代数幾何学シンポジウム記録
2003年度 pp.16-23

Higher arithmetic intersection theory

竹田　雄一郎　(九州大学大学院数理学研究院)

本文は、2003年10月の代数幾何学城崎シンポジウムにおける、筆者の講演の報告です。講演では K 群とチャウ群の両方について話しましたが、K 群に関する講演の内容は2003年度代数学シンポジウムで話したものと同じなので、ここではチャウ群に関する結果だけを記します。K 群については代数学シンポジウムの報告集 [6] をみてください。

"Higher arithmetic intersection theory" とは、Goncharov によって定義された高次算術的チャウ群の、交叉積のことです。筆者がそのことについて考えはじめたとき、それはこのシンポジウムでの講演を依頼されたときとほぼ重なるのですが、Gillet と Soulé の算術的チャウ群の交叉積の定義と筆者による高次算術的 K 理論の積の定義の手法を応用することによって、この交叉積は簡単に構成できると思っていました。なので、今年 (2003年) の夏にその問題を考えて、できたところまでを講演で話すつもりだったのですが、実際計算してみると、収束しそうもない積分が頻出して収拾がつかなくなり、カレントの積の理論のちょっとした拡張しかできませんできた。これをつかうと、算術的交叉理論の $\mathrm{CH}^*(X,1)$ への拡張ができると思います。(現段階では、そこまでも到達していませんが。)

ということで、講演のタイトルとは全然つりあわない内容なので、あまり期待せずに読んでください。

まずはじめに、高次チャウ群の cube を用いた定義を復習する。基礎体 k を固定して、多様体はすべて k 上定義されているとする。射影直線 $\mathbb{P}^1$ の座標関数 z を固定しておく。$\square = \mathbb{P}^1 - \{z=1\}$ とし、$\square^n$ を $\square$ の n 個の直積とする。z を $\square^n$ の各成分に引き戻すことによって、n 個の関数 $z_1, \cdots, z_n$ がえられる。$\{z_i=0\}$ または $\{z_i=\infty\}$ のいくつかの共通部分で表される $\square^n$ の部分多様体を $\square^n$ の面 (face) とよぶ。

X を準射影的な多様体とする。$c_n(X,m)$ を、$X\times\square^n$ の余次元 m の整部分多様体で、すべての $\square^n$ の面と proper に交わるもので生成される自由アーベル群とする。また $d_n(X,m)$ を、$X\times\square^{n-1}$ の整部分多様体の射影 $X\times\square^n \to X\times\square^{n-1}$ による引き戻しで生成される $c_n(X,m)$ の部分アーベル群とし、

$$z_n(X,m) = c_n(X,m)/d_n(X,m)$$

とする。余次元1の面への制限の交代和をとることにより、アーベル群の複体

$$\cdots \xrightarrow{\partial} z_n(X,m) \xrightarrow{\partial} z_{n-1}(X,m) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} z_0(X,m)$$

がえられる。そのホモロジー群

$$\mathrm{CH}^m(X,n) = H_n(z_*(X,m))$$

を、X の高次チャウ群とよぶ。

X が k 上滑らかなとき、高次チャウ群は、モチヴィックコホモロジーとよばれる代数多様体の普遍的なコホモロジー理論と同一視できることが知られている。つまり $z^*(X,m) = z_{2m-*}(X,m)$ とおくと、

$$H^n_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Z}(m)) = H^n(z^*(X,m))$$

は、X のモチヴィックコホモロジー群とみなすことができる。

次に、Goncharov による explicit regulator map について説明する [4]。ここでは $k=\mathbb{C}$ とし、多様体 X は滑らかで射影的とする。$\mathcal{C}^n_{\mathbb{R}}(X)$ を X 上の次数 n の実カレントのなす空間、$\mathcal{C}^{p,q}(X)$ を (p,q) 型の複素カレントのなす空間とし、

$$\mathcal{C}^n(X,m) = \begin{cases} \mathcal{C}^{n-1}_{\mathbb{R}}(X)(m-1) \cap \bigoplus_{\substack{p'+q'=n-1 \\ p'<m,q'<m}} \mathcal{C}^{p',q'}(X), & n<2m, \\ \mathcal{C}^{2m}_{\mathbb{R}}(X)(m) \cap \mathcal{C}^{m,m}(X) \cap \operatorname{Ker} d, & n=2m, \\ 0, & n>2m, \end{cases}$$

