代数幾何学シンポジウム記録
2004年度 pp.20-29

DEFORMATION THEORY OF ALGEBRAIC STACKS AND ITS APPLICATIONS

青木 昌雄

1. Introduction

S を excellent Deedkind 環上の noetherian scheme とし, S 上の noetherian scheme の圏を C で表す. $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ を S 上 separated かつ of finite type な algebraic stack とする. Contravariant 2-functor $\mathscr{HOM}(\mathscr{X},\mathscr{Y}):C\to$ (groupoids) を次で定義する.

$$\mathscr{HOM}(\mathscr{X},\mathscr{Y})(T)=\mathrm{HOM}_T(\mathscr{X}\times_S T,\mathscr{Y}\times_S T).$$

右辺は 1-morphism のなす groupoid である.

次の定理を証明することを目標とする.

定理 1. *$\mathscr{X}$ が S 上 proper かつ flat ならば $\mathscr{H}=\mathscr{HOM}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ は Artin の意味での algebraic stack である.*

ここで "Artin の意味で" とは, 対角射 $\mathscr{H}\to\mathscr{H}\times_S\mathscr{H}$ が representable かつ locally of finite type であるが, separated, quasicompact とは限らないことを意味する[1][Ar, 5.1].

また, line bundle を乗法群 $\mathbb{G}_m$ の分類空間 $B\mathbb{G}_m$ への morphism と同一視することにより, 次が得られる.

系 2. *$\mathscr{X}$ が S 上 proper かつ flat のとき, contravariant 2-functor*

$$\mathscr{P}ic_{\mathscr{X}}(T)=(\mathscr{X}_T \text{ 上の line bundle}).$$

は Artin の意味での algebraic stack である.

定理 1 で $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ が quasiprojective scheme や algebraic space の場合は既によく知られている. これらの場合, 関手の間の自然変換

$$\begin{array}{rcl}\mathscr{HOM}(X,Y) & \to & \mathrm{Hilb}(X\times Y)\\ f & \mapsto & f \text{ のグラフ}\end{array}$$

[1] $\mathscr{H}$ が [LM] の意味でも algebraic であることを示すことは容易ではなく, 今後の課題である.

が open immersion で表現される [Ol1, 2.1].

しかし, algberaic stack の場合には Hilb にあたるものは (まだ) ない. Olsson と Staar の Quot-functor ([OS],[Ol3]) はこの目的には使えない. $\mathrm{Quot}_{\mathcal{O}_{\mathscr{X}\times\mathscr{Y}}}$ によって $\mathscr{X}\times_S\mathscr{Y}$ の closed substack をパラメタライズすることはできるが, 1-morphism のグラフは一般には $\mathscr{X}\times_S\mathscr{Y}$ の closed substack にはならない. 例えば, 対角射 $\mathscr{X}\to\mathscr{X}\times_S\mathscr{X}$ は恒等射 $\mathrm{id}:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ のグラフであるが, これが closed immersion になるのは $\mathscr{X}$ が algebraic space で表現される場合のみである.

Olsson はこの問題を $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ が Deligne-Mumford stack の場合に考えた. この場合, 1-morphism f に coarse moduli space の射を対応させる写像

$$\mathscr{HOM}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\to\mathscr{HOM}(\underline{\mathscr{X}},\underline{\mathscr{Y}})$$

を考えることにより, algebraic space の場合に帰着させることができる. しかし, 一般の algebraic stack に対しては coarse moduli space は存在するとは限らない.

以下では, Artin[Ar] の条件を使って定理 1 を証明する. 証明の鍵になるのは algebraic stack の morphism の変形理論である.

スキームや algebraic space, simplicial algebraic space [2]の morphism の変形は cotangent complex の Ext-群を使って記述できることが Illusie[Il] によって知られている. ここで $X\to S$ をスキーム等としたとき, その cotangent complex $L_{X/S}$ とは導来圏 $D^{[-\infty,0]}_{\mathrm{qcoh}}(O_X)$ の元であり, $H_0(L_{X/S})=\Omega_{X/S}$ をみたす. 特に X が S 上 smooth なときは $L_{X/S}\cong\Omega_{X/S}$ である.

