Higgs bundle (Chern class が自明)

X が projective の場合には, 上の対応は完全に証明されていますが, quasi projective の場合には, まだ完全にはわかっているとはいえません.

3.2.1 Topology と Differential geometry

Corlette による古典的な結果によって, X が projective の時には semisimple local system の研究は harmonic bundle の研究に帰着されます.

Theorem 3.1 (Corlette) *X を projective manifold とし, L を local system とする. この時, L が semisimple であることと L 上に pluri-harmonic metric が存在することは同値である. (pluri-harmonic metric つきの local system は harmonic bundle と同値です.)*

ここで local system が semisimple とは, 自然に得られる X の基本群の表現が semisimple であるという意味です. この結果を quasi projective の場合に拡張する研究として, Jost-Zuo の結果が知られています.

Theorem 3.2 (Jost-Zuo) *X が quasi projective の時, L が semisimple であれば, L 上に pluri-harmonic metric が存在する.*

これは, L が semisimple local system の時に L 上の harmonic bundle としての構造の存在を意味します.

Remark 3.2 逆向きのことを言うには, 主張をもうすこし精密にする必要があります.

いずれにしろ, Corlette-Jost-Zuo の研究によって, かなり広い範囲の local system が harmonic bundle によってとらえられることが示されています. ですから, variation of Hodge について成り立つことを harmonic bundle に拡張する問題は非常に意義があると考えられます.

3.2.2 Algebraic geometry と Differential geometry

次の定理はSimpsonによって示されたHiggs bundleの場合のKobayashi-Hitchin correspondenceの一部です.

Theorem 3.3 *projective manifold X 上の Higgs bundle (E,θ) が stableであれば, (E,θ) の pluri-harmonic metric h が存在する.*

これをquasi projectiveに拡張するには, X のsmooth projective completion $\bar{X}$ で, $D=\bar{X}-X$ が normal crossing になっているようなものをとり, D における parabolic structure を考えて stable parabolic Higgs bundle に良い metric がとれるかどうかが問題になります. しかし, D が smooth の場合を除くと, 結果は知られていないようです. (D が smooth の時には, Simpson ($\dim X=1$) と Biquard ($\dim X$ は一般) によって, 完全に対応がつけられたと言えます.)

3.3 Variation of Hodge, variation of twistor, および harmonic bundle

Simpson は Variation of pure twistor structures (以下, VPTS と略記) とその polarization を導入し, weight 0 の VPTS が harmonic bundle に対応することを洞察しました. (weight は適当にずらせるので, VPTS が harmonic bundle に対応すると言えます.) VPTS の定義, harmonic bundle との対応について, ここでは詳しく述べず ([9], [5] を参照), 次の注意を述べるにとどめます.

Remark 3.3 E を X 上の C^{∞}-bundle とし, $\pi : X\times\mathbb{P}^1 \longrightarrow X$ を projection とし, pull back $\pi^{-1}(E)$ を考えます. 各点 $P\in X$ に対して, $\pi^{-1}(P)=\{P\}\times\mathbb{P}^1$ への $\pi^{-1}(E)$ の制限は trivial bundle $E_{|P}\times\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ に自然に同型であり, 特に pure twistor of weight 0 です. つまり, $\pi^{-1}(E)$ を $\left\{\pi^{-1}(E)_{|\pi^{-1}(P)}\,\middle|\,P\in X\right\}$ とみると, これは pure twistor of weight 0 の C^{∞}-family を与えていることになります.

E にさらに holomorphic structure $\overline{\partial}_E$, hermitian metric h と Higgs field θ が与えられて harmonic bundle になっていると, $\pi^{-1}(E)$ にある differential operator $\mathbb{D}$ が与えられ, 'polarized variation of pure twistor structures' になります. このように, X 上の variation of pure twistor structures を考える時は $X\times\mathbb{P}^1$ 上の vector bundle や operator を考えることに注意します.

4 漸近挙動の研究の方針

4.1 目標と困難

既に述べたように, Variation of polarized Hodge structures(以下 VPHS) で成り立つことを harmonic bundle の場合に示すというのが, 研究の一つの目標になります. 特に, VPHS の漸近挙動についての Cattani-Kaplan-Schmid や Kashiwara-Kawai の研究を harmonic bundle の場合に拡張することは非常に重要な問題であると考えます.

