代数幾何学シンポジウム記録
2004年度 pp.62-66

曲線上の接続のモジュライとリーマン・ヒルベルト対応

稲場 道明
九州大学大学院数理学研究院
e-mail: inaba@math.kyushu-u.ac.jp

C を $\mathbf{C}$ 上の種数 g の非特異射影曲線, $t_1,\dots,t_n$ を C 上の相異なる n 点とする. このときリーマン・ヒルベルト対応により,

$$\left\{(E,\nabla)\;\middle|\;\begin{array}{l} E\text{: rank } r \text{ vector bundle on } C \\ \nabla : E \to E\otimes\Omega^1_C(t_1+\cdots+t_n)\text{: logarithmic connection}\end{array}\right\}\Big/\sim$$

$$\updownarrow \text{1:1}$$

$$\{GL_r(\mathbf{C})\text{-representations of } \pi_1(C\setminus\{t_1,\dots,t_n\},*)\}\,/\cong$$

という一対一対応ができる. ここで, 上の集合は (E,∇) を up to elementary transform で考えている. $E|_{t_i}\subset l$ で $\mathrm{res}_{t_i}(\nabla)(l)\subset l$ を満たすものに対し,

$$\tilde{E} := \ker(E \to E|_{t_i}/l)$$

とおくと, ∇ は $\tilde{E}$ 上の接続

$$\tilde{\nabla} : \tilde{E} \to \tilde{E}\otimes\Omega^1_C(t_1+\cdots+t_n)$$

を誘導する. $\tilde{E}$ や $\tilde{E}\otimes\mathcal{O}_C(t_i)$ を E の t_i に沿った l による elementary transform と言い, $(E,\nabla)\sim(\tilde{E},\tilde{\nabla})\sim(\tilde{E},\tilde{\nabla})\otimes\mathcal{O}_C(t_i)$ と見なしている.

上記の一対一対応は Deligne の理論 ([4]) から従うものであるが, これをモジュライ理論的観点から捉えるのがここでの目的である. つまり, ベクトル束とその上の接続のモジュライ空間というものと, 基本群の表現のモジュライ空間を然るべく定式化してその間の関係を見ることを目的とする. その記述からある種の微分方程式を導き, 特にパンルベ第6型の方程式が得られることについて述べる.

この内容は齋藤政彦氏、岩崎克則氏との共同研究の一部分である.

1 Definition of the moduli spaces

まず接続のモジュライについて考えるが, Riemann-Hilbert 対応の記述をわかりやすい形にするためにも, elementary transform をモジュライ空間の間の（双有理）変換として捉えたい. その際, elemantary transform が自然に定義されるためにベクトル束に parabolic structure という構造を入れることが必要となる. 以上を踏まえて以下のような定義をする.

n は正の整数, r は2以上の整数とし, L は C 上の line bundle,

$$\nabla_L : L \to L\otimes\Omega^1_C(t_1+\cdots+t_n)$$

は logarithmic connection とする.

$$T_n := \{(t_1, \dots, t_n) \in C \times \cdots \times C \mid t_i \neq t_j \text{ for } i \neq j\}$$

$$\Lambda_r^{(n)} := \left\{ (\lambda_j^{(i)})_{0 \le j \le r-1}^{1 \le i \le n} \in \mathbf{C}^{nr} \,\middle|\, \mathrm{res}_{t_i}(\nabla_L) = \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j^{(i)} \text{ for any } i \right\}$$

とおく. $(\mathbf{t}, \boldsymbol{\lambda}) = \left((t_1, \dots, t_n), (\lambda_j^{(i)})\right) \in T_n \times \Lambda_r^{(n)}(L)$ をとる.

Definition 1.1. 以下の条件を満たす組 $(E, \nabla_E, \{l_j^{(i)}\}_{0 \le j \le r}^{1 \le i \le n}, \psi)$ のことを $(\mathbf{t}, \boldsymbol{\lambda})$-parabolic connection with the determinat (L, ∇_L) と言う:

1. E は C 上の rank r のベクトル束
2. $\nabla_E : E \to E \otimes \Omega_C^1(t_1 + \cdots + t_n)$ は connection
3. $\psi : \det E \xrightarrow{\sim} L$ は horizontal isomorphism
4. $E|_{t_i} = l_0^{(i)} \supset l_1^{(i)} \supset \cdots \supset l_{r-1}^{(i)} \supset l_r^{(i)} = 0$ は filtration で, 各 i, j について $\dim(l_j^{(i)}/l_{j+1}^{(i)}) = 1$ と $(\mathrm{res}_{t_i}(\nabla_E) - \lambda_j^{(i)}\mathrm{id})(l_j^{(i)}) \subset l_{j+1}^{(i)}$ を満たす.