第 3 節でこの結果が algebraic stack の場合に拡張できることを示し, 第 4 節で 2-functor $\mathscr{HOM}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ が Artin の条件をみたすことを確かめる.

表記. 本稿ではスキームや algebraic space などは X,Y,T などの文字で表し, algebraic stack は $\mathscr{X},\mathscr{Y},\mathscr{Z}$ などで表す. 矢印 $\Rightarrow$ は 2-morphism を表すのに使う. また添字 $\mathscr{X}_T$ などはファイバー積 $\mathscr{X}\times_S T$ を意味する.

2. Algebraic stacks and morphisms of algebraic stacks

本節では algebraic stack やその morphism について簡単に紹介する. 正確な定義や性質は [LM] を参照されたい.

[2] より一般には環付 topos

スキーム X は反変関手

$$\begin{array}{rcl} X:(\mathrm{Sch}) & \to & (\mathrm{Sets}) \\ T & \mapsto & X(T)=\mathrm{Hom}(T,X) \end{array}$$

によって特徴づけられた. 圏 (Sch) に étale 位相を入れると, X は層になっている (descent 理論). Algebraic stack はスキームをこの観点から拡張したものである. 集合の圏を groupoid(すべての射が同型であるような圏) のなす 2-category におきかえた contravariant 2-functor

$$\mathscr{X}:(\mathrm{Sch})\to(\mathrm{groupoids})$$

で descent の公理をみたすものを stack と呼び, さらに幾何的構造を与えるための公理をみたすものを algebraic stack と呼ぶ. 特にスキームや algebraic space は algebraic stack である. $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ が algebraic stack のとき, $\mathscr{X}$ から $\mathscr{Y}$ への 2-functor としての自然変換の全体は groupoid をなす. その対象を $\mathscr{X}$ から $\mathscr{Y}$ への 1-morphism と呼び, 射を 2-morphism と呼ぶ.

$\mathscr{X}$ が algebraic stack のとき, presentation と呼ばれるスキームからの smooth な全射 $X^0\to\mathscr{X}$ が存在する. このとき

$$X^n=\underbrace{X^0\times_{\mathscr{X}}X^0\times_{\mathscr{X}}\ldots\times_{\mathscr{X}}X^0}_{n+1}$$

とすることにより, simplicial algebraic space

$$X^\bullet=(\cdots \substack{\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow\\\leftarrow\\\leftarrow\\\leftarrow} X^2 \substack{\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow\\\leftarrow\\\leftarrow} X^1 \substack{\rightarrow\\\rightarrow\\\leftarrow} X^0)$$

が定まる. これを $\mathrm{cosq}_0(X^0\to\mathscr{X})$ と書く [De, 5].

このような simplicial algebraic space は algebraic stack の研究によく使われる. たとえば, $\mathscr{Y}$ を algebraic stack としたとき $\mathscr{X}$ から $\mathscr{Y}$ への 1-morphism のなす groupoid は $\mathscr{Y}$ の $X^\bullet$-valued point のなす groupoid と圏同値である. 特に $\mathscr{Y}$ の presentation をとって simplicial algebraic space $Y^\bullet$ を作ったとき, $X^\bullet$ から $Y^\bullet$ への morphism $f^\bullet$ が与えられれば[3] algebraic stack の 1-morphism $f:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ が一つ定まる. 逆に図式

$$\begin{tikzcd} X^0 \arrow[r, "f^0"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sigma}{\Swarrow}"] & Y^0 \arrow[d] \\ \mathscr{X} \arrow[r, "f"] & \mathscr{Y} \end{tikzcd}$$

[3] $f^\bullet$ は f^0,f^1 が与えられれば一意的に決まる

から simplicial algebraic space の morphism $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ を構成することができる. これを $\mathrm{cosq}_0(f^0, \sigma)$ と書く.

また, $P_X^\bullet : X^\bullet \to \mathscr{X}$ による層の引き戻しは導来圏の同値

$$P_X^{\bullet *} : D^+_{\mathrm{qcoh}}(O_{\mathscr{X}}) \xrightarrow{\sim} D^+_{\mathrm{qcoh}}(O_{X^\bullet})$$

を与える (cohomological descent). Algebraic stack の cotangent complex はこの圏同値を使って simplicial algebraic space の cotangent complex から定義できる [LM, 17].

