代数幾何学シンポジウム記録
2005年度 pp.116-129

Chern classes and Thom polynomials

Enumerative Geometry of Singularities

大本 亨 北海道大学大学院理学研究科
2005 年 10 月 於 城崎

ここでは「数え上げ幾何」として，古典的射影幾何における数多ある「特異点の数え上げ公式」(Plücker 公式など) を特性類理論として定式化したもの (Thom 多項式) および種々の数え上げ母関数の類いを念頭に置いている．Thom 多項式とは，写像・関数の特異点分類に現れる型 η ($A, D, E, \ldots$ など) に対して定まる普遍 Chern 多項式 $tp(\eta)(c)$ であり，たとえば，“良い”写像 f に現れる η-型特異点の個数は，Chern 特性数 $tp(\eta)(c(f))$ で表される．

Chern 類といえば普通は (ベクトル束の) Chern “コホモロジー特性類”を指すであろうが，一方で，一般の特異点を許す代数多様体 X に対して Chern“ホモロジー特性類”がある．このホモロジー特性類には，Fulton 標準類 $C_*^F(X)$, Mather 類 $C_*^M(X)$, Chern-Schwartz-MacPherson 類 $C_*(X)$ 等，出所の異なる種類が存在するが，X が非特異ならば，これらはすべて接束の全 Chern 類 $c(TX)$ の Poincaré 双対に一致する．つまり，これらの Chern ホモロジー類達の差異は，X の特異点集合 X_{sing} に台をもち，特異点の特徴的な性質を反映する量となって現れる．特に，Chern-Schwartz-MacPherson 類は (共変関手の間の) Grothendieck 自然変換 $C_* : \mathcal{F}(X) \to A_*(X)$ として定式化でき ($C_*(1\!\!1_X) =: C_*(X)$), ホモロジー特性類達を総括的に記述するのに適している．

本稿の内容は上記２つの話題を統合する話であって，以下について述べる：

- 「Thom 多項式」および「代数多様体の Chern ホモロジー特性類」の紹介；
- G-作用[1]を伴う代数多様体 X に対する「同変自然変換 $C_*^G : \mathcal{F}^G(X) \to A_*^G(X)$」あるいは「商スタック $[X/G]$ への C_* の拡張」；
- C_*^G の応用：対称積に対するオービフォルド Euler 標数の母関数の “全 Chern 版”等．

複素数体上で話を進めるが，標数 0 の体 k 上でよい．以下，原則として，$M, N, V, \cdots$ は非特異多様体，$X, Y, W, \cdots$ は非特異と限らないものに用いることにする．

0.1 写像の特異点型に関する Thom 多項式：

はじめに，複素解析的特異点の文脈で Thom 多項式についてに解説する (cf. Def. 0.12)．

$f : M^m \to N^n$ を (非特異) 複素多様体間の解析的写像とし，整数 $l = m - n$ を f の次元差と呼ぶ[2]．f の特異点とは，$\operatorname{rank} df_x < \min(m, n)$ なる点 $x \in M$，あるいはその点での写像芽 $f : M, x \to N, f(x)$ を指す．この写像芽を原点中心の局所座標で表して，$f : \mathbf{C}^m, 0 \to \mathbf{C}^n, 0$

[1]有限群とは限らない．
[2]慣例では $n - m$ のほうをよく使う．

を考える．写像芽の分類としては，（スキームとしての）ファイバー $(f^{-1}(0),0)$ の分類，つまり局所環 $Q(f):=\mathcal{O}_{m,0}/f^*\mathrm{m}_{n,0}$ の分類を考える．$l\geq 0$ ならば，l-dim. complete intersection germ の分類に他ならない．これを $\mathcal{K}$-同値（による分類）という[3]．

簡単な線形代数から，$\mathcal{K}$-同値は次の群作用と同じ意味をもつことが分かる：

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}(m,n)\ \ (\simeq (\mathrm{m}_{m,0})^n)\ ：\text{写像芽 } \mathbf{C}^m,0\to\mathbf{C}^n,0 \text{ 全体が成す } \mathcal{O}_{m,0}\text{-加群}\\
&\mathcal{K}_{m,n}:=\{\ (\sigma,\Xi)\mid \text{同型芽 } \sigma:\mathbf{C}^m,0\to\mathbf{C}^m,0,\ \ \text{写像芽 } \Xi:\mathbf{C}^m,0\to GL_n(\mathbf{C})\ \}\\
&action\ :\ \ ((\sigma,\Xi).f)(x):=\Xi(x)f(\sigma^{-1}(x)):\mathbf{C}^m,0\to\mathbf{C}^n,0.
\end{aligned}
$$

つまり，$f,g\in\mathcal{E}(m,n)$ が $\mathcal{K}$-同値 $\Longleftrightarrow g\in\mathcal{K}_{m,n}.f$．あるいはスムース射の base change を取って，$f\in\mathcal{E}(m,n), g\in\mathcal{E}(m-s,n-s)$ が $\mathcal{K}$-同値 $\Longleftrightarrow g\times id_s\in\mathcal{K}_{m,n}.f$．

（次元差 l の）写像芽の $\mathcal{K}$-特異点型 η とは，$\mathcal{K}$-同値類あるいはそのパラメータ族を指す[4]．次元差 l の写像 $f:M\to N$ に対して，$x\in M$ が η-型特異点とは x における写像芽が（適当な座標において）η に属するときにいう．η-型特異点全体を $\eta(f)(\subset M)$ で記す．

