代数幾何学シンポジウム記録
2004年度 pp.30-40

Counterexamples to Hilbert's fourteenth problem in low dimensions

京都大学数理解析研究所
黒田 茂

1 序

体 K 上の n 変数多項式環 $K[X] = K[X_1, \ldots, X_n]$ の商体を $K(X)$ とする．中間体 $K \subset L \subset K(X)$ に対し，$K[X]$ の K 部分代数 $L \cap K[X]$ の有限生成性を問う問題はヒルベルトの第14問題と呼ばれる．1954年にザリスキ [18] は，L の K 上の超越次数が2以下ならばこの問題の答えは肯定的であることを示した．一方，永田 [15] は1958年に初めての反例を $n = 32$ の場合に超越次数が4の中間体 L として与えた．ヒルベルトの第14問題に対するある n における反例は，それより大きな n における反例にもなる．また，より大きな超越次数を持つ反例の存在も容易に従う．そこで，どれだけ小さな n における反例が，またどれだけ小さな超越次数を持つ反例が存在するかが問題となる．

1990年にロバーツ [17] は $n = 7$ の場合に超越次数が6の新しい種類の反例を与えた．これを改良することで，フロイデンバーグ [4] は $n = 6$ で超越次数が5の反例を，さらにデイグルとフロイデンバーグ [1] は $n = 5$ で超越次数が4の反例を構成した．ヒルベルトの第14問題は，これまで $n = 3, 4$ の場合と，L の超越次数が3の場合だけが未解決のまま残されていたが，筆者 [10] が以下の反例を与えてこれらを否定的に解決した．なお，ロバーツの反例の高次元化や一般化には，小島と宮西 [5] や筆者 [8] によるものがある．

$n = 3$ とする．正整数 γ と $\delta_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq 2)$ に対し

$$\begin{aligned} F_1 &= X_1^{\delta_{2,1}} X_2^{-\delta_{2,2}} - X_1^{-\delta_{1,1}} X_2^{\delta_{1,2}}, \\ F_2 &= X_3^{\gamma} - X_1^{-\delta_{1,1}} X_2^{\delta_{1,2}}, \\ F_3 &= 2X_1^{\delta_{2,1}-\delta_{1,1}} X_2^{\delta_{1,2}-\delta_{2,2}} - X_1^{-2\delta_{1,1}} X_2^{2\delta_{1,2}} \end{aligned} \tag{1.1}$$

と定める．このとき次が成り立つ．

定理 1.1 ([10, Theorem 1.1]) K の標数は零とする．このとき $\delta_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq 2)$ が

$$\frac{\delta_{1,1}}{\delta_{1,1} + \delta_{2,1}} + \frac{\delta_{2,2}}{\delta_{2,2} + \delta_{1,2}} < \frac{1}{2} \tag{1.2}$$

を満たすならば，K 代数 $K(F_1, F_2, F_3) \cap K[X]$ は有限生成でない．

なお，$\delta_{1,1}\delta_{2,2} \neq \delta_{1,2}\delta_{2,1}$ のとき，$K(X)$ は $K(F_1, F_2, F_3)$ の代数拡大であり，その拡大次数は $2\gamma|\delta_{1,1}\delta_{2,2} - \delta_{1,2}\delta_{2,1}|$ である．実際，$M = K(X_1^{-\delta_{1,1}}X_2^{\delta_{1,2}}, X_1^{\delta_{2,1}}X_2^{-\delta_{2,2}}, X_3^{\gamma})$ に対し，M の $K(F_1, F_2, F_3)$ 上の拡大次数および $K(X)$ の M 上の拡大次数は，それぞれ 2 および $\gamma|\delta_{1,1}\delta_{2,2} - \delta_{1,2}\delta_{2,1}|$ である．

ところで $n = 3$ の場合，ヒルベルトの第 14 問題の答えは様々な条件の下で肯定的であり，反例の存在する余地はかなり限られる．例えば，多項式環 $K[X]$ への群作用による不変式環の有限生成性の問題は，ヒルベルトが第 14 問題を考えるきっかけとなったそもそもの問題だが，その答えは $n \leq 3$ では肯定的である．なお，永田の反例は多項式環への線形な群作用による不変式環として与えられた．線形な群作用による不変式環に対するヒルベルトの第 14 問題は向井 [14] によって研究され，様々な新しい事実が明らかにされている．また，多項式環 $K[X]$ における微分 D の核 $K[X]^D$ の有限生成性の問題も，ヒルベルトの第 14 問題の重要な場合の一つだが，ザリスキ [18] より $n \leq 3$ ならばその答えは肯定的である．ここで，一般に可換な K 代数 A に対し，K 線形写像 $D : A \to A$ は任意の $a, b \in A$ に対して $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ が成り立つとき，A における微分という．K 部分ベクトル空間 $V \subset A$ に対して

$$V^D = \{a \in V \mid D(a) = 0\}$$

は V の K 部分ベクトル空間となるが，さらに V が K 部分代数ならば V^D は V の K 部分代数になる．D は，任意の $a \in A$ に対し $D^r(a) = 0$ となる $r \in \mathbf{N}$ が存在するとき，局所冪零であるという．$K[X]$ における微分 D は $K(X)$ における微分に拡張でき，$K[X]^D = K(X)^D \cap K[X]$ が成り立つ．$K(X)^D$ は K を含む $K(X)$ の部分体なので，D の核 $K[X]^D$ の有限生成性の問題はヒルベルトの第 14 問題の一部である．

ロバーツの反例 [17] や，それに端を発して構成された反例 [1], [4], [5], [8] は，$K[X]$ における局所冪零微分の核として得られる．特に，デイグルとフロイデンバーグ [1] から，$n \geq 5$ では核が有限生成でない $K[X]$ の局所冪零微分が存在する．$K[X]^D$ の有限生成性の問題は，局所冪零性を仮定しない一般の微分 D に対してもこれまで $n = 4$ の場合は未解決だったが，以下により否定的に決着した．