3. Deformation of morphisms of algebraic stacks

$\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ をスキーム T 上の algebraic stack, $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ を T 上の morphism として, 次のような図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{X} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr] & & \widetilde{\mathscr{X}} \arrow[dr, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[ddr] \arrow[dl, Rightarrow, dotted, "\lambda"] & \\
& \mathscr{Y} \arrow[rr, "j"] \arrow[d] & & \widetilde{\mathscr{Y}} \arrow[d] \\
& T \arrow[rr, "k"] & & \widetilde{T}
\end{tikzcd}$$

ここで i, j, k はそれぞれ square-zero ideal I, J, K で定義される closed immersion である.

このとき f の変形とは $\widetilde{T}$ 上の 1-morphism $\tilde{f} : \widetilde{\mathscr{X}} \to \widetilde{\mathscr{Y}}$ と 2-isomorphism $\lambda : \tilde{f} \circ i \Rightarrow j \circ f$ の組 $(\tilde{f}, \lambda)$ のことである. また変形 $(\tilde{f}, \lambda)$ から $(\tilde{f}', \lambda')$ への射とは $\tau : \tilde{f} \Rightarrow \tilde{f}'$ であって, 2 つの 2-morphism

$$i^*\tau \circ \lambda', \lambda : \tilde{f} \circ i \Rightarrow j \circ f$$

が等しくなるようなものとする. f の変形の圏を $\mathrm{Defm}_T(f)$, その同型類の集合を $\overline{\mathrm{Defm}_T(f)}$ と書くことにする.

定理 3. (1) 変形の障害 $o \in \mathrm{Ext}^1(Lf^*L_{\mathscr{Y}/T}, I)$ が存在し, $o = 0$ となることと変形が存在することが同値である.

(2) $o = 0$ のとき, 集合 $\overline{\mathrm{Defm}}_T(f)$ には群 $\mathrm{Ext}^0(Lf^*L_{\mathscr{Y}/T}, I)$ が作用して *torsor* になっている.

(3) f の任意の変形の自己同型群は $\mathrm{Ext}^{-1}(Lf^*L_{\mathscr{Y}/T}, I)$ と同型である.

定理3の (1) と (2) は $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ が scheme や algebraic space, simplicial algebraic space の場合には成り立つことが知られている [Il, III 2.2.4].

もう一つ別の変形の問題を考える.

$\mathscr{X}$ を quasicompact algebraic stack とし, $x : X \to \mathscr{X}$ と $y : Y \to \mathscr{X}$ を $\mathscr{X}$ 上のスキーム, $f : X \to Y$ を $y \circ f = x$ となる morphism として, 以下の図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, "x"'] & & \widetilde{X} \arrow[dr, dotted, "\widetilde{f}"] \arrow[ddr, "\widetilde{x}"'] & \\
& Y \arrow[rr, "j"] \arrow[d, "y"] & & \widetilde{Y} \arrow[d, "\widetilde{y}"] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "\Leftarrow \sigma"] \\
& \mathscr{X} \arrow[rr, "k"] & & \widetilde{\mathscr{X}}
\end{tikzcd}$$

ここで i, j, k はそれぞれ square-zero ideal I, J, K で定義される closed immersion である.

このとき f の変形とは, $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ で $\widetilde{f} \circ i = j \circ f$ となるものと, 2-morphism $\sigma : \widetilde{y} \circ \widetilde{f} \Rightarrow \widetilde{x}$ で $y \circ f \Rightarrow x$ に制限すれば id になっているものの組 $(\widetilde{f}, \sigma)$ である.

f の変形の集合を $\mathrm{Defm}_{\mathscr{X}}(f)$ と書くことにする.

命題 4. (1) 変形の障害 $o \in \mathrm{Ext}^1(Lf^* L_{Y/\mathscr{X}}, I)$ が存在し, $o = 0$ となることと変形が存在することが同値である.

(2) $o = 0$ のとき, 集合 $\mathrm{Defm}_{\mathscr{X}}(f)$ には群 $\mathrm{Ext}^0(Lf^* L_{Y/\mathscr{X}}, I)$ が作用して *torsor* になっている.