Definition-Theorem 0.1 次元差 l の写像芽の $\mathcal{K}$-特異点型 η に対して，η のみに依存する重み付き同次多項式 $tp(\eta)(c)$ （ $c_1,c_2,\cdots$ は不定元）で次の *"universality"* を満たすものが唯一存在し，これを特異点型 η に対する <u>*Thom* 多項式</u>と呼ぶ：次元差 l の（ある種の横断性を満たす）任意の正則写像 $M\to N$ に対して，閉包 $\bar\eta(f)$ の基本類が $tp(\eta)(c)$ に $c_i=c_i(f)(:=c_i(f^*TN-TM))$ を代入したもので表示される．すなわち，$\iota:\eta(f)\to M$ を包含写像として，

$$\iota_*[\bar\eta(f)]=tp(\eta)(c(f))\frown[M]\ \ \in\ H_*(M). \tag{1}$$

この定理は R. Thom (1955?) に遡るが，体系的に整備され出したのは 90 年代後半以降である（e.g., [16], [18]）一たとえば，“単純特異点型” η に対する $tp(\eta)$ の計算方法（restriction method と呼ばれる：Rimányi [33], [11]）など．

“横断性条件”とは，ラフに言えば，f の jet extension と閉包 $\bar\eta$ （の Whitney stratification）との横断性を指す：たとえば，閉包 $\bar\eta(f)$ の各点 x において写像芽 $f:M,x\to N,f(x)$ が complete intersection germ $(f^{-1}f(x),x)$ の versal deformation を与えているのあれば，上記の横断性条件は満たされる．また，横断性条件を外して，代わりに (1) 式左辺を適当な意味での “局所化類”に変更できる場合もある（例えば，Fulton の degeneracy loci class, Example 0.4）．

以降，$c(f):=c(f^*TN-TM)$，$\bar c(f)=c(TM-f^*TN)$ とする．

---

[3]双有理幾何で言うところの K-同値とは関係ない．$\mathcal{K}$ は contact 同値の略（f のグラフとレベル $\mathbf{C}^m\times\{0\}$ との原点における接触度を計っているから）であって，「写像の特異点論」の慣例に従ってこの記号を用いることにする（cf. [22], [3]）．他に，原点を保存する source と target の同型芽で移り合うものを $\mathcal{A}$-同値（あるいは $\mathcal{RL}$-同値）という．$\mathcal{K}$-同値と $\mathcal{A}$-同値とは密接な関係がある．

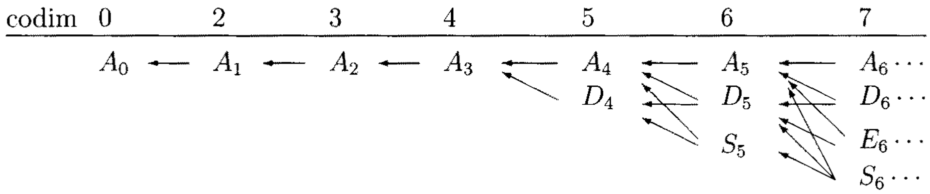
[4]正確には，適当な有限ジェット空間（$J^r(m,n)=\mathcal{E}(m,n)/\mathrm{m}_m^{r+1}\mathcal{E}(m,n)$）のある $\mathcal{K}_{m,n}$-不変な部分代数多様体（あるいは構成的集合）を考える．

Example 0.2 (Morse 特異点) コンパクト複素多様体から複素曲線への正則関数 $f: M^m \to N^1$ に対して，各点での Milnor number $\mu(f,x)$ を M 上で "積分" すると（構成的関数の積分，0.2 節），

$$\int_M \mu(f) = (-1)^m c_m(TM - f^*TN) \frown [M] \tag{2}$$

が成り立つ．f が有限型―つまり孤立特異点のみ持つならば，左辺は孤立特異点の Milnor 数の和を意味する．ちなみに，$m=1$ の場合は Riemann-Hurwitz 公式：分岐指数の和 $= \deg f \cdot \chi(N) - \chi(M) (= c_1(f^*TN - TM) \frown [M])$．$f: M^m \to N^1$ が "横断性条件" を満たしているならば，(2) 式 の左辺は A_1-特異点の個数を表す．一方で，右辺にある Chern 類が「A_1-特異点型[5] に対する Thom 多項式」である：$tp(A_1) = (-1)^m \bar{c}_m$．横断性の条件を課さなければ，(2) 式は，$tp(A_1)$ の「局所化公式」と見なし得る．

Example 0.3 (Isolated complete intersection curve germs の分類) 次元差 1 の写像芽の分類は，次の隣接関係図式のように始まる（記号 $\tau \leftarrow \eta$ は，$\mathcal{K}$-軌道 τ の閉包に軌道 η が含まれることを意味する）：



$$A_\mu : x^{\mu+1} + y^2,\ D_\mu : x^2y + y^{\mu-1},\ S_\mu : (x^2+y^2+z^{\mu-3}, yz),\ E_6 : x^3+y^4, \cdots$$

対応する tp は次のようになる[6]：

[5]正確には，「次元差 $m-1$ の A_1-特異点型」（その局所環が $\mathcal{O}_m/\langle z_1^1 + \cdots + z_m^2\rangle$ である特異点型）．