$n = 4$ とする．整数 γ と $\delta_{i,j}$ $(1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq 4)$ は $\gamma, \delta_{i,j} \geq 1$ および $\delta_{i,4} \geq 0$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ を満たすとする．このとき，ローラン多項式

$$\begin{aligned} G_1 &= x_4^{\gamma} - x_1^{-\delta_{1,1}}x_2^{\delta_{1,2}}x_3^{\delta_{1,3}}x_4^{\delta_{1,4}}, \\ G_2 &= x_4^{\gamma} - x_1^{\delta_{2,1}}x_2^{-\delta_{2,2}}x_3^{\delta_{2,3}}x_4^{\delta_{2,4}}, \\ G_3 &= x_4^{\gamma} - x_1^{\delta_{3,1}}x_2^{\delta_{3,2}}x_3^{-\delta_{3,3}}x_4^{\delta_{3,4}} \end{aligned} \tag{1.3}$$

に対して次が成り立つ．

定理 1.2 (**[9, Theorem 1.1]**) K の標数は零とする．このとき $\delta_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ が

$$\frac{\delta_{1,1}}{\delta_{1,1} + \min\{\delta_{2,1}, \delta_{3,1}\}} + \frac{\delta_{2,2}}{\delta_{2,2} + \min\{\delta_{3,2}, \delta_{1,2}\}} + \frac{\delta_{3,3}}{\delta_{3,3} + \min\{\delta_{1,3}, \delta_{2,3}\}} < 1 \tag{1.4}$$

を満たすならば，K 代数 $K(G_1,G_2,G_3)\cap K[X]$ は有限生成でない．また，$K[X]$ における零でない局所冪零微分の核は $K(G_1,G_2,G_3)\cap K[X]$ を含まない．

一方，[11, Theorem 1.4] から次が従う．

定理 1.3 ベクトル $(-\delta_{1,1},\delta_{1,2},\delta_{1,3})$, $(\delta_{2,1},-\delta_{2,2},\delta_{2,3})$, $(\delta_{3,1},\delta_{3,2},-\delta_{3,3})$ が 1 次独立ならば，$K[X]^D=K(G_1,G_2,G_3)\cap K[X]$ を満たす $K[X]$ における微分 D が存在する．

不等式 (1.4) が成り立つとき $(-\delta_{1,1},\delta_{1,2},\delta_{1,3})$, $(\delta_{2,1},-\delta_{2,2},\delta_{2,3})$, $(\delta_{3,1},\delta_{3,2},-\delta_{3,3})$ は 1 次独立なので，定理 1.2 と 1.3 から $n=4$ の場合に核が有限生成でない $K[X]$ の微分の存在が従う．例えば，

$$
\begin{aligned}
D(x_1)&=tx_1x_3^{t+1}+tx_1x_2^{t+1}+(1-t)x_1^{t+2},\\
D(x_2)&=tx_2x_1^{t+1}+tx_2x_3^{t+1}+(1-t)x_2^{t+2},\\
D(x_3)&=tx_3x_2^{t+1}+tx_3x_1^{t+1}+(1-t)x_3^{t+2},\\
D(x_4)&=(2t^2+t-1)x_1^tx_2^tx_3^t
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

から定まる $K[X]$ における微分の核は $t\geq 3$ ならば有限生成でない．実際，$K[X]^D$ は，$\gamma=1$ とし，$\delta_{i,j}$ を $i=j$ のときは 1, $j=4$ のときは 0, それ以外のときは t とした場合の $K(G_1,G_2,G_3)\cap K[X]$ と等しい．

筆者の現在の技術で構成可能な $n=4$ における反例 L では，$K[X]$ における自明でない任意の局所冪零微分によって 0 に写らない元が $L\cap K[X]$ に必ず含まれ，$K[X]$ における局所冪零微分の核としては実現できない．$K[X]$ における局所冪零微分の核の有限生成性の問題は，$n=4$ ではいくつかの部分的な肯定解 [2], [6], [13] はあるが完全な解決には至っていない．

ヒルベルトの第 14 問題に対する反例のうち，ロバーツ [17] に端を発する [1], [4], [5], [8] や定理 1.1 や 1.2 で与えたものと同種のものは，実はこれら以外にも非常にたくさん存在し，現在知られているものは特殊な具体例に過ぎない．本稿では，こうした反例を全て包括でき，様々な反例を統一的に記述し，また組織的に構成することが可能な一般的な枠組みについて説明する．

2 反例の構成

以下，K の標数は零とする．$K[Y]=K[Y_1,\dots,Y_m]$ を K 上の m 変数多項式環とする．K 部分代数 $B\subset K[Y]$ と整数成分の $n\times m$ 行列 $\Omega=(\omega_{i,j})_{i,j}$, 部分群 $M\subset\mathbf{Z}^n$ からなる三つ組 $\mathcal{D}=(B,\Omega,M)$ を考える．$K[M]=\bigoplus_{s\in M}K\mathrm{e}(s)$ を M の群環とする．ただし，記号 $\mathrm{e}(s)$ $(s\in M)$ に対し，積を $\mathrm{e}(s)\mathrm{e}(s')=\mathrm{e}(s+s')$ $(s,s'\in M)$ により定める．準同型 $\Phi_\Omega:K[Y]\otimes_K K[M]\to K(X)$ を，$Y_j\otimes 1\mapsto X_1^{\omega_{1,j}}\cdots X_n^{\omega_{n,j}}$ $(j=1,\dots,m)$ および $1\otimes\mathrm{e}(s)=X^s$ $(s\in M)$ により定義する．ただし，$\mathbf{Z}^n$ の元 $a=(a_1,\dots,a_n)$ と $\mathbf{Z}^m$ の元 $b=(b_1,\dots,b_m)$ に対し，それぞれ $X^a=X_1^{a_1}\cdots X_n^{a_n}$ および $Y^b=Y_1^{b_1}\cdots Y_m^{b_m}$ と定める．そして，$K[\mathcal{D}]=\Phi_\Omega(B\otimes_K K[M])$ の商体を $K(\mathcal{D})$ と表す．このとき，三つ組 $\mathcal{D}$ が条件

(1°) $K(\mathcal{D})\cap K[X]\subset K[\mathcal{D}]$　および　(2°) $K[\mathcal{D}]\cap K[X]$ は有限生成でない