微分 $d_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^n(X,m) \to \mathcal{C}^{n+1}(X,m)$ を、

$$d_{\mathcal{D}}(\omega) = \begin{cases} -\pi(d\omega), & n<2m-1, \\ -2\partial\overline{\partial}\omega, & n=2m-1, \\ 0, & n>2m-1 \end{cases}$$

で定義する。つまり $\mathcal{C}^*(X,m)$ は、[3] にでてくる微分形式の複体 $\mathcal{D}^*(X,m)$ と双対なカレントの複体とする。微分形式 ω に対し、それから自然にきまるカレントを $[\omega]$ と表す。この対応により、$\mathcal{D}^*(X,m)$ は $\mathcal{C}^*(X,m)$ の部分複体で、そのうめこみは quasi-isomorphism になる。したがって、$\mathcal{C}^*(X,m)$ のコホモロジーは、X の Deligne コホモロジーと同型になる。

Explicit regulator map は、モチヴィックコホモロジーから Deligne コホモロジーへの realization functor を与えるような、複体の写像

$$\mathcal{P}^*(m) : z^*(X,m) \longrightarrow \mathcal{C}^*(X,m)$$

のことである。Explicit というだけあって、この写像は具体的に次のように与えられる。W を $X\times\square^n$ の余次元 m の整部分多様体で、すべての $\square^n$ の面と proper に交わるものとする。この W からきまる $z_n(X,m)=z^{2m-n}(X,m)$ の元の像 $\mathcal{P}^{2m-n}(m)(W)$ を、

$$\left\langle\mathcal{P}^{2m-n}(m)(W),\varphi\right\rangle=(2\pi\sqrt{-1})^{m-n}\int_{W_{reg}}T_n(z_1,\cdots,z_n)\wedge\pi_X^*\varphi$$

で定義する。ここで、$\langle\ ,\ \rangle$ は X 上のカレントと微分形式のペアリング、W_{reg} は W の非特異な部分、$\pi_X: X\times\square^n\to X$ は射影、$T_n(z_1,\cdots,z_n)$ は高次 Bott-Chern 形式の定義にも登場する次のような $\square^n$ 上の log pole をもつ微分形式とする：

$$T_n(z_1,\cdots,z_n)=\frac{(-1)^n}{2n!}\sum_{i=1}^{n}(-1)^iS_n^i(z_1,\cdots,z_n)$$

ただし、

$$S_n^i(z_1,\cdots,z_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(-1)^\sigma\log|z_{\sigma(1)}|^2\frac{dz_{\sigma(2)}}{z_{\sigma(2)}}\wedge\cdots\wedge\frac{dz_{\sigma(i)}}{z_{\sigma(i)}}\wedge\frac{d\overline{z}_{\sigma(i+1)}}{\overline{z}_{\sigma(i+1)}}\wedge\cdots\wedge\frac{d\overline{z}_{\sigma(n)}}{\overline{z}_{\sigma(n)}}$$

である。$n=0$ のときは $T_0=1$ とするので、$\mathcal{P}^{2m}(m)(W)$ は W に沿った積分の $(2\pi\sqrt{-1})^m$ 倍である。

ここまでは複素数体上の話だったが、X が有理数体上で定義されているときには、次のように考える。まず、X を $\mathbb{C}$ に係数拡大してそれに付随する複素多様体 $X(\mathbb{C})$ を考える。$X(\mathbb{C})$ には複素共役が反正則に作用しているが、微分形式やカレントはすべて複素共役で不変なものだけを考える。つまり X が $\mathbb{Q}$ 上の多様体のとき、$\mathcal{C}^*(X,m)$ は複素共役で不変なカレントからなる $\mathcal{C}^*(X(\mathbb{C}),m)$ の部分複体とする。するとこの場合にも、X の explicit regulator map を $z^*(X,m)$ から $\mathcal{C}^*(X,m)$ への写像として定義することができる。これ以降は基礎体について断わらないので、$k=\mathbb{C}$ または $k=\mathbb{Q}$ のそれぞれの場合に応じて、適宜読みかえてほしい。