定理3や命題4は [Ol2] や [Ao] で使われているものと同様のアイデアで証明できる.

Step 1: Algebraic stack のよい presentation を選び, associated simplicial algebraic space を作る.

Step 2: Algebraic stack の morphism の変形と, Step 1 で作った simplicial algebraic spaces の morphism の変形を比較する.

Step 3: Ext 群を比較する.

まず命題4を証明し, それを使って定理3を証明する.

命題4の証明. $\mathscr{X}$ の presentation $Z^0 \to \mathscr{X}$ を Z^0 が affine になるようにとる. [O12, 1.4] により, Z^0 の $\widetilde{\mathscr{X}}$ 上への変形 $\widetilde{Z}^0$ が存在する. $Z^\bullet = \mathrm{cosq}_0(Z^0 \to \mathscr{X})$, $\widetilde{Z}^\bullet = \mathrm{cosq}_0(\widetilde{Z}^0 \to \widetilde{Z})$ とする. $Z^\bullet \to \mathscr{X}$, $\widetilde{Z}^\bullet \to \widetilde{\mathscr{X}}$ による base change で得られる次の図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[rr, "i^\bullet"] \arrow[dr, "f^\bullet"] \arrow[ddr, "x^\bullet"'] & & \widetilde{X}^\bullet \arrow[dr, dotted, "\widetilde{f}^\bullet"] \arrow[ddr, "\widetilde{x}^\bullet"'] & \\
& Y^\bullet \arrow[rr, "j^\bullet"] \arrow[d, "y^\bullet"] & & \widetilde{Y}^\bullet \arrow[d, "\widetilde{y}^\bullet"] \\
& Z^\bullet \arrow[rr, "k^\bullet"] & & \widetilde{Z}^\bullet
\end{tikzcd}$$

Base change により, 写像

$$\mathrm{Defm}_{\mathscr{X}}(f) \to \mathrm{Defm}_{Z^\bullet}(f^\bullet)$$

が定まる. これは全単射である. 逆写像は simplicial algebraic space の morphism $\widetilde{f}^\bullet : \widetilde{X}^\bullet \to \widetilde{Y}^\bullet$ を associated stack の morphism $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ に移すことで定まる.

$I^\bullet = \ker(O_{\widetilde{X}^\bullet} \to O_{X^\bullet})$ とする. Simplicial algebraic space の場合の結果から, 変形の障害 $o \in \mathrm{Ext}^1(f^{\bullet *}L_{X^\bullet/Z^\bullet}, I^\bullet)$ が存在し, $o = 0$ のとき集合 $\mathrm{Defm}(f^\bullet)$ は $\mathrm{Ext}^0(f^{\bullet *}L_{X^\bullet/Z^\bullet}, I^\bullet)$-torsor である.

一方 cohomological descent により, すべての i に対して

$$P_X^{\bullet *} : \mathrm{Ext}^i(Lf^*L_{X/\mathscr{X}}, I) \to \mathrm{Ext}^i(f^{\bullet *}L_{X^\bullet/Z^\bullet}, I^\bullet)$$

は同型である. □

定理3の証明: Step1. $\mathscr{Y}$ の presentation $P_Y : Y^0 \to \mathscr{Y}$ をとり, $\mathscr{X}' = \mathscr{X} \times_{\mathscr{Y}} Y^0$ とし, さらに $\mathscr{X}'$ の presentation $X^0 \to \mathscr{X}'$ をとる. このとき合成 $P_X : X^0 \to \mathscr{X}' \to \mathscr{X}$ は $\mathscr{X}$ の presentation である. X^0, Y^0 は affine と仮定してよい. すると命題4の場合と同様 $X^0 \to \mathscr{X}$, $Y^0 \to \mathscr{Y}$ の変形 $\widetilde{X^0} \to \widetilde{\mathscr{X}}$, $\widetilde{Y^0} \to \widetilde{\mathscr{Y}}$ が存

在する. $X^\bullet = \mathrm{cosq}_0(X^0 \to \mathscr{X})$ 等とし $I^\bullet = \ker(O_{\widetilde{X}^\bullet} \to O_{X^\bullet}) \cong P_X^{\bullet *} I$ とする.