を満たすならば，$K(\mathcal{D})$ はヒルベルトの第 14 問題の反例となる．

$K[Y]$ における微分 D は，$D(Y_i)\in K[Y_1,\dots,Y_{i-1}]$ $(i=1,\dots,m)$ を満たすとき三角であるという．D は三角ならば局所冪零である．また，$K[Y]$ の三角微分 D が $D(Y_1)\neq 0$ を満たすとき，核 $K[Y]^D$ は

$$\Psi_i^D=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D^k(Y_i)}{k!}\left(-\frac{Y_1}{D(Y_1)}\right)^k \quad (i=2,\dots,m) \tag{2.1}$$

によって生成される (例えば [3, Corollary 1.3.23] を見よ)．

我々が反例を構成するために実際に用いるのは，$B=K[Y]^D=K[\Psi_2^D,\dots,\Psi_m^D]$ の場合の三つ組である．ここで，D は $D(Y_i)\neq 0$ $(i=1,\dots,m)$ を満たす $K[Y]$ の三角微分とする．このような三つ組 $\mathcal{D}=(K[Y]^D,\Omega,M)$ をうまく選ぶことで，ヒルベルトの第 14 問題に対する実に様々な反例を $K(\mathcal{D})$ として得ることができる．

例えば，定理 1.1 で与えた反例は，この構成法により次のようにして記述できる．$(m,n)=(4,3)$ とし，$D(Y_i)=1$ $(i=1,2,3)$, $D(Y_4)=Y_1$ から定まる $K[Y]$ の三角微分を考える．$K[Y]^D$ は $\Psi_i^D=Y_i-Y_1$ $(i=2,3)$ と $\Psi_4^D=Y_4-Y_1^2/2$ によって生成される．このとき，定理 1.1 で与えた反例 $K(F_1,F_2,F_3)$ は，三つ組み $\mathcal{D}=(K[Y]^D,\Omega,\{0\})$ に対する $K(\mathcal{D})$ と等しい．ここで，

$$\Omega=\begin{pmatrix} -\delta_{1,1} & \delta_{2,1} & 0 & -\delta_{1,1}+\delta_{2,1} \\ \delta_{1,2} & -\delta_{2,2} & 0 & \delta_{1,2}-\delta_{2,2} \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

とする．実際，$F_i=\Phi_\Omega(\Psi_{i+1}^D\otimes 1)$ $(i=1,2)$ および $F_3=2\Phi_\Omega(\Psi_4^D\otimes 1)$ が成り立つ．

以下では (1°) や (2°) が成り立つための三つ組 $\mathcal{D}$ に関するいくつかの十分条件を与える．

準同型 $\mathbf{Z}^m\times M\ni(b,s)\mapsto\Omega\cdot b+s\in\mathbf{Z}^n$ が単射のとき，(Ω,M) は単射的であるという．(Ω,M) が単射的であることと Φ_Ω が単射であることは同値である．上の例では $(\Omega,\{0\})$ は単射的でない．(Ω,M) が単射的でないと様々な難しさが生じるので，本稿では主に (Ω,M) が単射的な場合を扱う．

$\operatorname{Frac}B$ を K 代数 B の商体とし，$K[Y^{\pm1}]$ を $Y_1,\dots,Y_m$ のローラン多項式環とする．このとき，(1°) に関して一般に次が成り立つ．

命題 2.1 (Ω,M) は単射的であるとする．このとき，$(\operatorname{Frac}B)\cap K[Y^{\pm1}]\subset B$ ならば $K(\mathcal{D})\cap K[X]\subset K[\mathcal{D}]$ が成り立つ．

一般に，$D(Y_i)\neq 0$ $(i=1,\dots,m)$ を満たす $K[Y]$ における局所冪零微分 D に対し，$(\operatorname{Frac}K[Y]^D)\cap K[Y^{\pm1}]=K[Y]^D$ が成り立つ．よって，命題 2.1 より次が従う．

系 2.2 D は $D(Y_i)\neq 0$ $(i=1,\dots,m)$ を満たす $K[Y]$ の局所冪零微分とする．このとき (Ω,M) が単射的ならば，三つ組 $\mathcal{D}=(K[Y]^D,\Omega,M)$ に対し $K(\mathcal{D})\cap K[X]\subset K[\mathcal{D}]$ が成り立つ．

3 ニュートン多面体とイニシャル形式

$K[Y^{\pm 1}]$ の元 $g=\sum_{b\in\mathbf{Z}^m}\nu_b Y^b$ に対し，$\mathbf{Z}^m$ の部分集合 $\mathrm{supp}(g)=\{b\mid \nu_b\neq 0\}$ を g の台と呼ぶ．$K[Y^{\pm 1}]$ の部分集合 V に対し，$\mathrm{supp}(V)=\bigcup_{g\in V}\mathrm{supp}(g)$ と定める．$K[Y]$ の微分 D に対し

$$\mathrm{supp}(D)=\mathrm{supp}(\{Y_i^{-1}D(Y_i)\mid i=1,\ldots,m\}) \tag{3.1}$$

を D の台と呼ぶ．また，$\mathrm{supp}(D)$ の $\mathbf{R}^m$ における凸包 $\mathrm{New}(D)$ を D のニュートン多面体と呼ぶ．$\mathbf{R}^m$ の部分集合 S に対し，$\mathrm{supp}(g)\subset S$ を満たす $g\in V$ 全体を V^S と表す．$\mathbf{R}^m$ の部分集合の列 $S=(S_1,\ldots,S_r)$ に対しては $V^S=\bigcap_{i=1}^r V^{S_i}$ と定める．

ニュートン多面体の概念は，ヒルベルトの第14問題の研究において非常に重要である．例えば，微分の核の有限生成性に関して次が成り立つ．

定理 3.1 **([6, Theorem 1.3])** $\mathrm{New}(D)$ が2次元以下であるような $K[Y]$ の微分の核 $K[Y]^D$ は有限生成である．