[6]90 年代以前では，所謂 desingularization method（$\bar{\eta}(f)$ の特異点解消を flag 束等の中に具体的に構成して tp を求めるやり方）が主流であった．しかし，このやり方では，例えば A_4, A_5, D_5 の tp でさえ求められない（とても困難）．一方で，restriction method のアイデアは以下のようなものである：たとえば $tp(D_5)$ を求めようとする．まず Theorem 0.1 より，$tp(D_5) = Ac_1^6 + Bc_1^4c_2 + \cdots + Cc_1c_2c_3$ と置く．これらの係数を決定すればよい．τ を余次元が 6 以下の特異点型とする（$\tau = A_1, A_2, \cdots, S_5$）．今の場合，$\tau$ の標準形は quasi-homogenous だから τ の固定部分群 ($\subset \mathcal{K}$) は $\mathbf{C}^*$ を含み，標準形写像の定義域・値域にこの $\mathbf{C}^*$ の作用がある．この作用から分類空間 $B\mathbf{C}^*$（の有限次元近似）上にベクトル束 $E_1(\tau)$, $E_2(\tau)$ が得られ，さらに，写像 $f_\tau : E_1(\tau) \to E_2(\tau)$ で各ファイバー上への制限が τ の標準形写像に対応するものが構成できる．この f_τ に Theorem 0.1 を適用する：$\tau \neq D_5$ ならば，f_τ の D_5-型特異点集合は空集合であるから，tp の universality より，$tp(D_5)(c(f_\tau)) = 0$．$\tau = D_5$ ならば，f_{D_5} の D_5-特異点集合はベクトル束 $E_1(\tau)$ の零切断に他ならないから，$tp(D_5)(c(f_{D_5})) = c_{top}(E_1(\tau))$ (top Chern class) を得る．一方，$c(f_\tau) = c(E_2(\tau) - E_1(\tau)) \in H^*(B\mathbf{C}^*) = \mathbf{Z}[a]$ は，生成元 a の多項式としてすぐに求められるので，これを $tp(D_5)$ 等に代入すれば，未知係数 $A, B, \cdots, C$ に関する線形方程式を得る．τ を動かして方程式系が得られ，これを解いて係数が決定される．一般に，単純軌道（その軌道の近傍で，有限個の軌道としか交わらないようなものがある）に関しては，この方程式系は必ず唯一解を持つ（大抵の場合，overdetermined である）．

$$
\begin{aligned}
&tp(A_1) = c_1^2 - c_2, \quad tp(A_2) = 2c_1(c_1^2 - c_2), \quad tp(A_3) = 5c_1^4 - 4c_1^2c_2 - c_1c_3,\\
&tp(A_4) = 12c_1^5 - 4c_1^3c_2 + 4c_1^2c_3 - 4c_1c_4 - 8c_1c_2^2, \quad tp(D_4) = c_1^5 - c_1^3c_2 - 4c_1^2c_3 + 3c_1c_2^2 + c_1c_4,\\
&tp(A_5) = 30c_1^6 + 10c_1^4c_2 + 50c_1^3c_3 - 6c_1^2c_4 - 52c_1^2c_2^2,\\
&tp(D_5) = 4c_1^6 - 2c_1^4c_2 - 18c_1^3c_3 - 6c_1^2c_4 + 12c_1^2c_2^2\\
&tp(S_5) = c_2^3 + c_3^2 - c_2c_4 + c_1^2c_4 - 2c_1c_2c_3, \quad \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Example 0.4 (Schubert Calculus) アファイン空間 $\mathrm{Hom}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^n)$ (1-ジェット空間) への座標変換群 $GL_m(\mathbf{C}) \times GL_n(\mathbf{C})$ の作用 ($(A,B).H = BHA^{-1}$) について，軌道は rank で決まる．$\eta = \Sigma^k$ ($\dim\ker = k$) に対する tp は次の型の Schur 多項式で与えられる：$tp(\Sigma^k) = \Delta_{k-l}^{(k)}(c)$ (ここで $l = m - n$) —これが所謂 Thom-Porteous 公式 ('60?, cf. [32]) である．つまり，M 上の２つのベクトル束 (次元差 l) の間の写像 $f : E \to F$ (つまり切断 $f : M \to \mathrm{Hom}(E, F)$) に対して，退化集合 $D^k(f) = \{x \in M, \dim\ker f_x \geq k\}$ は次の特性類で表される：

$$\iota_*[D^k(f)] = \det[c_{k-l-i+j}(F - E)]_{1 \leq i,j \leq k}$$

(横断性条件を課さないならば，左辺を局所化類 (degenracy loci class, [12]) に置き換える)．

Fehér-Rimányi ([11], [9], [10]) は，一般線形群の代わりに上 (下) 三角行列のなす群を取るなどして，Thom-Porteous 公式の variant を考察している：(double Schur, double Schubert など) 表現論で意味ある多項式をある軌道の tp として表す，あるいは quiver 表現に関する tp を求める，など．

Example 0.5 (多重点公式) immersion $M \to N$ の２重点・３重点公式などの「多重点公式」を，より一般に「多重特異点芽の分類に対する Thom 多項式」として定式化しようとする試みがある (Kazarian [17], [18])．ここで多重写像芽とは，有限個の点の周りの写像芽 $f : M^m, \{x_1, \cdots, x_k\} \to N^n, y$ ($y = f(x_1) = \cdots = f(x_k)$) を指す (ただし，$m \geq n$ の場合，各 x_i は f の特異点であるものする；$m < n$ の場合，各 x_i で f は非特異であってもかまわない)．

