代数幾何学シンポジウム記録
2004年度 pp.114-118

DUAL FIBRATION OF A PROJECTIVE LAGRANGIAN FIBRATION

永井 保成

既約シンプレクティック多様体と Lagrange ファイバー空間. 標準因子が自明な射影代数多様体は，代数多様体の分類理論にとって重要なばかりでなく，数論幾何や数理物理といった隣接分野においても興味を持って研究されている対象である．その中のひとつとして，既約シンプレクティック Kähler 多様体がある．

定義 1. X を $2n$ 次元のコンパクト *Kähler* 多様体とする．X が**既約シンプレクティック Kähler 多様体**であるとは
(i) X 上にいたるところ非退化な正則 2-形式 σ_X が存在し，正則 2-形式の空間 $H^0(X,\Omega_X^2)$ は σ_X で張られる．
(ii) X は単連結である．

σ_X を X の（正則）**シンプレクティック形式**という．Kähler–Einstein 計量の存在（Yau の定理）を用いると，任意の標準因子が自明なコンパクト Kähler 多様体は，有限エタール被覆に持ち上げれば，複素トーラス，Calabi–Yau 多様体とこの既約シンプレクティック Kähler 多様体のいくつかの直積に分解することが知られているので，既約シンプレクティック Kähler 多様体を研究することには意味がある．

既約シンプレクティック Kähler 多様体の最も簡単な例は次元が 2 の場合であり，これは K3 曲面の場合に他ならない．K3 曲面は，既約シンプレクティック Kähler 多様体の理論のプロトタイプである．

高次元，すなわち次元が 4 以上の例をいくつかあげよう．

(1) いわゆる Hilbert 型．S を K3 曲面としたとき，その上の長さが n の 0 次元部分スキーム（解析部分空間）のモジュライ空間 $X = \mathrm{Hilb}^n(S)$ は次元が $2n$ の既約シンプレクティック多様体である．より一般に K3 曲面上の安定層のモジュライであってコンパクトで連結なものは既約シンプレクティック多様体になることが知られており，そのようにして得られる例はすべて変形でつながることが知られている（[20] など）．
(2) いわゆる Kummer 型．A を Abel 曲面としたとき，Albanese 写像 $Z = \mathrm{Hilb}^{n+1}(A) \to A$ のファイバーはすべて同型である．これを $\mathrm{Kum}^n(A)$ と書き，一般化された **Kummer 多様体**と呼ぶ．一般化された Kummer 多様体は既約シンプレクティック多様体である．より一般に Abel 曲面上の安定層のモジュライ空間のアルバネーゼ写像のファイバーとして既約シン

プレクティック多様体が得られることが知られている．これらもまたすべて変形同値である（[21]）．

(3) O'Grady の例．O'Grady[16, 17] は，ある種の特異点を持つ K3 または Abel 曲面上の半安定層のモジュライ空間のクレパントな解消を考えることで，Hilbert 型や Kummer 型と変形同値でない既約シンプレクティック多様体の例を 2 つ構成した．それぞれ，次元は 10 と 6 である．

一般に，小平 [8] の複素曲面の理論などからも知られるように，ある多様体を調べるときにその上のファイバー空間の構造を調べることは重要である．既約シンプレクティック Kähler 多様体上のファイバー空間の構造については松下 [9, 10] による基本的な結果がある．

定義 2. X を $2n$ 次元の複素多様体とし，σ_X をその上のシンプレクティック形式（非退化な正則 2-形式 σ_X であって $d\sigma_X = 0$ となるもの）とする．射 $f : X \to S$ が **Lagrange ファイバー空間**であるとは，f は相対次元が n の等次元の射であり，σ_X の任意のファイバーの任意の既約成分への制限が 0 になるもののことを言う．

定理 3 (松下 [9, 10])**.** *射影的な既約シンプレクティック多様体 X からの射 $f : X \to S$ であって $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$ かつ $0 < \dim S < \dim X$ となるものは Lagrange ファイバー空間である．*

既約シンプレクティック多様体からの Lagrange ファイバー空間の最も簡単な例は K3 曲面 S 上の楕円曲面の構造 $f : S \to \mathbb{P}^1$ である．

高次元の例をいくつか挙げてみよう．

(1) $S \to \mathbf{P}^1$ を K3 曲面上の楕円曲面の構造とする．このとき，誘導される射 $f : X = \mathrm{Hilb}^n(S) \to \mathrm{Sym}^n(S) \to \mathrm{Sym}^n(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{P}^n$ は Lagrange ファイバー空間である．

(2) S を K3 曲面であって，滑らかな種数 g の曲線 C を含むものとする．このとき，S 上の（適当な豊富束に関して）安定な純ねじれ層 $\mathcal{F}$ であって，その台が完全線形系 $|C|$ に属し，その曲線の上での次数が d となるもののモジュライ空間 Z^d は既約シンプレクティック多様体であるが，これは自然な射 $f : Z^d \to |C| \cong \mathbb{P}^g$ をもつ．これは Lagrange ファイバー空間である．