上の (4) で出てくる filtration のことを parabolic structure と呼ぶ. これがあると elmentary transformation が parabolic connection の間の変換として自然に考えることができる.

さて, parabolic connection 全体のモジュライ空間を考えたいわけであるが, 文字通り parabolic connection を全部を考えてしまうと良いモジュライ空間の構造は入らない. まともな空間としてモジュライ空間を構成するためには以下の安定性の定義が必要となる.

$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_j^{(i)})_{1 \le j \le r}^{1 \le i \le n} \in \mathbf{Q}^{nr}$ で, $0 < \alpha_1^{(i)} < \cdots < \alpha_r^{(i)} < 1$ を満たすものを generic に取る.

Definition 1.2. parabolic connection $(E, \nabla_E, \{l_j^{(i)}\}, \psi)$ が $\boldsymbol{\alpha}$-stable (resp. $\boldsymbol{\alpha}$-semistable) とは, $\nabla_E(F) \subset F \otimes \Omega_C^1(t_1 + \cdots + t_n)$ を満たす任意の subbundle $F \subset E$ に対して

$$\frac{\deg F + \sum_{i,j} \alpha_j^{(i)} \dim((F|_{t_i} \cap l_{j-1}^{(i)})/(F|_{t_i} \cap l_j^{(i)}))}{\mathrm{rank}\, F} \underset{(\text{resp. } \le)}{<} \frac{\deg E + \sum_{i,j} \alpha_j^{(i)} \dim(l_{j-1}^{(i)}/l_j^{(i)})}{\mathrm{rank}\, E}$$

を満たすことを言う.

Theorem 1.1. *$\exists M_C^{\boldsymbol{\alpha}}(r, \mathbf{t}, L)$: a fine moduli scheme of parabolic connections. $M_C^{\boldsymbol{\alpha}}(r, \mathbf{t}, L)$ is smooth over $\Lambda_r^{(n)}(L)$ of relative dimension $(r-1)(2(r+1)(g-1) + rn)$.*

Remark 1.1. parabolic connection のモジュライスタックについては [1],[2],[3] で導入されている. また, モジュライ空間の解析的構成は [7] でされている. ただ, ここでは代数多様体としてモジュライ空間を構成しておくことは重要であることに注意しておく. また [8] でも類似のモジュライ空間が構成されているが, 後の Theorem 2.1 を述べるために parabolic structure を上記に定義した形で導入しておく必要がある.

次に基本群の表現のモジュライ空間について考える.

Definition 1.3. $\mathrm{Rep}(C, \mathbf{t}, SL_r) := \mathrm{Hom}(\pi_1(C \setminus \{t_1, \dots, t_n\}, *), SL_r(\mathbf{C}))//\mathrm{Ad}(SL_r(\mathbf{C}))$ (categorical quotient) とおき, これを $\pi_1(C \setminus \{t_1, \dots, t_n\}, *)$ の $SL_r(\mathbf{C})$ 表現のモジュライ空間と見なす.

さて, t_i の周りを回る loop を γ_i とする. 写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Rep}(C, \mathbf{t}, SL_r) &\longrightarrow \mathcal{A}_r^{(n)} := \mathbf{C}^{n(r-1)} \\ \rho &\mapsto \mathbf{a} = (a_j^{(i)})^{1 \le i \le n}_{1 \le j \le r-1} \end{aligned}$$

を $\det(x \cdot \mathrm{id} - \rho(\gamma_i)) = x^r + a_{r-1}^{(i)} x^{r-1} + \cdots + a_1^{(i)} x + (-1)^r$ で定義する.

2 Riemann-Hilbert correspondence

以下簡単のため $(L|_{C \setminus \{t_1, \dots, t_n\}}, \nabla_L|_{C \setminus \{t_1, \dots, t_n\}}) \cong (\mathcal{O}, d)$ (trivial) とする. parabolic connection $(E, \nabla_E, \{l_j^{(i)}\}, \psi) \in M_C^{\boldsymbol{\alpha}}(r, \mathbf{t}, L)$ に対し, 対応する analytic connection ∇_E^{an} を考えると $\ker \nabla_E^{an}|_{C \setminus \{t_1, \dots, t_n\}}$ は $C \setminus \{t_1, \dots, t_n\}$ 上の locally constant sheaf となり, $\pi_1(C \setminus \{t_1, \dots, t_n\}, *)$ の $SL_r(\mathbf{C})$ 表現 ρ と対応する. よって写像

$$\begin{aligned} RH : M_C^{\boldsymbol{\alpha}}(r, \mathbf{t}, L) &\longrightarrow \mathrm{Rep}(C, \mathbf{t}, SL_r) \\ (E, \nabla_E, \{l_j^{(i)}\}, \psi) &\mapsto \rho \end{aligned}$$