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[rr] \arrow[dr, "f^\bullet"] \arrow[dd, "P_X^\bullet"'] & & \widetilde{X^\bullet} \arrow[dr, dotted, "\widetilde{f^\bullet}"] \arrow[dd, "\widetilde{P_X^\bullet}"' near start] & \\
& Y^\bullet \arrow[rr, crossing over] & & \widetilde{Y^\bullet} \arrow[dd, "\widetilde{P_Y^\bullet}"] \\
\mathscr{X} \arrow[rr] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, "x"'] & & \widetilde{\mathscr{X}} \arrow[dr, dotted, "\widetilde{f}"] \arrow[ddr, "\widetilde{x}"'] & \\
& \mathscr{Y} \arrow[rr] \arrow[d, "y"] \arrow[from=uu, crossing over, "P_Y^\bullet" near start] & & \widetilde{\mathscr{Y}} \arrow[d, "\widetilde{y}"] \\
& T \arrow[rr] & & \widetilde{T}
\end{tikzcd}$$

定理3の証明: Step 2. 写像

$$A : \mathrm{Defm}_T(f^\bullet) \to \overline{\mathrm{Defm}_T(f)}$$

を, $\widetilde{f}^\bullet : \widetilde{X}^\bullet \to \widetilde{Y}^\bullet$ を associated stack の morphism $\widetilde{f} : \widetilde{\mathscr{X}} \to \widetilde{\mathscr{Y}}$ に移すことで定める.

主張. A は全射である.

証明. $[\widetilde{f}] \in \overline{\mathrm{Defm}_T(f)}$ をとり, 次の図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X^0} \arrow[r, dotted, "\widetilde{f^0}"] \arrow[d] & \widetilde{Y^0} \arrow[d] \arrow[dl, Rightarrow, dotted, "\sigma"'] \\
\widetilde{\mathscr{X}} \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \widetilde{\mathscr{Y}}
\end{tikzcd}$$

命題4より, $(\widetilde{f^0}, \sigma)$ が存在するための障害は $\mathrm{Ext}^1(Lf^{0*}L_{Y^0/\mathscr{Y}}, I^0)$ にあるが, X^0 が affine で $Y^0 \to \mathscr{Y}$ が smooth なのでこの群は自明である.

$f^\bullet = \mathrm{cosq}_0(\widetilde{f^0}, \sigma)$ とすれば $A(f^\bullet) = [\widetilde{f}]$ となる. □

これから, f の変形が存在するための障害 o は $\mathrm{Ext}^1(f^{\bullet *}L_{Y^\bullet/T}, I^\bullet)$ にあることが分かる. また, 上記のような $(\widetilde{f^0}, \sigma)$ の集合は $\mathrm{Ext}^0(Lf^{0*}L_{Y^0/\mathscr{Y}}, I^0)$-torsor だから, 集合 $\overline{\mathrm{Defm}_T(f)}$ は $\mathrm{Defm}_T(f^\bullet)$ 内の $\mathrm{Ext}^0(Lf^{0*}L_{Y^0/\mathscr{Y}}, I^0)$-軌道の集合である.

次に変形の自己同型群を見る.

主張. f の変形 $\widetilde{f}$ と $A(\widetilde{f}^\bullet) = [\widetilde{f}]$ となる $\widetilde{f}^\bullet \in \mathrm{Defm}_T(f^\bullet)$ を固定する. このとき $\mathrm{Ext}^0(Lf^{0*}L_{Y^0/\mathscr{Y}}, I^0)$ の作用による $\widetilde{f}^\bullet$ の固定部分群は変形の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\widetilde{f})$ と同型である.

証明. $\mathrm{cosq}_0(\widetilde{f}^0, \sigma) = \widetilde{f}^\bullet$ となる $(\widetilde{f}^0, \sigma) \in \mathrm{Defm}_{\mathscr{Y}}(f^0)$ をとる. $(\widetilde{g}^0, \tau)$ を $\mathrm{Defm}_{\mathscr{Y}}(f^0)$ の別の元とし $\widetilde{g}^\bullet = \mathrm{cosq}_0(\widetilde{g}^0, \tau)$ とする. このとき $\widetilde{f}^\bullet = \widetilde{g}^\bullet$ となるための必要十分条件は $\widetilde{f}^0 = \widetilde{g}^0$ かつ $\widetilde{f}^1 = \widetilde{g}^1$ となることである. さらにファイバー積の構成から, $\widetilde{f}^1 = \widetilde{g}^1$ となることは $p_1^*(\sigma^{-1} \circ \tau) = p_2^*(\sigma^{-1} \circ \tau)$ となること, すなわち $\sigma^{-1} \circ \tau$ が $\widetilde{f}$ の自己同型に descent することと同値である. □