なお，$\mathrm{New}(D)$ が3次元以上では $K[Y]^D$ が有限生成でない $K[Y]$ の微分 D は多数存在する．例えば (1.5) のように定めた微分の場合，核は有限生成でないが

$$\mathrm{supp}(D)=\{(t+1,0,0,0),(0,t+1,0,0),(0,0,t+1,0),(t,t,t,-1)\}$$

であり，$\mathrm{New}(D)$ は3次元である．

さて，各 $s\in M$ に対し $B_s^{\Omega,+}=B^{P_s}$ と定める．ここで，

$$P_s=\{b\in\mathbf{R}^m\mid \Omega\cdot b+s\in(\mathbf{R}_{\geq 0})^n\} \tag{3.2}$$

とおいた．すると，$B_M^{\Omega,+}=\bigoplus_{s\in M}B_s^{\Omega,+}\otimes\mathbf{e}(s)$ は $B\otimes_K K[M]$ の M 次数付き K 部分代数となる．また，一般に $\Phi_\Omega(B_M^{\Omega,+})\subset K[\mathcal{D}]\cap K[X]$ が成り立つ．

命題 3.2 (Ω,M) が単射的ならば，$\Phi_\Omega(B_M^{\Omega,+})=K[\mathcal{D}]\cap K[X]$ が成り立つ．特に，このとき $K[\mathcal{D}]\cap K[X]$ は $B_M^{\Omega,+}$ と同型である．

命題3.2より，(Ω,M) が単射的な場合には (2°) の成立と $B_M^{\Omega,+}$ が有限生成でないことは同値である．$B_M^{\Omega,+}$ は B の元の台の概念を用いて定義されており，(2°) の成立を調べるために $\mathbf{R}^m$ 内の図形の組合せ論的な議論を使うことが可能となる．

一般に，$P\subset\mathbf{R}^m$ と $\omega\in\mathbf{R}^m$ に対し，任意の $b\in P$ に対して $\omega\cdot(a-b)\leq 0$ となる $a\in P$ 全体の集合を $\mathrm{face}_\omega(P)$ とおく．$Q\subset P$ は，ある $\omega\in\mathbf{R}^m$ に対して $Q=\mathrm{face}_\omega(P)$ となるとき，P の面であるという．

部分集合 $\emptyset\neq I\subset\{1,\ldots,n\}$ と $\mathbf{u}\in\mathrm{supp}(B)$ に対し，$r(\Omega\cdot\mathbf{u})+s$ の全ての成分が非負であり，第 i 成分 $(i\in I)$ が 0 であるような正数 r と $s\in M$ の組 (r,s) 全体を $U_{\mathcal{D},I,\mathbf{u}}$ とおく．

命題 3.3 (Ω, M) は単射的であるとする．次を満たす $\emptyset \neq I \subset \{1, \ldots, n\}$ と $\mathbf{u} \in \mathrm{supp}(B)$ が存在するならば $B_M^{\Omega,+}$ は有限生成でない．

(a) $(\mathbf{R}_{\geq 0})\mathbf{u}$ は $\mathrm{supp}(B)$ が生成する $\mathbf{R}^m$ 内の錐の面である．

(b) 任意の $(r, s) \in U_{\mathcal{D},I,\mathbf{u}}$ に対し，$r\mathbf{u}$ は $\mathrm{supp}(B_s^{\Omega,+})$ に含まれない．

(c) ある $(r, s) \in U_{\mathcal{D},I,\mathbf{u}}$ と $(\delta, \epsilon) \in \mathbf{Z}^m \times M$ が存在し，任意の $l \in \mathbf{N}$ に対して $lr\mathbf{u} + \delta$ は $\mathrm{supp}(B_{ls+\epsilon}^{\Omega,+})$ に含まれる．

$\mathbf{u} \in \mathrm{supp}(B)$ が $\mathbf{R}^m$ の座標単位ベクトル $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ のいずれかと等しければ，条件 (a) は任意の B に対して成り立つ．

次に，D を $D(Y_i) \in K[Y_1, \ldots, Y_{m-1}]$ $(i = 1, \ldots, m)$ および $D(Y_m) \neq 0$ を満たす $K[Y]$ の微分とし，三つ組 $\mathcal{D} = (K[Y]^D, \Omega, M)$ と部分集合 $I \subset \{1, \ldots, m\}$ および $\mathbf{u} = \mathbf{e}_m$ に対して (b) と (c) が成り立つための条件について考える．

命題 3.4 (Ω, M) は単射的であるとする．三つ組 $\mathcal{D} = (K[Y]^D, \Omega, M)$ と部分集合 $I \subset \{1, \ldots, m\}$ および $\mathbf{u} = \mathbf{e}_m$ に対し，(b) が成り立つための必要十分条件は，$r = 1$ である全ての $(r, s) \in U_{\mathcal{D},I,\mathbf{u}}$ に対して $\mathbf{u}$ が $\mathrm{supp}(B_s^{\Omega,+})$ に含まれないことである．特に，$D(F) = D(Y_m)$ を満たす任意の $F \in K[Y_1, \ldots, Y_{m-1}]$ に対し，$\omega_i \cdot b < 0$ となる $b \in \mathrm{supp}(Y_m^{-1}F)$ と $i \in I$ が存在すれば (b) は成り立つ．

微分 D に対し，さらに $D(F) = D(Y_m)$ を満たす $F \in K[Y_1, \ldots, Y_{m-1}]$ の存在を仮定する．(c) が成り立つためには，ある $(r, s) \in U_{\mathcal{D},I,\mathbf{u}}$ と $G \in K[Y_1, \ldots, Y_{m-1}]^D \setminus \{0\}$ および $\epsilon \in M$ が存在し，各 $l \in \mathbf{N}$ に対し $GY_m^{lr} + (Y_m$ について低次の項$)$ という形の元が $(K[Y]^D)^{P_{ls+\epsilon}}$ に含まれればよい．これが成り立つためには色々な条件が必要になるので，詳細は割愛する．ここでは凸多面体 $P \subset \mathbf{R}^m$ と $l \in \mathbf{N}, G \in (K[Y_1, \ldots, Y_{m-1}]^D)^{P - l\mathbf{e}_m} \setminus \{0\}$ に対し，$GY_m^l + (Y_m$ について低次の項$)$ という形の $(K[Y]^D)^P$ の元の存在を証明するための方法を説明する．