しかし, 彼等の議論を harmonic の場合にそのまま適用しようとしてもうまくいきません. 理由を二つ挙げておきます.

a. Hodge の場合には Schmid による nilpotent orbit theorem があり, variation of Hodge の asymptotic behaviour の研究は nilpotent orbit の asymptotic behaviour の研究に (ある意味で) 帰着されました. そして, これがその後の研究の出発点になりました. 一方, harmonic の場合に

は nilpotent orbit theorem をどう定式化すれば良いかもそれほど明らかではありません. (筆者は知りません.)

Remark 4.1 harmonic bundle の asymptotic behaviour については, かなりよく理解できるようになったと思っているので harmonic bundle の場合の nilpotent orbit theorem が必要だと考えているわけではありません.

b. また, 一般には Higgs field の residue 固有値や, parabolic structure が非自明である, という事実も問題を複雑にします.
Example $\Delta^* = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z| < 1\}$ とおきます. $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ とし, 次のようにおきます.

$$E = \mathcal{O}_{\Delta^*} \cdot e, \quad \theta = \alpha \cdot \frac{dz}{z}, \quad h(e,e) = |z|^{-a}.$$

この時, (E, h, θ) は Δ^* 上の harmonic bundle になります. Variation of Hodge から得られる Higgs field は必ず nilpotent になりますから, $\alpha \neq 0$ の時には (E, h, θ) は Variation of Hodge にはなり得ないことがわかります. さらに, Variation of Hodge の時にはしばしば singularity のまわりの monodromy が quasi unipotent であるという仮定をして, unipotent の場合に帰着することをしました. 上の例でいくと, monodromy が quasi unipotent になるのは a が有理数の時です. ですから, $(a, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} - \mathbb{Q} \times \{0\}$ の時, 上の例は (普通の)variation of Hodge とは離れたものになっています.

このように, 少くとも研究の出発点では古典的な Hodge の場合の研究の手法を使うことは難しいように見えます. ですから, Simpson によって開拓された微分幾何的な手法を用いることにします. そして, ある段階まで進んだところで Hodge の場合に帰着することを目指します.

4.2 方針の概略

ここでは簡単のために, 上で挙げた **b.** は起こらないという仮定の下で, 研究の方針を説明します.

4.2.1 Deformed holomorphic bundle

$X := \{(z_1, \ldots, z_n) \,|\, |z_i| < 1\}$, $D_i := \{z_i = 0\}$, $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ とし, $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ を $X - D$ 上の tame harmonic bundle で, 上に挙げた **b.** が起こらないようなものとします. $\mathcal{X} := X \times \mathbb{C}$, $\mathcal{D} := D \times \mathbb{C}$ とおき, $p : (X - D) \times \mathbb{C} \longrightarrow X - D$ を射影とします. λ は $\mathbb{C}$ の変数をあらわします.

$\mathcal{E} := p^{-1}(E)$ とおくと, これは $\mathcal{X}$ 上の C^∞-vector bundle を与えます. $\mathcal{E}$ の複素構造として次のものを考えます.

$$\overline{\partial}_E + \lambda \cdot \theta^\dagger + \overline{\partial}_\lambda.$$

ここで $\overline{\partial}_\lambda$ は自然な $\mathbb{C}$-方向の holomorphic structure であり, $\theta^\dagger$ は θ の adjoint. この複素構造を考えた時に $\mathcal{E}$ を deformed holomorphic bundle と呼びます.

$\mathcal{E}$ 上の (family of) λ-connection $\mathbb{D}$ が次のように与えられる.

$$\mathbb{D} = \overline{\partial}_E + \theta + \lambda \cdot \theta^\dagger + \lambda \cdot \partial_E.$$

これは次の性質を満たします.

- $\mathbb{D}(f \cdot v) = f \cdot \mathbb{D}(v) + \left(\overline{\partial} f + \lambda \cdot \partial f\right) \cdot v$. (Leibniz rule)
- $\left(\mathbb{D} + \overline{\partial}_\lambda\right)^2 = 0$. (flatness)

4.2.2 延長の local freeness

sheaf $\mathcal{E}$ の増大度による延長を考えます. すなわち, $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module ${}^\diamond\mathcal{E}$ を次のように与えます. $U \subset \mathcal{X}$ open set に対して

$$\Gamma(U, {}^\diamond\mathcal{E}) := \Big\{ f \in \Gamma(U \cap (\mathcal{X} - \mathcal{D}), \mathcal{E}) \,\Big|\, |f|_h = O\Big(\prod_{i=1}^{l} |z_i|^{-\epsilon}\Big),\ \forall \epsilon > 0 \Big\}.$$

Theorem 4.1 ([4]) *${}^\diamond\mathcal{E}$ は locally free $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module であり, $\mathbb{D}$ は regular λ-connection を与える. すなわち, $f \in {}^\diamond\mathcal{E}$ に対して, $\mathbb{D}f \in {}^\diamond\mathcal{E} \otimes \Omega^{1,0}(\log D)$ が成り立つ.* ∎

Remark 4.2 これは b. が起こる場合にはそのままでは正しくありません.