Goncharov は、$\mathcal{P}^*(m)$ の mapping cone のコホモロジー群として高次算術的チャウ群を定義した [4] が、ここでは算術的 K 群との compatibility を見越して、次のように定義する。

Definition 1. X を k 上滑らかな射影多様体とする。$\widetilde{\mathcal{C}}^*(X,m)=\mathcal{C}^*(X,m)/\operatorname{Im}d_{\mathcal{C}}$ とする。X の高次算術的チャウ群 $\widehat{\mathrm{CH}}^m(X,2m-n)$ を、次のアーベル群

$$\left\{(w,\eta);w\in z^n(X,m),\eta\in\widetilde{\mathcal{C}}^{n-1}(X,m),\ \mathcal{P}^n(m)(w)+d_{\mathcal{C}}\eta\in\mathcal{D}^n(X,m)\right\}$$

を、部分群

$$\left\{ \left(\partial z, -\mathcal{P}^{n-1}(m)(z) \right) ; z \in z^{n-1}(X, m) \right\}$$

でわってできる群として定義する。

上の定義の条件 $\mathcal{P}^n(m)(w) - d_{\mathcal{C}}\eta \in \mathcal{D}^n(X, m)$ を $\mathcal{P}^n(m)(w) - d_{\mathcal{C}}\eta = 0$ でおきかえると、Goncharov が定義した群がえられる。つまり、上で定義した $\widehat{\mathrm{CH}}^n(X, m)$ は、彼が定義したものよりもずっと大きい群である。また、$n = 2m$ のときの条件 $\mathcal{P}^{2m}(m)(w) - d_{\mathcal{C}}\eta \in \mathcal{D}^{2m}(X, m)$ は、η が w に関する Green カレントであることと同じなので、$\widehat{\mathrm{CH}}^m(X, 0)$ は Gillet と Soulé による算術的チャウ群と一致する。

これまで X は $\mathbb{Q}$（または $\mathbb{C}$）上の多様体として話を進めてきたが、Gillet と Soulé の算術的チャウ群は、整数環 $\mathbb{Z}$ 上で定義される多様体に対して定義されている。整数環上の多様体の高次チャウ群は、多様体の上の代数的サイクルからなる複体のホモロジーではなく、代数的サイクルからつくられる整数環上の Zariski 層のコホモロジー群という形で、Levine によって定義されている [5]。したがって、もし彼の定義にあうように explicit regulator map を拡張することができたら、整数環上の多様体の高次算術的チャウ群を定義することが可能になる。

算術的チャウ群 $\widehat{\mathrm{CH}}^n(X)$ や高次チャウ群 $\mathrm{CH}^n(X, m)$ には、交叉積が定義されている。したがって、$\widehat{\mathrm{CH}}^n(X, m)$ に交叉積を導入することは、興味ある問題である。しかしチャウ群はホモロジー的にふるまうものなので、それに積を導入するには困難がともなう。筆者はこれまでに、Gillet と Soulé による算術的チャウ群の交叉積の定義の方法を応用するという、誰でも思いつく方法でこの問題を解決しようとしてきたが、今までのところ、完全な解決に至っていない。そのうまくいかない点は最後に述べるとして、この章では、$\widehat{\mathrm{CH}}^*(X)$ と $\widehat{\mathrm{CH}}^*(X, 1)$ のペアリングに向けての筆者の結果について述べることにする。