他にも，Kummer 型や O'Grady の例と変形同値な既約シンプレクティック多様体からの Lagrange ファイバー空間の例が作れることが知られている（[5, 21, 18] など）．ここで注意したいのはいずれの場合も，これらの Lagrange ファイバー空間の底空間は次元が全空間の次元の半分の射影空間になっていることである．そこで自然にうかびあがってくるのが次の問題である．

問題. *X を $2n$ 次元の既約シンプレクティック Kähler 多様体とし，$f : X \to S$ をその上の Lagrange ファイバー空間とする．このとき，S は射影空間 $\mathbb{P}^n$ と同型であるか？*

この問題に対しては，趙–宮岡–Shepherd-Barron による注目すべき結果がある．

定理 4 (趙–宮岡–Shepherd-Barron [4]). *X を $2n$ 次元の射影的な既約シンプレクティック多様体とし，$f: X \to S$ をその上の Lagrange ファイバー空間とする．もし f が大域切断 $s: S \to X$ をもてば，S は射影空間 $\mathbb{P}^n$ に同型．*

ここで最も目を引くのは，大域切断の存在の仮定である．Lagrange ファイバー空間の例 (2) において $Z^0 \to \mathbb{P}^g$ はもとの K3 曲面の上の構造層から誘導される自然な大域切断を持つが，一般の $Z^d \to \mathbb{P}^g$ は大域切断を持たない．しかしながら，Z^d は底空間の十分小さい開集合に制限すれば切断を持ち，Z^0 と Z^d はある種の twist で関係付けられている．

双対ファイバー空間とその上のシンプレクティック形式. $f: X \to S$ を射影的射であって，一般ファイバーが Abel 多様体であるもの（Abel ファイバー空間と呼ぼう）とする．f が平坦であって $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$，かつ，(解析的）局所切断をもつ，すなわち，任意の S の点に対して，その Euclid 位相での開近傍が存在して，その上に制限すれば切断を持つ，と仮定する．このとき，Grothendieck または Artin の結果 [7, 1] によれば，ピカール関手を表現する解析空間（または代数空間）$\mathrm{Pic}_{X/S}$ が存在する．P を，f の一般ファイバー F の構造層に対応する点 $[\mathcal{O}_F]$ を含む連結成分とする．$P \to S$ は群空間，すなわち解析空間における群対象であるが，f が既約でないファイバーを持つ場合は一般には分離的でない．E を $\mathcal{O}_X$ から誘導される $P \to S$ の切断の閉包とすると，$E \to S$ は P の部分群空間である．そこで $Q = P/E$ とおくと $\pi: Q \to S$ は分離的な群空間になる（[3, 19] 参照）．π の一般ファイバーは f の一般ファイバーの双対 Abel 多様体になっているので，$\pi: Q \to S$ を $f: X \to S$ の**双対ファイバー空間**と呼ぶ．一般に $\pi: Q \to S$ は固有でないことに注意しよう．

この双対ファイバー空間に対して，元の f が Lagrange ファイバー空間であるとき，次の定理が証明できる．

定理 5 ([15]). *X を複素多様体，σ_X を X 上の正則シンプレクティック形式とし，$f: X \to S$ をその上の射影的な Lagrange ファイバー空間とする．さらに，f は (1) 解析的局所切断を持つ，(2) $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$，(3) $R^1 f_*\mathcal{O}_X$ は局所自由層，を仮定する．このとき，*
(i) $Q \to S$ は滑らかな射．
(ii) Q 上に自然なシンプレクティック形式が存在する．
(iii) $\pi: Q \to S$ は (ii) のシンプレクティック形式に関して Lagrange ファイバー空間である．

ここで，局所切断の存在の仮定から S は滑らかであり，f は自動的に平坦になることに注意しよう．また，X が射影的な既約シンプレクティック多様体なら松下 [12] によって条件 (3) は自動的に満たされることに注意しよう．
(iii)

この定理の応用として，趙–宮岡–Shepherd-Barron の定理を一般化することができる．

系 6. X を $2n$ 次元の射影的既約シンプレクティック多様体とし，$f: X \to S$ をその上の *Lagrange* ファイバー空間で解析的局所切断を持つものとすると，S は射影空間 $\mathbb{P}^n$ と同型である．

この系は，趙–宮岡–Shepherd-Barron [4] の議論をわれわれの双対 Lagrange ファイバー空間 $\pi: Q \to S$ に適用することで得られるのである．