Remark 4.3 この定理は, *variation of Hodge* の場合の *nilpotent orbit theorem* に近い役割を果たします.

4.2.3 Limiting mixed twistor theorem

vector bundle ${}^\diamond\mathcal{E}$ と regular λ-connection $\mathbb{D}$ より, 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の vector bundle と nilpotent endomorphism の組が得られます.

$${}^\diamond\mathcal{E}_{|\mathbf{C}\times\{O\}}, \qquad \mathcal{N}_i = \mathrm{Res}_{\mathcal{D}_i}(\mathbb{D})_{|\mathbf{C}\times\{O\}},\ (i = 1, \dots, n).$$

一方, $(E, \overline{\partial}_E, \theta, h)$ より, $X^\dagger - D^\dagger$ 上の harmonic bundle $(E, \partial_E, \theta^\dagger, h)$ が得られます. (ここで $X^\dagger$ は X の共役. $D^\dagger$ も同様.) 同様の構成で $\mathbb{C} \times X^\dagger$ 上の holomorphic bundle ${}^\diamond\mathcal{E}^\dagger$ と regular μ-connection $\mathbb{D}^\dagger$ を得て, さらに, $\mathbb{C} \times \{O\}$ 上の vector bundle と nilpotent endomorphism の組が得られます.

$${}^\diamond\mathcal{E}_{|\mathbf{C}\times\{O\}}, \qquad \mathcal{N}_i^\dagger = \mathrm{Res}_{\mathcal{D}_i^\dagger}(\mathbb{D}^\dagger)_{|\mathbf{C}\times\{O\}},\ (i = 1, \dots, l).$$

これらのはりあわせが与えられ, $\mathbb{P}^1$ 上の vector bundle と nilpotent map の組が得られます.

$$S^{\mathrm{can}}(E), \qquad \mathcal{N}_i : S^{\mathrm{can}}(E) \longrightarrow S^{\mathrm{can}}(E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2),\ (i = 1, \dots, l).$$

Remark 4.4 $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2)$ は Tate object に対応します.

$\mathcal{N}(\underline{l}) := \sum_{i=1}^{l} \mathcal{N}_i$ とおくと, $\mathcal{N}(\underline{l})$ の weight filtration $W(\underline{l})$ が vector bundle $S^{\mathrm{can}}(E)$ 上に得られます. これより filtered vector bundle $\big(S^{\mathrm{can}}(E), W(\underline{l})\big)$ が得られます.

Theorem 4.2 ([4]) *$\big(S^{\mathrm{can}}(E), W(\underline{l})\big)$ は mixed twistor structure である.* ∎

Limiting mixed twistor structure と呼びます. さらに polarization も自然に得られます. ([5] 参照) これは, 元の harmonic bundle が Polarized variation of Hodge structures になっている時には, 古典的な研究で与えられた limiting Mixed Hodge structure に一致します.

Remark 4.5 ただし [4] で議論されている limiting mixed twistor structure は上の $(S^{\mathrm{can}}(E), W(\underline{l}))$ とは異なるものです. ([5] 参照).

4.2.4 Hodgeへの帰着

Limiting mixed twistor $(S^{\mathrm{can}}(E), W_h)$ に対して, 次のようにおく.

$$V^{(0)} := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}_i^{W(l)}(S^{\mathrm{can}}(E)), \qquad W_h^{(0)} := \bigoplus_{i\leq h} \mathrm{Gr}_i^{W(l)}(S^{\mathrm{can}}(E)),$$

$(V^{(0)}, W^{(0)})$ は mixed twistor structure ですが, さらに適当な torus action をとることで, mixed Hodge structure に対応することがわかります. さらに, この上に nilpotent map $\mathcal{N}_i^{(0)}$ や polarization が誘導され, 結果として nilpotent orbit が得られることがわかります. ([5] 参照)

こうして得られた nilpotent orbit から, limiting mixed twistor structure についての情報を得ることができます (Mixed twistor structure では weight filtration に関する Gr をとっても元の情報があまり落ちなかったことを思い出しましょう.) こうして, harmonic bundle の研究が Hodge の場合に帰着されます.