はじめに、Gillet と Soulé による算術的チャウ群の交叉積について思い出そう。算術的チャウ群の交叉積は、部分多様体の交叉とそれらに関する Green カレントの $*$ 積によって定義される。W を X の余次元 m の整部分多様体、$g_W \in \mathcal{C}^{2m-1}(X, m)$ を W に関する Green カレント、つまり $d_{\mathcal{C}} g_W + \mathcal{P}^{2m}(m)(W) \in \mathcal{D}^{2m}(X, m)$ をみたすカレントとする。W と proper に交わる X の余次元 k の整部分多様体 Z に関する Green カレントを g_Z とするとき、g_W と g_Z の $*$ 積は

次のように定義される：

$$g_W * g_Z = g_W \wedge \mathcal{P}^{2k}(k)(Z) + [\omega_W] \wedge g_Z.$$

ここで ω_W は、$d_{\mathcal{E}} g_W + \mathcal{P}^{2m}(m)(W) = [\omega_W]$ をみたす $\mathcal{D}^{2m}(X, m)$ の元である。しかし、上の式のカレントの外積 $g_W \wedge \mathcal{P}^{2k}(k)(Z)$ は定義できないので、この式は意味をなさない。

W に関する任意の Green カレントは、modulo $\mathrm{Im}\, d_{\mathcal{E}}$ で W に沿って log pole をもつ $X - W$ 上の滑らかな微分形式にとりかえることができる。以下これを、W に関する Green 形式とよぶことにする。g_W を Green 形式とし、それによりきまるカレントを $[g_W] \in \mathcal{C}^{2m-1}(X, m)$ と表す。すると $[g_W] \wedge \mathcal{P}^{2k}(k)(Z)$ は

$$\varphi \mapsto (2\pi\sqrt{-1})^k \int_{Z_{reg}} g_W \wedge \varphi$$

により意味をもち、これにより $[g_W] * g_Z$ は定義できる。一般の Green カレントの $*$ 積は、g_W を Green 形式でとりかえることにより、modulo $\mathrm{Im}\, d_{\mathcal{E}}$ で定義できる。このようにして得られた $[g_W] * g_Z$ は、W と Z の交叉に関する Green カレントになることがわかる。

ここで注意をふたつ。ここで示した Green カレントやその $*$ 積の定義は、Gillet と Soulé のものとは $2\pi\sqrt{-1}$ のべきの分だけ違っているが、それは、高次算術的チャウ群の積を定義に $2\pi\sqrt{-1}$ のべきが現れないようにするためである。それからここでは、Green カレントの定義として、Burgos によるもの [2] を採用する。彼の定義だと、blow-up でない固有な全射 $X' \to X$ がでてこないし、log pole をもつ滑らかな微分形式の理論 [1] や混合 Hodge 理論が使えるので、Gillet と Soulé のものよりも便利である。

さて、$\widehat{\mathrm{CH}}^*(X, m)$ に交叉積を定義するためには、上記の $*$ 積の理論を拡張することが必要不可欠である。W を $X \times \square^n$ の余次元 m の整部分多様体、$\overline{W}$ をその $X \times (\mathbb{P}^1)^n$ での閉包とする。$g_{\overline{W}}$ を $\overline{W}$ に沿って log pole をもつ Green 形式とするとき、次がなりたつ。

Lemma 2. $S_n^i = S_n^i(z_1, \cdots, z_n)$、$T_n^i = T_n^i(z_1, \cdots, z_n)$ とする。$n \leq 3$ のとき、

$$g_{\overline{W}} \bullet T_n = (-1)^n (\partial g_{\overline{W}} - \overline{\partial} g_{\overline{W}}) \wedge T_n + \frac{1}{2n!} g_{\overline{W}} \wedge (\partial S_n^n + (-1)^n \overline{\partial} S_n^1)$$

は $X \times (\mathbb{P}^1)^n$ 上の局所可積分な微分形式になる。

以下、$n=1$ とする。

$$\widetilde{G}_W=(2\pi\sqrt{-1})^{-1}\int_{\mathbb{P}^1} g_{\overline{W}}\bullet T_1$$