$K[Y]$ の元 $\phi = \sum_{b \in \mathbf{Z}^m} \nu_b Y^b$ と $\mathbf{R}^m$ の部分集合 S に対し，$\phi_S = \sum_{b \in S \cap \mathbf{Z}^m} \nu_b Y^b$ と定める．$\mathbf{R}^m$ の部分集合の列 $S = (S_1, \ldots, S_r)$ に対しては，$\phi_S = \phi_{S_1 \cap \cdots \cap S_r}$ と定める．$\omega \in \mathbf{R}^m$ に対し，$\mathrm{in}_\omega(\phi) = \phi_U$ $(U = \mathrm{face}_\omega(\mathrm{New}(\phi)))$ を ϕ の ω に関するイニシャル形式と呼ぶ．K 部分ベクトル空間 $V \subset K[Y]$ に対し，$\{\mathrm{in}_\omega(\phi) \mid \phi \in V\}$ が生成する K ベクトル空間を $\mathrm{in}_\omega(V)$ と表す．$\omega \in \mathbf{R}^m \setminus \{0\}$ と $\mathbf{R}^m$ の半空間の列 $H = (H_1, \ldots, H_r)$ に対し，$\phi \in K[Y] \setminus K[Y]^H$ の ω に関する H イニシャル形式 $\mathrm{in}_\omega^H(\phi)$ を，$\mathrm{in}_\omega^H(\phi) = \mathrm{in}_{\eta_i}(\mathrm{in}_\omega(\phi_H))$ により定義する．ここで，i は $\mathrm{supp}(\phi) \not\subset \bigcap_{j=1}^i H_j$ を満たす最小の番号とし，$\eta_i \in \mathbf{R}^m$ はある $\alpha_i \in \mathbf{R}$ に対して $H_i = \{b \in \mathbf{R}^m \mid \eta_i \cdot b \geq \alpha_i\}$ を満たすとする．$\mathrm{in}_\omega^H(\phi)$ は η_i の選び方に依らずに定まる．

次の性質を満たす部分集合 $\mathcal{B} \subset V \setminus V^H$ を，ω に関する V の H 集合という．

(i) 各 $\phi \in \mathcal{B}$ に対し，$\mathrm{in}_\omega(\phi) \neq \mathrm{in}_\omega(\phi)_H$ が成り立つ．

(ii) 任意の $\psi \in V \setminus V^H$ に対し，$\mathrm{in}_\omega^H(\phi) = \mathrm{in}_\omega^H(\psi)$ を満たす $\phi \in \mathcal{B}$ が存在する．

補題 3.5 V を $K[Y]$ の有限次元 K 部分ベクトル空間とする．このとき，ω に関する V の H 集合が存在するならば $\mathrm{in}_\omega(V^H) = \mathrm{in}_\omega(V)^H$ が成り立つ．

補題 3.5 の証明は構成的であり，ω に関する V の H 集合が明示的に与えられれば，各 $\phi' \in \mathrm{in}_\omega(V)^H$ に対して $\phi' = \mathrm{in}_\omega(\phi)$ を満たす $\phi \in V^H$ を具体的に構成することが可能である．

さて，凸多面体 $P \subset \mathbf{R}^m$ に対し，$\bigcap_{j=1}^r H_j = P$ を満たす半空間の列 $H = (H_1, \ldots, H_r)$ をとる．このとき，$G(Y_m - F)^l$ を含み $-\mathbf{e}_m$ に関する H 集合を持つような有限次元 K 部分ベクトル空間 $V \subset K[Y]^D$ が存在するならば，$GY_m^l + (Y_m$ について低次の項) という形の $(K[Y]^D)^P$ の元は存在する．実際，$\mathrm{in}_{-\mathbf{e}_m}(G(Y_m - F)^l) = GY_m^l$ は $\mathrm{in}_{-\mathbf{e}_m}(V)^P$ に含まれるので，補題 3.5 より $\mathrm{in}_{-\mathbf{e}_m}(\phi) = GY_m^l$ を満たす $\phi \in V^P$ が存在する．$\mathrm{in}_{-\mathbf{e}_m}(\phi) = GY_m^l$ だから ϕ は $GY_m^l + (Y_m$ について低次の項) と表せる．このような V の存在は，微分のニュートン多面体の組合せ論を駆使した巧妙な方法を用いて示される．

4 斉次三角微分

この節では，$K[Y]^D$ の構造をより詳しく分析するために幾つかの概念を定義する．

$K[Y]$ の局所冪零微分 D は，$D(Y_i) \neq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ を満たし New(D) の次元が $m-1$ 以下のとき斉次であるという．

命題 4.1 D は $K[Y]$ の斉次な三角微分とする．このとき，New(D) の次元は $m-1$ である．また，任意の $\delta, \delta' \in \mathrm{New}(D)$ に対して $\nu \cdot (\delta - \delta') = 0$ となる $\mathbf{N}^m$ の元 $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ で $\nu_1 = 1$ であるものが唯一つ存在する．

斉次な三角微分 D に対し，$m-1$ 個の自然数の組 $(\nu_2, \ldots, \nu_m)$ を D の型と呼ぶ．

予想 4.2 $K[Y]$ の斉次な局所冪零微分のニュートン多面体の次元は $m-1$ である．

次の命題から，同じ型を持つ斉次な三角微分の台は有限種類しか存在しない．

命題 4.3 $D(Y_i) \neq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ を満たす $K[Y]$ の微分 D と自然数 $\nu_2, \ldots, \nu_m$ に対し，次は同値である．

(i) D は三角かつ斉次で型が $(\nu_2, \ldots, \nu_m)$ である．

(ii) 各 $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対し，任意の $(b_1, \ldots, b_m) \in \mathrm{supp}(D(Y_i))$ は $b_j = 0$ $(j \geq i)$ かつ $b_1 - \nu_i + 1 + \sum_{j=2}^{i-1} \nu_j b_j = 0$ を満たす．