5 Pure twistor D-moduleへの応用 (Sabbahのプログラム)

5.1 Kashiwaraの予想

X, Y を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の quasi projective manifold とし, $f : X \longrightarrow Y$ を proper morphism とし, $\mathcal{F}$ を X 上の semisimple perverse sheaf とします. この時, Kashiwara は次の分解定理を予想しました. その一部を述べておきます.

Conjecture 5.1 *$f_*\mathcal{F}$ に関して Hard Lefschez Theorem が成り立つ. 特に, $f_*\mathcal{F}$ は Y 上の cohomologically constructible complex の derived category $D_c(\mathbb{C}_Y)$ において, $\bigoplus_j {}^p\mathcal{H}^j(f_*\mathcal{F})[-j]$ と同型である.*

Kashiwara-Mebkhout による Riemann-Hilbert correspondence によれば, simisimple regular holonomic D-module についての予想と見ることもできます.

Remark 5.1 *Kashiwara は次の二つの意味でより強いことを予想しています.* ([3] 参照)

- *regular holonomic D-module だけでなく, より広く semisimple holonomic D-module について予想しています.*
- *vanishing cycle functor や push forward をとっても, semisimple という性質は保たれる.*

Remark 5.2 分解定理や Hard Lefschez Theorem に関する古典的な研究としては, [1], [7] がよく知られています. Kashiwara 予想に関する研究としては, Drinfeld による仕事 [2] や, ここで紹介する Sabbah による仕事 [6] がありますが, 完全には解決されていません.

5.2 Sabbah のプログラム

Sabbah は次の方針で解決することを目指しました.

Step 1. harmonic bundle と semisimple local system の対応をつける. (Corlette, Jost-Zuo. ただし refinement が必要)

Step 2. Pure twistor D-moduleの定義を与え, decomposition theoremを示す. (Sabbah)

Step 3 harmonic bundleとtwistor D-moduleの対応をつける. ([5]参照)

このうちStep 2, 3はPure Hodge moduleの理論のTwistor版を作るという問題です. Step 2.はSabbahによってなされました.

Remark 5.3 講演時に筆者が知っていたSabbahの論文ではlocal unitaryという限定がついていましたが, その限定は外したrevisionが書かれました. また, [5]のAppendixも参照

Step 3. はtame harmonic bundleのasymptotic behaviourの研究をもとにして, [5]で示したので, 詳しい主張等については[5]を御覧下さい.

Step 1に関しては, Corlette, Jost-Zuoの仕事でほぼできているともいえますが, semisimplicityが保たれることを見るためにも, Jost-Zuoの主張を少し強めることが必要です. (3.2.1節参照)

References

[1] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), 5–171, Astèisque, **100**, (1982).

[2] V. Drinfeld, *On a conjecture of Kashiwara*, math.AG/0108050.

[3] M. Kashiwara, *Semisimple holonomic D-modules*, in *Topological Field Theory, Primitive Forms and Related Topics*, pp. 267–271, Progress in Math. vol 160, Birkhäuser (1998).

[4] T. Mochizuki, *Asymptotic behaviour of tame nilpotent harmonic bundles with trivial parabolic structure*, J. Diff. Geometry, **62**, (2002), 351–559.

[5] T. Mochizuki, *Asymptotic behaviour of tame harmonic bundles and an application to pure twistor D-modules* , math.DG/0312230

[6] C. Sabbah, *Polarizable twistor D-modules* (revised versionも出ています), Sabbahのホームページ

[7] M. Saito, *Modules de Hodge polarisables*, Publ. RIMS., **24** (1988), 849–995.

[8] C. Simpson, *Harmonic bundles on non-compact curves*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 713–770.

[9] C. Simpson, *Mixed twistor structures*, math.AG/9705006.

[10] C. Simpson, *The Hodge filtration on nonabelian cohomology. Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, 217–281, Proc. Sympos. Pure Math., 62, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[11] C. Simpson, *Higgs bundles and local systmes*, Publ. IHES, **75** (1992), 5–95.