[17] によれば，(有理係数コホモロジーにおいて) 多重特異点型 η_{multi} に対する Thom 多項式 $tp(\eta_{multi})$ は，Chern 類 $c_i = c_i(f)$ と Landweber-Novikov 類 $s^I(f) := f^* f_*(c^I(f))$ ($c^I(f) = c_1(f)^{i_1} c_2(f)^{i_2} \cdots$) の多項式として与えられる[7]．

[7]Kazarian [17] において，この「存在定理」の "証明" はトポロジーの文脈でなされている (交差理論による代数幾何的な証明はまだない)．key idea は，次元差 $l (= m - n)$ の正則写像に関する「多重特異点芽の分類空間」として複素コボルディズムの分類空間の類似，すなわち無限ループ空間 $\lim_{s \to \infty} \Omega^{2s} MU(s - l)$ を考える点である．

Remark 0.6 （次元差 l の）写像芽の $\mathcal{K}$-分類は，"集合（あるいは商位相空間）として"軌道空間 $\mathcal{E}/\mathcal{K}$ $(= \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}(m, m-l)/\mathcal{K}_{m,m-l})$ を考えることに対応する．たとえば，軌道の隣接関係は商位相の開集合に対応する．しかし，これでは軌道の固定部分群（"automorphism group"）などの情報は失われるから，そうした情報を取り込むこと，すなわち，"商スタック"として「写像芽の分類空間」$[\mathcal{E}/\mathcal{K}]$ を考えるというのが，Thom 多項式の話に相当する[8]：つまり，$tp(\eta)$ とは部分スタック $[\eta/\mathcal{K}]$ が代表するコホモロジー類であって，これを固定部分群の情報から計算しようというのが restriction method の方針である．次元差 l の写像 $f: M \to N$ が与えられれば，f を "M をパラメータ空間とした（写像芽 $M, x \to N, f(x)$ の）$\mathcal{K}$-同値類の族" と見なして，分類写像（圏の間の射）$M \to [\mathcal{E}/\mathcal{K}]$ が定まる—これが Theorem 0.1 での "universality" を導く．

トポロジーの立場では，商スタック $[\mathcal{E}/\mathcal{K}]$ よりも，ホモトピー商（Borel 構成）$\mathcal{E} \times_{\mathcal{K}} E\mathcal{K}$ のほうを考える．ここで，$E\mathcal{K} \to B\mathcal{K}$ は位相群 $\mathcal{K}$ の分類空間 $B\mathcal{K}$ 上の普遍主束であって，ファイバーを $\mathcal{E}$ とする同伴束が上のホモトピー商である．あとの節で，この代数幾何的アナロジーである代数的 Borel 構成（Totaro-Edidin-Graham）に触れる．

0.2 特異多様体の Chern ホモロジー類

代数多様体 X が非特異であれば，接束 TX の Chern 類がある：$c(TX) \frown [X] \in A_*(X)$. 特異点を有する X に対して似たものを構成するには，まず (Nash) blowing-up や smoothing などの改変操作で X を適当に "良い空間" に置き換えて，その空間上の適当なベクトル束（"接束 TX の代換物"）を取ってきて，その Chern 類を pushforward あるいは specialization することで X に還元する．改変操作に応じて異なった種類の (Chow) ホモロジー特性類が導かれる（[12], [21], [13]; さらに最近の話題は Schürmann-Yokura [35] が詳しい）．以下，X は非特異多様体への埋め込みを持つとする（embeddable）.

- Fulton 標準類 $C^F(X)$ (Example 4.2.6 [12])：$X \subset M$ とし，X に沿った blowing-up $p: \tilde{M} \to M$ の例外因子を D とおく．よく知られているように，Segre 類は D の自己交差を用いて定義される：

$$s(X, M) = \sum_i (-1)^{i-1} p_*(c_1(\mathcal{O}_D(1))^{n-1-i} \frown [D]) \in A_*(X).$$

X の Fulton 標準類は，M が非特異であるとして，

$$C^F(X) = c(TM|_X) \frown s(X, M)$$

[8]商スタック $[X/G]$ は次の圏として与えられるのであった：その対象は，主 G-束 $P \to B$ と G-同変射 $\varphi: P \to X$ の組；その射は，主束の間の射 $f: P' \to P$ で $\varphi \circ f = \varphi'$ を満たすもの．別の見方（"同伴束の切断に関する分類空間"）もある：対象を同伴束 $E = P \times_G X$ の切断 $s: B \to E$（つまり $s(B) = (\mathrm{graph}\ \varphi)/G$）；射を，同伴束の間の射 $f: E' \to E$ で切断を可換とするもの（$f \circ s' = s$）．ここでは後者の見方に立っている．

のように定義される（これは ambient space M の取り方に依らない；[12]）．特に，X が complete intersection の場合，X 上の（局所自明な）法接層を用いて "仮想接束" $TM|_X - N_X$ が考えられて，次が成り立つ：$C^F(X) = c(TM|_X - N_X) \frown [X]$（右辺を Fulton-Johnson 類ともいう）．