が定まる. RH は holomorphic であるが, algebraic ではないことに注意しておく. 写像

$$\begin{aligned} \Lambda_r^{(n)}(L) &\longrightarrow \mathcal{A}_r^{(n)} \\ \boldsymbol{\lambda} &\mapsto \mathbf{a} \end{aligned}$$

を $\prod_{j=0}^{r-1}(x - \exp(-2\pi\sqrt{-1}\lambda_j^{(i)})) = x^r + a_{r-1}^{(i)} x^{r-1} + \cdots + a_1^{(i)} x + (-1)^r$ で定義する. すると作り方より図式

$$\begin{array}{ccc} M_C^{\boldsymbol{\alpha}}(r, \mathbf{t}, L) & \xrightarrow{RH} & \mathrm{Rep}(C, \mathbf{t}, SL_r) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda_r^{(n)}(L) & \longrightarrow & \mathcal{A}_r^{(n)} \end{array}$$

は可換となる.

Theorem 2.1. $r \geq 2$, $n > 0$ とし, $g = 0$ のときは $rn - 2(r+1) > 0$, $g = 0$ のときは $n \geq 2$ と仮定する. さらに $\boldsymbol{\alpha}$ を十分 *generic* にとって, *$\boldsymbol{\alpha}$-stable* $\Leftrightarrow$ *$\boldsymbol{\alpha}$-semistable* が成り立つようにしておく. $\boldsymbol{\lambda} \mapsto \mathbf{a}$ と対応しているとき,

$$M_C^{\boldsymbol{\alpha}}(r, \mathbf{t}, L)_{\boldsymbol{\lambda}} \xrightarrow{RH} \mathrm{Rep}(C, \mathbf{t}, SL_r)_{\mathbf{a}}$$

は *proper surjective bimeromorphic morphism* となる.

Remark 2.1. 1. $\mathbf{a}$ の値により, $\mathrm{Rep}(C, \mathbf{t}, SL_r)_{\mathbf{a}}$ は特異点を持つことがある. 正確に言うと特異点集合は

$$\mathrm{Sing}(\mathrm{Rep}(C, \mathbf{t}, SL_r)_{\mathbf{a}}) = \left\{ [\rho] \,\middle|\, \begin{array}{l} \rho \text{ は可約または, ある } i, j \text{ について} \\ \dim(\ker(\rho(\gamma_i) - \exp(-2\pi\sqrt{-1}\lambda_j^{(i)}))) > 1 \end{array} \right\}$$

となり，$RH|_{RH^{-1}(\mathrm{Rep}(C,\mathbf{t},SL_r)_a\setminus \mathrm{Sing}(\mathrm{Rep}(C,\mathbf{t},SL_r)_a))}$ は解析的同型となる．

2. Theorem 2.1 の $n=0$ に対応する場合は [10],[11] で扱われている．

3 Isomonodromic deformation

X を，n-pointed curves のモジュライの適当な covering とし，$(\mathcal{C},\tilde{t}_1,\ldots,\tilde{t}_n)$ を X 上の universal family とする．$M^{\alpha}_{\mathcal{C}}(r,\tilde{\mathbf{t}},\mathcal{O})$ を $\mathcal{C}$ 上の α stable parabolic connections の relative moduli space とし，

$$\mathrm{Rep}(\mathcal{C},\tilde{\mathbf{t}},SL_r):=\coprod_{x\in X}\mathrm{Rep}(\mathcal{C}_x,\tilde{\mathbf{t}}_x,SL_r)$$

を基本群の表現の relative moduli space とする．すると，以下の可換図式ができる．

$$\begin{array}{ccc} M^{\alpha}_{\mathcal{C}}(r,\tilde{\mathbf{t}},\mathcal{O}) & \xrightarrow{RH} & \mathrm{Rep}(\mathcal{C},\tilde{\mathbf{t}},SL_r) \\ {}_{\pi}\searrow & & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

を定める．X を適当な covering に取り替えることにより，$\mathrm{Rep}(\mathcal{C},\tilde{\mathbf{t}},SL_r)$ は X 上の trivial fibration になっているとしてよい．するとこの trivialization に関する constant section σ たちが定まる．これの引き戻し

$$\left\{RH^{-1}(\sigma)\subset M^{\alpha}_{\mathcal{C}}(r,\tilde{\mathbf{t}},\mathcal{O})\right\} \tag{1}$$