とする。Lemma 2 と Fubini の定理から、$\widetilde{G}_W$ は X 上の局所可積分な微分形式になる。これをカレントとみなすと、$[\widetilde{G}_W]\in\mathcal{C}^{2m-2}(X,m)$ であり、

$$d_{\mathcal{C}}[\widetilde{G}_W]=\mathcal{P}^{2m-1}(m)(W)-\left[\frac{1}{2(2\pi\sqrt{-1})}\int_{\mathbb{P}^1}\log|z|^2\omega_{\overline{W}}\right]-[g_{\overline{W}}|_{z=0}-g_{\overline{W}}|_{z=\infty}]$$

をみたす。ここで、$\omega_{\overline{W}}$ は $d_{\mathcal{C}}\,[g_{\overline{W}}]+(2\pi\sqrt{-1})^m\delta_{\overline{W}}=[\omega_{\overline{W}}]$ をみたす $X\times\mathbb{P}^1$ 上の (m,m) 形式である。$\frac{1}{2(2\pi\sqrt{-1})}\int_{\mathbb{P}^1}\log|z|^2\omega_{\overline{W}}$ は X 上の滑らかな微分形式であることに注意する。

$w=\sum_i n_i[W_i]\in z^{2m-1}(X,m)$ とする。各 W_i は $X\times\square$ の余次元 m の整部分多様体である。$g_w=\sum_i n_i g_{\overline{W_i}}$、$\omega_w=\sum_i n_i\omega_{\overline{W_i}}$ とする。さらに $\partial w=0$ を仮定する。

$$\widetilde{G}_w=\sum_i n_i\widetilde{G}_{W_i}=(2\pi\sqrt{-1})^{-1}\int_{\mathbb{P}^1} g_w\bullet T_1$$

とすると、上の等式から、

$$d_{\mathcal{C}}[\widetilde{G}_w]=\mathcal{P}^{2m-1}(m)(w)-\left[\frac{1}{2(2\pi\sqrt{-1})}\int_{\mathbb{P}^1}\log|z|^2\omega_w\right]-[g_w|_{z=0}-g_w|_{z=\infty}]$$

がなりたつ。ところが、$g_w|_{z=0}-g_w|_{z=\infty}$ は $\partial w=0$ に関する Green 形式なので、Burgos の定理 [2] により、これは $\eta+d_{\mathcal{D}}\eta'$ の形にかける。ただし、$\eta\in\mathcal{D}^{2m-1}(X,m)$ かつ η' は $\cup|\partial W_i|$ で log pole をもつ $\mathcal{D}^{2m-2}(X-\cup|\partial W_i|,m)$ の元である。したがって、η' も X 上で局所可積分になる。

$$G_w=-\widetilde{G}_w-\eta'$$

とおくと、これは X 上局所可積分な微分形式で、これを $\mathcal{C}^{2m-2}(X,m)$ の元とみなすと、

$$d_{\mathcal{C}}\,[G_w]=-\mathcal{P}^{2m-1}(m)(w)+\left[\frac{1}{2(2\pi\sqrt{-1})}\int_{\mathbb{P}^1}\log|z|^2\omega_w+\eta\right]$$

となる。以下、

$$\Omega_w=\frac{1}{2(2\pi\sqrt{-1})}\int_{\mathbb{P}^1}\log|z|^2\omega_w+\eta$$

とおく。しかし実際、G_w と Ω_w は、w に関する Green 形式 g_w と、分解 $g_w|_{z=0}-g_w|_{z=\infty}=\eta+d_{\mathcal{D}}\eta'$ に依っていることに注意する。