- Chern-Mather 類 $C_*^M(X)$ ([21]; Example 4.2.9 [12])：X の Nash blowing-up $\nu : \widehat{X} \to X$ を取り，$\widehat{X}$ 上の tautological bundle（Nash tangent bundle）$\widehat{TX}$ の全 Chern 類を pushforward したものとして $C_*^M(X)$ を定義する（これも X の埋め込みの取り方に依らない）：

$$C_*^M(X) = \nu_*(c(\widehat{TX}) \frown [\widehat{X}]) \ \in \ A_*(X).$$

- Chern-Schwartz-MacPherson 類 $C_*(X)$ ([21]; Example 19.1.7 [12])：X 上の構成的関数とは，有限和 $\alpha = \sum a_i \mathbb{1}_{W_i}$（$a_i \in \mathbf{Z}$, W_i は部分代数多様体）で表されるような（X の閉点上の）整数値関数 $\alpha : X \to \mathbf{Z}$ のことを指す．$\mathcal{F}(X)$ を X 上の構成的関数全体がなす Abel 群とする．代数多様体と固有射のなす圏に対して，A_* と同様，$\mathcal{F}$ は共変関手となる：MacPherson [21] では $k = \mathbf{C}$ とし，固有射 $f : X \to Y$ に対して，pushforward を次で定義している：

$$f_* : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y), \quad f_*(\alpha)(y) = \sum a_i \ \chi(W_i \cap f^{-1}(y)) \quad (y \in Y)$$

ここで $\chi(\ )$ は underlying analytic space の（Borel-Moore ホモロジーの）Euler 標数を意味する（一方，標数 0 の体 k 上における f_* の構成は Kennedy [19] による：構成的関数群 $\mathcal{F}(X)$ の代わりに（それと群同型な）Lagrange サイクル群 $\mathcal{L}(X)$ を用いて，Lagrange サイクルの pushforward を代数的に与える）．

$pt : X \to pt(= Spec(k))$ による $\alpha \in \mathcal{F}(X)$ の pushforward を α の X 上の積分あるいは degree と呼ぶ：$\int_X \alpha := pt_*(\alpha) \in \mathcal{F}(pt) = \mathbf{Z}$. Chern-MacPherson 変換 C_* とは，この $\int_X$ の "class version" に相当する：

Theorem 0.7 ([21]) この２つの共変関手の間の自然変換 $C_* : \mathcal{F}(X) \to A_*(X)$ で，非特異な X に対して $C_*(\mathbb{1}_X) = c(TX) \frown [X]$ を満たすものが唯一存在する．

$C_*(X) := C_*(\mathbb{1}_X)$ を X の Chern-Schwartz-MacPherson 類と呼ぶ[9]．Chern-MacPherson 変換 C_* は，pushforward（自然性）だけでなく，specialiization (Verdier) 等に対して可換である．さらに，次のような "Riemann-Roch" 公式がある（反変的な作用と C_* の関係）：スムース射 $f : X \to Y$ に対して，$C_* \circ f^* = c(T_f) \frown f^*$ が成り立つ（ここで T_f は相対接束）．これを Verdier-Riemann-Roch 公式（VRR 公式）と呼ぶ ([13], [40], [34])．

[9] 歴史的には，まず最初に複素解析的な場合において，所謂 Schwartz 類 [36] が与えられている：X の Whitney stratification $X = \bigcup X_\alpha$ をとり，("接束 TX" の代換物として) "stratified vector bundle" TX_α を考えて，その切断（radial stratified vector field）の位相的障害類として定義する．これと $C_*(\mathbb{1}_X)$ が一致することは [5] で示されている．

Remark 0.8 上記3種の Chern 類は，その定義から，X が非特異ならば $c(TX) \frown [X]$ に等しい．そこで，3つの Chern 類の「差異」を，X の特異点のある局所不変量が定める構成的関数の C_*-値と関係させて表すことを考える[10]．実際，多くの場合に，興味ある量として $c(E) \frown C_*(\alpha) \in A_*(X)$ の形が現れる（ここで，E は X 上のある（仮想）ベクトル束，α は X 上の構成的関数)．その典型例として，X の Milnor 特性類 がある（Yokura ('97); [41], [31], [6], [1], [29]）：$\mathcal{M}(X) := (-1)^n(C_*(X) - C^F(X))$ $(\dim X = n)$.

$\mathcal{M}(X)$ は X が complete intersection であるときに最も有効である（上述のように $C^F(X)$ は Fulton-Johnson 類に等しく，また C_* は specialization と可換である故）．たとえば，singular hypersurface X（特異点は孤立とは限らない）の場合，ν を仮想法束，$\mu \in \mathcal{F}(X)$ を Milnor number 構成的関数として次が成り立つ：

$$\mathcal{M}(X) = c(\nu)^{-1} \frown C_*(\mu).$$

一般に，X が孤立特異点のみ有する場合，上記3種の Chern 類の差異はすべて数値で与えられる．特に X が孤立特異点のみ有する complete intersection であれば，差 $C_* - C^F$，$C_* - C^M$，$C^F - C^M$ は，(符号を除いて）それぞれ，孤立特異点の Milnor 数，generic hyperplane section の Milnor 数，Buchsbaum-Rim 重複度，の総和として表される（[37], [30], [29]）.