注意. これで得られた固定部分群と $\mathrm{Aut}(\widetilde{f})$ の間の全単射が群同型であることを示さなければならないが, この部分は省略する.

定理 3 の証明: Step 3. Algebraic stack の morphism

$$Y^\bullet \to \mathscr{Y} \to T$$

から導来圏 $D(O_{Y^\bullet})$ の三角形

$$LP_Y^{\bullet *} L_{\mathscr{Y}/T} \to L_{Y^\bullet/T} \to L_{Y^\bullet/\mathscr{Y}} \to LP_Y^{\bullet *} L_{\mathscr{Y}/T}[1],$$

が得られ, さらに長完全列

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & \to & \mathrm{Ext}^{-1}(Lf^{\bullet *}LP_Y^{\bullet *}L_{\mathscr{Y}/T}, I^\bullet) & \to \\
\mathrm{Ext}^0(Lf^{\bullet *}L_{Y^\bullet/\mathscr{Y}}, I^\bullet) & \to & \mathrm{Ext}^0(f^{\bullet *}L_{Y^\bullet/T}, I^\bullet) & \to & \mathrm{Ext}^0(Lf^{\bullet *}LP_Y^{\bullet *}L_{\mathscr{Y}/T}, I^\bullet) & \to \\
\mathrm{Ext}^1(Lf^{\bullet *}L_{Y^\bullet/\mathscr{Y}}, I^\bullet) & \to & \mathrm{Ext}^1(f^{\bullet *}L_{Y^\bullet/T}, I^\bullet) & \to & \mathrm{Ext}^1(Lf^{\bullet *}LP_Y^{\bullet *}L_{\mathscr{Y}/T}, I^\bullet) & \to \\
\mathrm{Ext}^2(Lf^{\bullet *}L_{Y^\bullet/\mathscr{Y}}, I^\bullet) & \to & \cdots & & &
\end{array}$$

が得られる. ここで

$$\mathrm{Ext}^i(Lf^{\bullet *}L_{Y^\bullet/\mathscr{Y}}, I^\bullet) \cong \mathrm{Ext}^i(Lf^{0*}L_{Y^0/\mathscr{Y}}, I^0)$$

であり, $i > 0$ のとき右辺は 0 になる. また, cohomological descent により

$$\mathrm{Ext}^i(Lf^{\bullet *}LP_Y^{\bullet *}L_{\mathscr{Y}/T}, I^\bullet) \cong \mathrm{Ext}^i(LP_X^{\bullet *}Lf^* L_{\mathscr{Y}/T}, I^\bullet) \cong \mathrm{Ext}^i(Lf^* L_{\mathscr{Y}/T}, I).$$

である. これらより

$$\mathrm{Ext}^1(f^{\bullet *}L_{Y^\bullet/T}, I^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(Lf^* L_{\mathscr{Y}/T}, I).$$

であるから, 定理の (1) が従う. また

$$0 \to \mathrm{Ext}^{-1}(Lf^* L_{\mathscr{Y}/T}, I) \to \mathrm{Ext}^0(Lf^{0*}L_{Y^0/\mathscr{Y}}, I^0) \to$$
$$\mathrm{Ext}^0(f^{\bullet *}L_{Y^\bullet/T}, I^\bullet) \to \mathrm{Ext}^0(Lf^* L_{\mathscr{Y}/T}, I) \to 0$$

が完全列であることから定理の (2), (3) が従う. □

注意. ここでも群準同型 $\mathrm{Ext}^0(Lf^{0*}L_{Y^0/\mathscr{Y}}, I^0) \to \mathrm{Ext}^0(f^{\bullet *}L_{Y^\bullet/T}, I^\bullet)$ と写像 A が可換であることを示さなければならないが, 省略する.