一般に，$K[Y]$ の微分 D に対し，$\{\delta - \delta' \mid \delta, \delta' \in \mathrm{supp}(D)\}$ が生成する $\mathbf{Z}^m$ の部分加群を M_D とおく．各 $\gamma \in \mathbf{Z}^m/M_D$ に対し，$\mathbf{Z}^m/M_D$ における像が γ と等しい $b \in (\mathbf{Z}_{\geq 0})^m$ に対する Y^b 全体が生成する K ベクトル空間を $K[Y]_\gamma$ と定める．このとき，$K[Y]^D$ に自然な $\mathbf{Z}^m/M_D$ 次数付け $K[Y]^D = \bigoplus_{\gamma \in \mathbf{Z}^m/M_D} (K[Y]_\gamma^D)$ が定まる．D を型が $(\nu_2, \ldots, \nu_m)$ である斉次な三角微分とし，$\nu_1 = 1$ とおく．このとき，$\mathbf{e}_i \mapsto \nu_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ から定まる準同型 $\mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z}$ は同型 $\mathbf{Z}^m/M_D \to \mathbf{Z}$ を導く．この同型により $\mathbf{Z}^m/M_D$ を $\mathbf{Z}$ と同一視したとき，各 $i = 1, \ldots, m$ に対し Y_i の $\mathbf{Z}^m/M_D$ 次数は ν_i と等しい．

$K[Y]$ の三角微分 D は，$D(Y_i) \in K[Y_1,\ldots,Y_r] \setminus \{0\}$ $(i>r)$ を満たし，さらに D の $K[Y_1,\ldots,Y_r]$ への制限が斉次となるような $r \in \{1,\ldots,m\}$ が存在するとき，半斉次であるという．半斉次な三角微分 D の型を次のように定義する．D の $K[Y_1,\ldots,Y_r]$ への制限 D_r の型を $(\nu_2,\ldots,\nu_r)$ とする．各 $i=r+1,\ldots,m$ に対し，$D(Y_i)$ を $\mathbf{Z}^r/M_{D_r}$ 斉次成分 $f_{i,\gamma} \in K[Y_1,\ldots,Y_r]_\gamma$ $(\gamma \in \mathbf{Z}^r/M_{D_r})$ の和 $\sum_\gamma f_{i,\gamma}$ の形に表す．前の段落で述べたように $\mathbf{Z}^r/M_{D_r}$ は $\mathbf{Z}$ と同型である．$f_{i,\gamma} \neq 0$ となる $\gamma \in \mathbf{Z}^r/M_{D_r}$ に対応する整数を小さい順に $\nu_{i,1},\ldots,\nu_{i,\alpha_i}$ とおく．このとき，D の型を

$$(\nu_2,\ldots,\nu_r;\nu_{r+1,1},\ldots,\nu_{r+1,\alpha_{r+1}};\cdots;\nu_{m,1},\ldots,\nu_{m,\alpha_m}) \tag{4.1}$$

と定める．各 i および j に対し，整数 $\nu_{i,j}$ は正である．また，$\alpha_{r+1}=1$ ならば D を $K[Y_1,\ldots,Y_{r+1}]$ に制限したものも斉次であり，その型は $(\nu_2,\ldots,\nu_r,\nu_{r+1,1})$ となる．

5 応用

$m=4$ とし，$K[Y]$ における半斉次な三角微分 D で型が $(\nu_2,\nu_3;\nu_{4,1},\ldots,\nu_{4,\alpha})$ であるものを考える．$\alpha=1$ ならば D は斉次である．この節では，$K(\mathcal{D}) \cap K[X]$ が有限生成でないための三つ組 $\mathcal{D}=(K[Y]^D,\Omega,M)$ に関する十分条件を与える．証明は略すが，前節までの議論の応用として得られる．

$D(Y_1) \in K \setminus \{0\}$ なので，D を $D(Y_1)^{-1}D$ と取り替えることで $D(Y_1)=1$ と仮定する．自然数 s と整数 $s-1 \le s' \le (\nu_3-1)/\nu_2$，および $\mu_1,\mu_{2,i} \in K$ $(i=s-1,\ldots,s')$ で $\mu_1,\mu_{2,s-1},\mu_{2,s'} \neq 0$ を満たすものが存在し

$$D(Y_2)=\mu_1 Y_1^{\nu_2-1},\ D(Y_3)=Y_1^{\nu_3-1}\sum_{i=s-1}^{s'}\mu_{2,i}(Y_1^{-\nu_2}Y_2)^i \tag{5.1}$$

と表せる．このとき，Ψ_3^D における $Y_1^{\nu_3}$ の係数は

$$c_3=\sum_{i=s-1}^{s'}\frac{(-\mu_1)^{i+1}\mu_{2,i}}{i+1}\prod_{j=1}^{i}\frac{i-j+1}{\nu_3-(i-j)\nu_2} \tag{5.2}$$

となる．

各 $j \in \{1,2,3\}$ に対し，$\nu_i\omega_{k,j} < \nu_j\omega_{k,i}$ $(i \in \{1,2,3\} \setminus \{j\})$ を満たす $k \in \{1,\ldots,n\}$ 全体の集合を I_j とおく．ただし，$\nu_1=1$ とする．各 $k \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$ に対し，有理数 $\tilde{\omega}_k$ を

$$\tilde{\omega}_k=\begin{cases}\min\{\omega_{k,2},(\nu_2-\nu_3 s^{-1})\omega_{k,1}+\omega_{k,3}s^{-1}\} & k \in I_1 \text{ のとき}\\ \min\{\omega_{k,1},(\nu_3-\nu_2 s')^{-1}(\omega_{k,3}-\omega_{k,2}s')\} & k \in I_2 \text{ のとき}\\ \min\{\omega_{k,1},\nu_2^{-1}\omega_{k,2}\} & k \in I_3 \text{ のとき}\end{cases}$$

と定める．各 $i \in \{1,\ldots,\alpha\}$ に対し，$\epsilon_k < \nu_{4,i}\tilde{\omega}_k/\nu_2$ $(k \in I_1)$ および $\epsilon_k < \nu_{4,i}\tilde{\omega}_k$ $(k \in I_j,$ $j=2,3)$，$\epsilon_k \le \nu_{4,i}\min\{\omega_{k,j}/\nu_j \mid j=1,2,3\}$ (それ以外の k) を満たす $(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n) \in \mathbf{R}^n$