0.3 同変 Chern-MacPherson 変換

G を（線形）代数群，X を G-代数多様体とする．Totaro-Edidin-Graham による代数的 Borel 構成 ([39], [7]) を経て，G-同変 Chow 群 $A_*^G(X)$ が定義される．

G の線形表現 V であって，ある Zariski 開集合 $U(\subset V)$ に G が自由に作用しているものを取る．G は $X \times U$ に自由に作用しているから，その商 $X_U := X \times_G U(= (X \times U)/G)$ を取り，主 G-束 $X_U \to U/G$ を考える（一般に algebraic space の範疇で存在する）．この主束が，トポロジーにおける普遍束 $X \times_G EG \to BG$ の "代数的有限次元近似"を与える．

X の G-同変 Chow 群を，普遍束の全空間 $X \times_G EG$ の "Chow 群"として与えたいところだが，ここで少し工夫がいる（有限次元近似の "次元"をシフトさせて極限を取る）．V を添字として次の帰納的極限を取る[11]：

$$A_i^G(X) := \varinjlim A_{i+(l-g)}(X_U), \qquad (l = \dim V, \ \ g = \dim G).$$

一般に $A_i^G(X)$ は負次元（$i < 0$）でも非自明である．また，同変基本類 $[X]_G \in A_n^G(X)$ が一意に決まる（$\dim X = n$）．X_U の operational Chow 群の射影極限として $A_G^i(X) := \lim A^i(X_U)$

[10] Fulton 標準類あるいは Segre 類を「基準」にして Mather 類, MacPherson 類との差異を表すという方向もある（Aluffi [1], [2]）.

[11] G の線形表現 V および $V' = V \oplus V_1$ で，各々の開集合 U，U' に G が自由に作用し，$U \oplus V_1 \subset U'$ であるとするとき，ベクトル束 $p: X_{U\oplus V_1} \to X_U$ の全空間 $X_{U\oplus V_1}$ は $X_{U'}$ を "十分よく"近似している（つまり $i < \operatorname{codim}_V(V-U)$ の範囲で inclusion $\iota: X_{U\oplus V_1} \to X_{U'}$ は Chow 群の同型を導く）．そこで，$\iota_* \circ p^*: A_*(X_U) \to A_{*+l_1}(X_{U'})$（$l_1 = \dim V_1$）の極限を取る．

が定義され，基本類は同変 Poincaré 写像 $\frown [X]_G : A^i_G(X) \to A^G_{n-i}(X)$ を与える．特に X が非特異のとき，これは同型である（Dual_G と記す）．

$\mathcal{F}^G_{inv}(X \times V)$ を $X \times V$ 上の G-不変な構成的関数全体がなす Abel 群とする（$\mathcal{F}(X \times V)$ の部分群）．同変 Chow 群と同様に，$p^{V'}_V : V' = V \oplus V_1 \to V$ の pullback により帰納的極限が定義される：

$$\mathcal{F}^G(X) := \varinjlim \mathcal{F}^G_{inv}(X \times V).$$

これを G-同変構成的関数のなす Abel 群と呼ぶ．これは帰納的極限 $\lim \mathcal{F}(X_U)$ と"無限余次元の台を持つ構成的関数を除いて"同じと見なされる．

（G-embeddable な）G-代数多様体と固有 G-射の圏に対して，次が成り立つ：

Theorem 0.9 （同変 Chern-MacPherson 変換 [24]）次を満たす自然変換

$$C^G_* : \mathcal{F}^G(X) \to A^G_*(X)$$

が唯一存在する：X が非特異ならば，$C^G(1\!\!1_X) = c^G(TX) \frown [X]_G$．とくに G の作用が自明のときは，$C^G_* = C_*$（MacPherson 変換）．

この証明（C^G_* の構成）の本質な点は Verdier-Riemann-Roch 公式にある[12]．また，次が成り立つ：

$$C^G_*(1\!\!1_X) = \chi(X) \cdot 1 + \cdots + [X]_G \in A^G_*(X) \quad (\chi(X) = \int_X 1\!\!1_X).$$

Remark 0.10 $C^G_*(1\!\!1_X)$ の構成と同様に，代数的 Borel 構成を用いて，同変 Chern-Mather 類 $C^G_M(X)$ および同変 Fulton 標準類 $C^G_F(X)$ が $A^G_*(X)$ の中に定義できる．

Remark 0.11 この C^G_* は商スタックに対する MacPherson 変換と見なせる．Edidin-Graham [7] は，$\mathcal{X} = [X/G]$（一般に．分離的でない Artin スタック）に対して，$\mathcal{X}$ の（整係数）Chow 群を $A_i(\mathcal{X}) := A^G_{i-g}(X)$ で与えている（これは presentation X，G の取り方に依らない）．全く同様の証明で，$\mathcal{F}(\mathcal{X}) := \mathcal{F}^G(X)$ が well-defined となる．したがって，上の C^G_* はそのまま（商スタックに対する $\mathcal{F}$ と A_* の間の）Grothendieck 自然変換 $C_* : \mathcal{F}(\mathcal{X}) \to A_*(\mathcal{X})$ と見なされる．ただし，自然性に関して，ここでは，商スタック間の射に制限を付けて考えている：射 $[X/G] \to [Y/H]$ として，$f : X \to Y$ と準同型 $\varphi : G \to H$ があって $f(g.x) = \varphi(g).f(x)$ なるものから induce される射を考える．