定理 5 は，向井 [13] によるモジュライ空間上のシンプレクティック形式の存在定理の類似のようにも見えるが，筆者の知っている証明は向井による議論とはまったく異なり，幾何学的にシンプレクティック形式を構成する方法である．コホモロジー論を用いた向井式の証明ように，概念的に定理が成り立つ理由が明確になる証明のほうが好ましいと思われるが，そのような方向での証明はいまのところわからない．類似の定理を [6] にも見出すことができる．

最後に定理 5 の証明のアイディアをごく大雑把に述べよう．局所切断の存在を仮定したので適当に S を縮めれば切断が存在できる．さらにいま，$f: X \to S$ が滑らかであったとしよう．f-豊富束 L をとってくるとそれによって S 上相対的な isogeny $\varphi_L: Q \to X$ が存在する．これはエタール射であるから，$\varphi_L^* \sigma_X$ は Q 上のシンプレクティック形式である．f がトロイダル退化を持つ場合も同様にして Q 上にシンプレクティック形式が作れる．このようにして局所的に作られたシンプレクティック形式は，f が Lagrange ファイバー空間であるという仮定を用いると互いに張り合うことが示せる．松下 [11, 12] によれば，射影的な Lagrange ファイバー空間は，S の余次元が 2 以上の部分集合を除いて，楕円曲面の場合 [8] と類似の，滑らかか，高々トロイダル退化を持つ Abel ファイバー空間への明示的な還元をもつ．この還元の記述を用いれば，f が滑らかな部分で作られたシンプレクティック形式が余次元 1 の特異ファイバーまで伸びることがわかる．条件 (ii) によって Q が正則であることが簡単にわかるが，これによって，このシンプレクティック形式は Q 全体に伸びる．

謝辞. この場を借りて有用なコメントを下さった先生方，および，公演の機会を与えてくださった主催者の皆様に感謝の意を表します．

References

[1] Artin, M., *Algebraization of formal moduli. I*, Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira) Univ. Tokyo Press (1969), 21–71.

[2] Beauville, A., *Variétés Kählerienne dont la première classe de Chern est nulle*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 755–782.

[3] Bosch, S., Lütkebohmert, W., Raynaud, M., *Néron Models*, Springer-Verlag (1990)

[4] Cho, K., Miyaoka, Y., Shepherd-Barron, N.I., *Characterization of Projective Space and Applications to Complex Symplectic Manifolds*, Adv. Std. in Pure Math. **35** (2002), 1–88.

[5] Debarre, O., *On the Euler characteristic of generalized Kummer varieties*, Amer. J. Math. **121** (1999), 577-586.

[6] Donagi, R., Markman, E., *Spectral covers, algebraically completely integrable, Hamiltonian systems, and moduli of bundles*, Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993), Lecture Notes in Math., No.1620, Springer-Verlag (1996), 1–119.

[7] Grothendieck, A., *Techniques de construction en géométrie analytique, IX. Quelques problèmes de modules*, Seminaire Henri Cartan 1960/61, No.16.

[8] Kodaira, K., *On complex analytic surfaces, II,III*, Ann. Math. 77 (1963), 563-626; **78** (1963), 1–40.

[9] Matsushita, D., *On fibre space structures of a projective irreducible symplectic manifold*, Topology **38** (1999), 79-81. Addendum **40** (2001), 431–432.

[10] —, *Equidimensionality of Lagrangian fibrations on holomorphic symplectic manifolds*, Math. Res. Letters, **7** (2000), 389–391.

[11] —, *On singular fibres of Lagrangian fibrations over holomorphic symplectic manifolds*, Math. Ann. **321** (2001), 755–773.

[12] —, *Higher direct images of dualizing sheaves of Lagrangian fibrations*, Preprint.

[13] Mukai, S., *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surfaces*, Invent. Math. **77** (1984), 101–116.

[14] Mumford, D., *Abelian varieties*, Oxford University Press (1970)

[15] Nagai, Y., *Dual fibration of a projective Lagrangian fibration*, Preprint.

[16] O'Grady, K., *Desingularized moduli spaces of sheaves on a K3*, J.Reine Angew. Math. **512** (1999), 49–117.

[17] —, *A new six-dimensional irreducible symplectic variety*, J. Alg. Geom. **12** (2003), 435–505.

[18] Rapagnetta, A., *Topological invariants of O'Grady's six dimensional irreducible symplectic variety*, Preprint.

[19] Raynaud, M., *Spécialisation du foncteur de Picard*, Publ. Math. IHES **38** (1970), 27–76.

[20] Yoshioka, K., *Some examples of Mukai's reflections on K3 surfaces*, J. Reine Angew. Math. **515** (1999), 97–123.

[21] —, *Moduli spaces of stable sheaves on abelian surfaces*, Math. Ann. **321** (2001), 817–884.

Yasunari Nagai, Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro, Tokyo 153-8914, Japan

E-mail address: nagai@ms.u-tokyo.ac.jp