4. Artin's criterion

定理 1 は次の Artin の条件 [Ar, 5.3] を確かめることで証明できる.

(0) $\mathscr{H}$ は limit-preserving stack である.

(1) Schlessinger の条件.

(1-1) $A' \to A$ と $B \to A$ が S 上のネーター環の準同型で $A' \to A$ は small extension とする. 任意の $f \in \mathscr{H}(A)$ に対し, 関手

$$\mathscr{H}_f(A' \times_A B) \to \mathscr{H}_f(A') \times \mathscr{H}_f(B)$$

は圏同値である.

(1-2) M が有限 A-加群で $f \in \mathscr{H}(A)$ なら, $D_f(M) = \mathscr{H}_f(A+M)/\sim$ は有限 A-加群である.

(2) 完備化と可換.

A が完備局所 noether 環で極大イデアルが m とする. 関手

$$\mathscr{H}(A) \to \varprojlim_n \mathscr{H}(A/m^{n+1})$$

は圏同値である.

(3) 変形理論.

任意の $f \in \mathscr{H}(A)$ に対し, f の $A+M$ への変形の障害の空間 $O_f(M)$, 変形の同型類の集合 $D_f(M)$, 変形の自己同型群 $\mathrm{Aut}_f(M)$ は M について functorial な A-加群であり, étale 局所化, 完備化と可換で constructible である.

(4) 対角射の quasi-separation.

任意の $f \in \mathscr{H}(A)$ と $\alpha \in \mathrm{Aut}(f)$ について, もし $\alpha|_k = \mathrm{id}$ をみたす点 $A \to k$ が稠密に存在するなら, $\alpha = \mathrm{id}$ である.

次の補題により $\mathscr{H}$ の T-valued point は $\mathscr{Y}$ の $\mathscr{X}_T$-valued point と同一視できる.

補題 5. *$\mathscr{Y} \to S$ をスキーム S 上の algebraic stack とし, $T \to S$ をスキームの morphism, $\mathscr{X}_T \to T$ を T 上の algebraic stack とする.* このとき関手

$$\mathrm{HOM}_T(\mathscr{X}_T, \mathscr{Y}_T) \to \mathrm{HOM}_S(\mathscr{X}_T, \mathscr{Y})$$

は圏同値である.

証明. ファイバー積の構成から容易に分かる. □

この同一視により条件 (0), (1-1) は $\mathscr{Y}$ が (0),(1-1)[4] をみたすことから従う. 条件 (2) は容易. 条件 (3) は定理 3 から, (1-2) は定理 3 と proper stack の coherent cohoology の有限性 ([Fa],[Ol3]) から従う. 条件 (4) は $\mathscr{Y}$ が quasi-separated であることから従う.

REFERENCES

[Ao] M. Aoki, *Deformation Theory of Algebraic Stacks*, Compositio Mathematica **141** (2005) 19-34

[Ar] M. Artin, *Versal deformation and algebraic stacks*, Inventiones **27** (1974) 165-189

[De] P. Deligne, *Theorie de Hodge III*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **44** (1974) 237-250

[Fa] G. Faltings, *Finiteness of coherent cohomology for proper fppf stacks*, J. Alg. Geom. **12** (2003) 357-366

[Il] L. Illusie, *Complexe cotangent et déformations I*, Lecture Notes in Mathematics **239**, Springer-Verlag (1971)

[LM] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik **39**, Springer-Verlag (2000)

[Ol1] M. Olsson, *Hom-stacks and restriction of scalars*, preprint, `http://www.math.ias.edu/~molsson/homstack.pdf`

[Ol2] M. Olsson, *Deformation theory of 1-morphisms to algebraic stacks*, preprint (2002), `http://www-math.ias.edu/~molsson/1def.ps`

[Ol3] M. Olsson, *On proper coverings of Artin stacks*, To appear in Advances in Mathematics

[OS] M. Olsson, J. Starr, *Quot functors for Deligne-Mumford stacks*, Comm. Alg. 31 (2003) 4069–4096

京都大学理学研究科 数学教室

E-mail address: `aoki@math.kyoto-u.ac.jp`

URL: `http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~aoki/`

[4] (1-1) の証明には $\mathscr{X}$ が flat であることを使う.