0.4 Thom 多項式とその "total class version"

代数多様体 $X(\subset M)$ の Fulton 標準類の定義を逆手にとって，Chern-Schwartz-MacPherson 類に対応する "Segre 類" を次で与える：

$$s^{SM}(X, M) := c(TM|_X)^{-1} \frown C_*(X).$$

[12]代数的有限次元近似において，ベクトル束 $p : X_{U \oplus V_1} \to X_U$ の pullback p^* に VRR 公式を用いる．

(cf. Aluffi [2]). Mather 類 $C^M(X)$ に対応する Segre 類 $s^M(X,M)$ も同様に与えられる. X が非特異ならば, いずれの "Segre 型特性類" $s^\diamond(X,M)$ ($\diamond = F, M, SM$) も法束 $\nu = TM/TX$ の inverse Chern 類 $c(-\nu) \frown [X]$ であることに注意する. さらに非特異多様体の間の射 $f: M' \to M$ が X に対してしかるべき横断性条件を満たすならば, $X' = f^{-1}(X)$ と置いて, $s^\diamond(X', M') = f^* s^\diamond(X,M)$ が成立する.

同変版も平行にできる. X を G-代数多様体とし, 非特異 G-多様体 M に同変に埋め込まれているとき, 同変 Segre-SM 類を次で与える: $s^G_{SM}(X,M) := c^G(TM|_X)^{-1} \frown C^G_*(X) \in A^G_*(X)$. 特に, ambient space M がアファイン空間の場合を考える:

Definition 0.12 G-アファイン空間 V と V の G-不変部分代数多様体 W が与えられたとき, W の同変基本類の G-同変 Poincaré 双対を G-特性類と見なしたものを W の Thom 多項式と呼ぶ:

$$tp(W) = \mathrm{Dual}_G\, \iota_*[W]_G \in A^l_G(V) \simeq A^l(BG) \qquad (l = \mathrm{codim}\, W).$$

この tp ("同変基本類") の一般化としては同変 Segre 類がふさわしい. どの同変 Segre 類 $s^G_\diamond$ ($\diamond = F, M, SM$) でもよいが, ここでは "局所不変量の積分" にこだわっているので, 次を考える:

$$tp^{SM}(W) (= tp^{SM}(1\!\!1_W)) := \mathrm{Dual}_G\, \iota_* s^G_{SM}(W,V) = tp(W) + \text{higher terms} \in A^*(BG).$$

線形に拡張して群準同型 $tp^{SM}: \mathcal{F}^G_{inv}(V) \to A^*(BG)$ が与えられる.

前出の「(複素解析的) 写像の特異点」での tp は, $V = \mathcal{E}(m,n)$, $G = \mathcal{K}_{m,n}$ さらに $W = \bar{\eta}$ (closure η) を考えていることに対応する (但し $l = m-n$ を固定して帰納的極限 $\lim \mathcal{E}(m, m-l)$ ($m \to \infty$) を取る). 例えば, $f: M \to N$ の η 型特異点集合 $\eta(f)$ について, その閉包 $\bar{\eta}(f)$ の基本類の "universal" な Chern 類表示が Thom 多項式 $tp(\eta)$ であったが, $\bar{\eta}(f)$ の Euler 標数に関しても "universal" な Chern 類表示の存在が示される:

$$\chi(\bar{\eta}(f)) = \int_M c(TM) \cdot tp^{SM}(\bar{\eta})(c(f)).$$

ただし, この状況では $tp^{SM}(\bar{\eta})(c) = tp(\eta)(c) + \cdots$ は普遍 Chern 類 $c_1, c_2, \cdots$ の形式的べき級数である. "閉包" $\bar{\eta}$ には無数の隣接軌道が含まれてしまうので, $\mathcal{K}$-分類ができている余次元の範囲でのみ具体的な計算が可能である. しかし, 面白いことに Milnor 数 ($\mathcal{K}$-不変量) μ について $tp^{SM}(\mu)$ はすべての項が決定できる:

Theorem 0.13 ([25]) $l \geq 0$ とする. *Milnor* 数構成的関数 $\mu: \mathcal{E}(\infty, \infty - l) \to \mathbf{Z}$ の同変 *Segre-MacPherson* 類は, $tp^{SM}(\mu)(c) = (-1)^{l+1} \sum_{i,j \geq 0} c_i \bar{c}_{l+j+1}$ で与えられる.

ある意味で, これは Example 0.2 の一般化, あるいは, "Milnor 類の相対版" (isolated complete intersection の族に対する Milnor 類) (cf. Remark 0.8) と見なされる. Milnor 数の他に, generic hyperplane の Milnor 数あるいは Polar 重複度などの tp^{SM} も考えられる.