Proposition 3. $w \in z^{2m-1}(X,m)$ を $\partial w = 0$ をみたす元とすると、X 上の局所可積分な微分形式 G_w で、次をみたすものが存在する：G_w は $\mathbb{R}(m-1)$ に値をもち、$(m-1, m-2)$ 形式と $(m-2, m-1)$ 形式の和で表せ、かつある $\Omega_w \in \mathcal{D}^{2m-1}(X,m)$ をつかって、

$$d_{\mathcal{C}}[G_w] + \mathcal{P}^{2m-1}(m)(w) = [\Omega_w]$$

と表すことができる。

次に、$*$ 積の拡張について述べる。Z を X の余次元 k の整部分多様体とする。$w = \sum_i n_i[W_i] \in z^{2m-1}(X,m)$ を $\partial w = 0$ をみたす元で、各 W_i は $Z \times \Box$ と proper に交わると仮定する。このとき、Z に関する Green 形式 g_Z と w に関する Green カレント G_w の $*$ 積を以下のように定義する：

$$[g_Z] * G_w = -[g_Z] \bullet \mathcal{P}^{2m-1}(m)(w) + [\omega_Z] \wedge G_w.$$

ここで左辺に現れる $[g_Z] \bullet \mathcal{P}^{2m-1}(m)(w)$ は、

$$\begin{aligned} \varphi \mapsto &-\frac{(2\pi\sqrt{-1})^{m-1}}{2} \int_{W_{reg}} \log|z|^2 (\partial g_Z - \bar{\partial} g_Z) \wedge \pi_X^* \varphi \\ &+ \frac{(2\pi\sqrt{-1})^{m-1}}{2} \int_{W_{reg}} g_Z \wedge \left(\frac{dz}{z} - \frac{d\bar{z}}{\bar{z}} \right) \wedge \pi_X^* \varphi \end{aligned}$$

で与えられるカレントである。

また、Prop. 3 のように与えられる w に関する Green 形式 G_w と、Z に関する Green カレント g_Z の $*$ 積を

$$[G_w] * g_Z = [G_w] \wedge \mathcal{P}^{2k}(k)(Z) + [\Omega_w] \bullet g_Z$$

で定義する。ここで $[\Omega_w] \bullet g_Z$ は、

$$\varphi \mapsto \langle g_Z, -(\partial\Omega_w - \bar{\partial}\Omega_w) \wedge \varphi \rangle + \langle \partial g_Z - \bar{\partial} g_Z, \Omega_w \wedge \varphi \rangle$$

で定義されるカレントである。

Proposition 4. これら二つのカレントは $\mathcal{C}^{2m+2k-2}(X, m+k)$ の元であり、$w \cdot (Z \times \Box) \in z^{2m+2k-1}(X, m+k)$ に関する Green カレントになる。

このように、$\widehat{\mathrm{CH}}^*(X)$ と $\widehat{\mathrm{CH}}^*(X,1)$ のペアリングに関係するカレントの $*$ 積を定義することができる。これを用いて、上記のペアリングを構成することも可能であると、筆者は思っている。しかし、この方法をより高次の状況に適用

しようとすると、収束しない積分がでてきてしまい、うまくいかない。この困難を回避するための方策として、K 理論を利用することが考えられる。高次算術的 K 理論には積が導入されているので、モチヴィックコホモロジーが K 理論の Adams 作用素の固有空間としてえられることの算術的なアナロジーが存在すれば、それをつかって高次算術的チャウ群の積を定義することができるはずである。

REFERENCES

[1] J.I. Burgos, *A C^∞ logarithmic Dolbeault complex*, Compositio Math. **92** (1994), 61–86.
[2] J.I. Burgos, *Green forms and their product*, Duke Math. J. **75** (1994), 529–574.
[3] J.I. Burgos, *Arithmetic Chow rings and Deligne-Beilinson cohomology*, J. Algebraic Geom. **6** (1997), 335–377.
[4] A. Goncharov, *Polylogarithms, regulators, and Arakelov motivic complexes*, preprint, math.AG/0207036.
[5] M. Levine, *Techniques of localization in the theory of algebraic cycles*, J. Algebraic Geom. **10** (2001), 299–363.
[6] Y. Takeda, *Higher arithmetic intersection theory*, in 「第 48 回代数学シンポジウム報告集」, pp.52–62.

FACULTY OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY, HAKOZAKI 6-10-1, HIGASHI-KU, FUKUOKA, 812-8581, JAPAN

E-mail address: yutakeda@math.kyushu-u.ac.jp