全体を Δ_i とおく．各 $i \in \{1, \ldots, \alpha\}$ と $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \Delta_i$ に対し

$$\tau_1^i(\epsilon) = \max\left(\left\{\frac{\epsilon_k - \nu_{4,i}\omega_{k,1}}{\nu_{4,i}\tilde{\omega}_k - \nu_2\epsilon_k} \mid k \in I_1\right\} \cup \{0\}\right),$$
$$\tau_2^i(\epsilon) = \max\left(\left\{\frac{\nu_2\epsilon_k - \nu_{4,i}\omega_{k,2}}{\nu_{4,i}\tilde{\omega}_k - \epsilon_k} \mid k \in I_2\right\} \cup \{0\}\right),$$
$$\tau_3^i(\epsilon) = \max\left(\left\{\frac{\nu_3\epsilon_k - \nu_{4,i}\omega_{k,3}}{\nu_{4,i}\tilde{\omega}_k - \epsilon_k} \mid k \in I_3\right\} \cup \{0\}\right)$$

とおき，

$$\xi^i(\epsilon) = \frac{\nu_2\nu_3\tau_1^i(\epsilon)}{\gcd(\nu_2, \nu_3)s(\nu_2\tau_1^i(\epsilon) + 1)} + \frac{\nu_3\tau_2^i(\epsilon)}{(\nu_3 - \nu_2 s')(\tau_2^i(\epsilon) + \nu_2)} + \frac{\tau_3^i(\epsilon)}{\tau_3^i(\epsilon) + \nu_3} \tag{5.3}$$

と定める．

ϵ を $\Delta_1 \cap \Delta_\alpha$ の元とする．このとき全ての i に対し，ϵ は Δ_i に含まれる．各 $i \in \{1, \ldots, \alpha\}$ に対し，$j\nu_2 + k\nu_3 = \nu_{4,i}$ かつ

$$\frac{\nu_{4,i}\tau_3^i(\epsilon)}{\nu_2(\tau_3^i(\epsilon) + \nu_3)} \leq j \leq \frac{\nu_{4,i}}{\nu_3 - \nu_2 s'}\left(\frac{\nu_3}{\tau_2^i(\epsilon) + \nu_2} - s'\right)$$

を満たす $(j, k) \in (\mathbf{Z}_{\geq 0})^2$ に対する $(\Psi_2^D)^j(\Psi_3^D)^k$ 全体が生成する K ベクトル空間を $V^i(\epsilon)$ とおき，$\Psi_4^D - Y_4 + \sum_{i=1}^{\alpha} V^i(\epsilon)$ の元の台全体の集合を $\Sigma(\epsilon)$ と定める．K ベクトル空間 $\sum_{i=1}^{\alpha} V^i(\epsilon)$ は有限次元なので，$\Sigma(\epsilon)$ は有限集合である．$\alpha > 1$ のとき，有理数 $\eta_1(\epsilon), \ldots, \eta_4(\epsilon)$ を $\eta_1(\epsilon) = f_{1,\alpha}(\epsilon)$ および $\eta_2(\epsilon) = g_{1,\alpha}(\epsilon)$, $\eta_3(\epsilon) = (\nu_3 - \nu_2 s)\eta_1(\epsilon) + s\eta_2(\epsilon)$, $\eta_4(\epsilon) = \nu_{4,1}\nu_{4,\alpha}(\tau_1^1(\epsilon) - \tau_1^\alpha(\epsilon))$ により定義する．ただし，$i, j \in \{1, \alpha\}$ に対し

$$\begin{aligned} f_{i,j}(\epsilon) &= \nu_{4,i}\tau_1^i(\epsilon) - \nu_{4,j}\tau_1^j(\epsilon) + \nu_2\tau_1^i(\epsilon)\tau_1^j(\epsilon)(\nu_{4,i} - \nu_{4,j}), \\ g_{i,j}(\epsilon) &= \nu_{4,j} - \nu_{4,i} + \nu_2(\nu_{4,j}\tau_1^i(\epsilon) - \nu_{4,i}\tau_1^j(\epsilon)) \end{aligned} \tag{5.4}$$

とおく．また，$\bar{\epsilon} = (\epsilon^1, \epsilon^2) \in (\Delta_1 \cap \Delta_\alpha)^2$ に対し，

$$\eta'(\bar{\epsilon}) = \nu_{4,i}\frac{\eta_1(\epsilon^2) + \eta_2(\epsilon^2)\tau_1^i(\epsilon^1)}{1 + \nu_2\tau_1^i(\epsilon^1)} \tag{5.5}$$

と定める．ただし，i は $j \in \{1, \alpha\} \setminus \{i\}$ に対して $f_{1,\alpha}(\epsilon^1)g_{i,j}(\epsilon^2) \geq g_{1,\alpha}(\epsilon^1)f_{i,j}(\epsilon^2)$ となる $\{1, \alpha\}$ の元とする．

定理 5.1 (Ω, M) は単射的であるとする．また，$\gcd(\nu_2, \nu_3)$ は $\nu_{4,1}, \ldots, \nu_{4,\alpha}$ を割り切り，$c_3 \neq 0$ であるとする．このとき，次を満たす $\bar{\epsilon} = (\epsilon^1, \epsilon^2) \in (M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})^2$ が存在するならば $K(\mathcal{D}) \cap K[X]$ は有限生成でない．

(i) $\epsilon^1 = (\epsilon_1^1, \ldots, \epsilon_n^1)$ とおく．このとき，$\omega_{k,4} \geq \epsilon_k^1$ $(k = 1, \ldots, n)$ が成り立つ．

(ii) $i = 1, \alpha$ に対し，ϵ^1 と ϵ^2 は Δ_i に含まれ $\xi^i(\epsilon^1) \leq 1$ および $\xi^i(\epsilon^2) < 1$ が成り立つ．