を考えると，$M^{\alpha}_{\mathcal{C}}(r,\tilde{\mathbf{t}},\mathcal{O})$ の Zariski open set 上の foliation を定める．これを isomonodromic flow と言う．X が genus 0 の 4 pointed curve のモジュライの covering で，$r=2$ のとき，これは丁度 Painlevé 第 6 方程式の解になっている．(これは本質的には [5] で確かめられている．)
(1) に対応する tangent distribution は

$$\Theta_{M^{\alpha}_{\mathcal{C}}(r,\tilde{\mathbf{t}},\mathcal{O})}\longrightarrow \pi^*\Theta_X\to 0$$

の splitting

$$s:\pi^*\Theta_X\longrightarrow \Theta_{M^{\alpha}_{\mathcal{C}}(r,\tilde{\mathbf{t}},\mathcal{O})} \tag{2}$$

で定まる subbundle $s(\pi^*\Theta_X)\subset\Theta_{M^{\alpha}_{\mathcal{C}}(r,\tilde{\mathbf{t}},\mathcal{O})}$ に対応する．ここで，Θ_X は X の tangent bundle を表す．splitting s は構成から解析的であるが，実は代数的であることがわかる．また，モジュライ空間全体 $M^{\alpha}_{\mathcal{C}}(r,\tilde{\mathbf{t}},\mathcal{O})$ の上で定義できていることもわかる．特に種数が 0 で $n=4$, $r=2$ のとき，この splitting s が Painlevé 第 6 方程式そのものになっている．実際このとき適当な weight α に関するモジュライ空間 $M^{\alpha}_{\mathbf{P}^1}(2,\mathbf{t},\mathcal{O}(-t_4))$ は [9] で構成されている岡本初期値空間に一致していることが確かめられる．そして，RH の properness から，以下の幾何学的パンルベ性の性質が成り立つことは明らかとなる．

Definition 3.1. (by K. Iwasaki) 任意の点 $x\in M^{\alpha}_{\mathcal{C}}(r,\tilde{\mathbf{t}},\mathcal{O})$ と $\pi(x)$ を出発する任意の path γ が与えられたとき x を通る γ の lift$\tilde{\gamma}$ で $T_{\gamma}\subset s(\Theta_X)|_{\tilde{\gamma}}$ を満たすものが取れるとき微分方程式 s は幾何学的パンルベ性を持つと言う．ここで $T_{\tilde{\gamma}}$ は $\tilde{\gamma}$ の tangent bundle を表す．

もともとパンルベ性は関数論的に定義されていたものであるが，上の幾何学的パンルベ性を満たせば従来のパンルベ性が成り立つことがわかる．パンルベ性はもともとパンルベ方程式を特徴付けるための重要な性質であった．その証明は多数あるが，上の幾何学的パンルベ性の形から導くのが最も簡明に見える．

参考文献

[1] D. Arinkin, *Orthogonality of natural sheaves on moduli stacks of* SL(2)*-bundles with connections on* $\mathbf{P}^1$ *minus 4 points*, Selecta Math. (N.S.) **7** (2001), no. 2, 213–239.

[2] D. Arinkin, S. Lysenko, *On the moduli of* SL(2)*-bundles with connections on* $\mathbf{P}^1\setminus\{t_1,\ldots,t_4\}$. Internat. Math. Res. Notices 1997, no. 19, 983–999.

[3] D. Arinkin, S. Lysenko, *Isomorphisms between moduli spaces of* $SL(2)$*-bundles with connections on* $\mathbf{P}^1\setminus\{x_1,\ldots,x_4\}$. Mathematical Research Letters 1997, **4**, 181–190.

[4] P. Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Springer-Verlag, Berlin, 1970, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163.

[5] R. Fuchs, *Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen wesentlich singulären Stellen*, Math. Ann. **63** (1907), 301–321.

[6] M. Inaba, K. Iwasaki and M.-H. Saito, *Bäcklund Transformations of the Sixth Painlevé Equation in Terms of Riemann-Hilbert Correspondence*, Int. Math. Res. Not. (2004), no. 1, 1–30.

[7] H. Nakajima, *Hyper-Kähler structures on moduli spaces of parabolic Higgs bundles on Riemann surfaces*, Moduli of vector bundles (Sanda, 1994; Kyoto, 1994), 199–208, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 179, Dekker, New York, 1996.

[8] N. Nitsure, *Moduli of Semistable Logarithmic Connections*, Jour. of Amer. Math. Soc., **6**, No.3, 1993.

[9] K. Okamoto, *Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé, Espaces des conditions initiales*, Japan. J. Math. **5**, (1979), 1–79.

[10] Carlos T. Simpson, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1994), no. 79, 47–129.

[11] Carlos T. Simpson, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1994), no. 80, 5–79 (1995).