(iii) 各 $k \in I_2 \cup I_3$ と $b \in \mathrm{supp}(\Psi_4^D - Y_4)$ に対し，$\omega_k \cdot b \geq \epsilon_k^1$ が成り立つ．

(iv) 各 $(b_1,\dots,b_4)\in\operatorname{supp}(D(Y_4))$ に対して次が成り立つ．
$\alpha=1$ のときは $b_2-\tau_1^1(\epsilon^1)b_1\geq\tau_1^1(\epsilon^1)(1-\nu_2)-1$．
$\alpha>1$ のときは $(b_1+1-\nu_2)\eta_1(\epsilon^1)+(b_2+1)\eta_2(\epsilon^1)+b_3\eta_3(\epsilon^1)-\eta_4(\epsilon^1)\geq 0$ および $(b_1+1-\nu_2)\eta_1(\epsilon^2)+(b_2+1)\eta_2(\epsilon^2)+b_3\eta_3(\epsilon^2)-\eta'(\bar{\epsilon})\geq 0$．

(v) 各 $S\in\Sigma(\epsilon^1)$ に対し，$\omega_k\cdot b<\epsilon_k^1$ および $\omega_{k,4}=\epsilon_k^1$ を満たす $k\in I_1$ と $b\in S$ が存在する．

ロバーツ [17] やフロイデンバーグ [4]，デイグルとフロイデンバーグ [1] による反例や，定理 1.2 で与えた反例は，定理 5.1 から得られる．ロバーツ [17] の場合，D の型は $(1,1,1)$ で，Ω は 4×4 単位行列に 3 行付け加えて得られる 7×4 行列，M は $\mathbf{Z}^3$ と同型であり，I_1, I_2, I_3 はそれぞれ 1 つずつ元を持つ．フロイデンバーグ [4] では D の型は $(2,3,1)$ で，Ω は 4×4 単位行列に 2 行付け加えて得られる 6×4 行列，M は $\mathbf{Z}^2$ と同型であり，I_1 と I_3 はそれぞれ 1 つずつ元を持ち $I_2=\emptyset$ である．また，デイグルとフロイデンバーグ [1] では D はフロイデンバーグ [4] と同じだが，Ω は 4×4 単位行列に 1 行付け加えて得られる 5×4 行列で，M は $\mathbf{Z}$ と同型であり，I_1 は 1 つ元を持ち $I_2=I_3=\emptyset$ である．D の型が $(1,1,1)$ の場合には，定理 5.1 の条件 (iii) と (v) が成り立つために I_1, I_2, I_3 はいずれも空ではならないが，D の型が $(2,3,1)$ の場合は $I_1\neq\emptyset$ であれば (iii) と (v) が成り立たつようにできる．フロイデンバーグ [4] では $I_3\neq\emptyset$ となっているが，これは小さい n の反例を作るという観点からは無駄である．実際，この無駄を省くことでデイグルとフロイデンバーグ [1] は $n=5$ の反例を得ている．このように，4×4 単位行列に r 行付け加えて Ω を定め，M を $\mathbf{Z}^r$ と同型にとる方法は，$n=4$ ではうまく機能しない．定理 1.2 で与えた $n=4$ の反例は，型が $(1,1,1)$ の D を使うが，4×4 行列 Ω を任意に指定し $M=\{0\}$ とすることで得られる．

小島と宮西 [5] や筆者 [8] による反例を構成するには，$m>4$ の場合も考える必要がある．$m>4$ でも様々な反例が三つ組 $\mathcal{D}=(K[Y]^D,\Omega,M)$ を用いて構成でき，$m=4$ のときには見られない現象も生じるので大変興味深い．しかし，自由度が増す分，考慮すべき事柄も増え，定理 5.1 ように $K(\mathcal{D})$ がヒルベルトの第 14 問題の反例になるためのすっきりした十分条件はまだ得られていない．

参考文献

[1] D. Daigle and G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension 5, J. Algebra **221** (1999), 528–535.

[2] D. Daigle and G. Freudenburg, Triangular derivations of $\mathbf{k}[X_1,X_2,X_3,X_4]$, J. Algebra **241** (2001), 328–339.

[3] A. van den Essen, Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture, Progress in Mathematics, Vol. 190, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2000.

[4] G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension six, Transform. Groups **5** (2000), 61–71.

[5] H. Kojima and M. Miyanishi, On Roberts' counterexample to the fourteenth problem of Hilbert, J. Pure Appl. Algebra **122** (1997), 277–292.

[6] S. Kuroda, A condition for finite generation of the kernel of a derivation, J. Algebra **262** (2003), 391–400.

[7] S. Kuroda, A finite universal SAGBI basis for the kernel of a derivation, to appear in Osaka J. Math.

[8] S. Kuroda, A generalization of Roberts' counterexample to the fourteenth problem of Hilbert, to appear in Tohoku Math. J.

[9] S. Kuroda, A counterexample to the Fourteenth Problem of Hilbert in dimension four, J. Algebra **279** (2004), 126–134.

[10] S. Kuroda, A counterexample to the fourteenth problem of Hilbert in dimension three, to appear in Michigan Math. J.

[11] S. Kuroda, Fields defined by locally nilpotent derivations and monomials, preprint.

[12] S. Kuroda, The fourteenth problem of Hilbert and Newton polytopes, in preparation.

[13] S. Maubach, Triangular monomial derivations on $k[X_1, X_2, X_3, X_4]$ have kernel generated by at most four elements, J. Pure Appl. Algebra **153** (2000), 165–170.

[14] S. Mukai, Counterexample to Hilbert's fourteenth problem for the 3-dimensional additive group, Preprint **1343**, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 2001.

[15] M. Nagata, On the fourteenth problem of Hilbert, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1958, Cambridge Univ. Press, London, New York, 1960, 459–462.

[16] M. Nagata, On the 14-th problem of Hilbert, Amer. J. Math. **81** (1959), 766–772.

[17] P. Roberts, An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem, J. Algebra **132** (1990), 461–473.

[18] O. Zariski, Interprétations algébrico-géométriques du quatorzième problème de Hilbert, Bull. Sci. Math. **78** (1954), 155–168.