0.5 オービフォルド Euler 標数の "total class version"

この節はいままでと少し趣向が違って，有限群作用の話である[13]．以下，G を有限群とし，G-作用を有する（特異）多様体 X に対して $\mathcal{X} := [X/G]$ とおく．

X 上の構成的関数で G の作用の仕方を反映する何らかの "標準的な" ものを取り出すことを考える．まず，$\mathcal{X}$ の Euler 標数およびオービフォルド Euler 標数を思い出す．これらは G-不変構成的関数

$$1\!\!1^{(1)}_{X/G} := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} 1\!\!1_{X^g}, \quad 1\!\!1^{(2)}_{X/G} := \frac{1}{|G|}\sum_{gh=hg} 1\!\!1_{X^g\cap X^h},$$

の X 上での積分で与えられる：$\chi(X/G) = \int_X 1\!\!1^{(1)}_{X/G}$，$\chi^{orb}(X;G) = \int_X 1\!\!1^{(2)}_{X/G}$．

より一般に，A を任意の群で $|\mathrm{Hom}(A,G)| < \infty$ を満たすものとする．A の G-表現全体に関する和として

$$1\!\!1^{(A)}_{X/G} := \frac{1}{|G|}\sum_{\rho} 1\!\!1_{X^{\rho(A)}}$$

とおき，これを群 A に付随する G-同変構成的関数と呼ぶ（ここで，$X^{\rho(A)} := \cap_{g\in\rho(A)} X^g$）．当たり前だが，rank 1, 2 の自由 Abel 群 $A = \mathbf{Z}, \mathbf{Z}^2$ が上記の 2 つのケースであることに注意する．簡単のため，$A = \mathbf{Z}^m$ に付随する G-同変構成的関数を $1\!\!1^{(m)}_{X/G}$ と略記し，$\chi_m(X;G) := \int_X 1\!\!1^{(m)}_{X/G}$ とおく（これは Bryan-Fulman(1998) の一般化されたオービフォルド Euler 標数に一致）．

これらの構成的関数に C^G_* を作用させれば，しかるべき意味を持つホモロジー特性類が得られる．

• 対称積のオービフォルド Chern 類とその母関数： 一例として，対称積 $S^nX := X^n/S_n$ を考える（X は特異であってもよい）．よく知られているように対称積の Euler 標数の母関数は次で与えられる（Macdonald, 1962）：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi(S^nX)z^n = (1-z)^{-\chi(X)}. \tag{3}$$

この母関数表示 (3) において，Euler 数を Chern-MacPherson 類に読み替え，さらに不定元 z に "作用素" の役割を付加させて（"zD" に置き換える），次の "Chern class version" を得る：

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_*(S^nX)z^n = (1-zD)^{-C_*(X)}. \tag{4}$$

さらにオービフォルド Euler 標数の母関数表示についての "Chern class version" は，

$$\sum_{n=0}^{\infty} C^{orb}_*(S^nX)z^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1-z^kD^k)^{-C_*(X)}. \tag{5}$$

[13]実際，数値的な数え上げを考える場合（つまり degree を考える場合），$1/\chi(G)$ 等の係数の出現は不可避であり，$\chi(G)=0$ では意味がなくなる一単にこれを避けるために有限群作用とした．また，最初の節（写像の Thom 多項式）との関係で言えば，後述の対称積に関する話は「多重点公式 $tp(\eta_{multi})$」の "total class version" への応用を念頭に置いている．

以下，これらの式 (4) と (5) の記号の意味を説明する．

まず，$A_*(S^nX)\otimes\mathbf{Q}=A_*^{S_n}(X)\otimes\mathbf{Q}$ が成立することに注意する．この同一視のもと，S^nX の Chern-SM 類 $C_*(S^nX)$ は $C_*^{S_n}(1\!\!1^{(1)}_{X^n/S_n})$ に一致する．また，(5) 式左辺にある $C_*^{orb}(S^nX)$ は，$C_*^{S_n}(1\!\!1^{(2)}_{X^n/S_n})$ に対応する $A_*(S^nX)\otimes\mathbf{Q}$ の元を指す．

さて，(4) 式，(5) 式が住んでいる場所は，次のような "形式的べき級数" の全体がなす $\mathbf{Q}$-代数である：

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^nA_*^{S_n}(X^n)\otimes\mathbf{Q}=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\xi_nz^n,\xi_n\in A_*^{S_n}(X^n)\otimes\mathbf{Q}\right\}.$$

(ξ_n は全 Chow ホモロジー類)．積は $(\xi z^m)\odot(\xi'z^n):=\frac{z^{m+n}}{(m+n)!}\cdot\sum_{\sigma\in S_{m+n}}\sigma_*(\xi\times\xi')$ で与える．

記号 D は "対角作用素の生成元" を意味する：すなわち，$D^0=1$，$D^1=D=(id_X)_*$，

$$D^n:=(\Delta^n)_*:A_*(X)\otimes\mathbf{Q}\to A_*^{S_n}(X^n)\otimes\mathbf{Q}$$

(diagonal embedding $\Delta^n:X\to\Delta X^n\subset X^n$ の誘導準同型)．さらに「記号の約束」として，$zD=Dz$ および

$$(1-zD)^{-c}:=exp(-Log(1-zD)(c))=exp(zD(c))\odot exp(\frac{z^2}{2}D^2(c))\odot\cdots$$

と表記することにする（各 z^n の係数は有限和なのでこれは意味を持つ）．つまり，"対角作用素代数" における 2 種類の "指数関数・対数関数" を考えている：形式的べき級数環 $\mathbf{Q}[[Z]]$ ($Z:=zD$) における指数関数と対数関数を Exp，Log と記し，さらに，$\odot$ を形式的な積として $\mathbf{Q}[[Z]]$ が生成する新たな $\mathbf{Q}$-代数を考えて，その $\mathbf{Q}$-代数における（$\odot$ に関する）指数関数と対数関数を exp，log と記している．

式 (4) と (5) において，各 z^n の係数として "0-次元ホモロジー" だけ抜き出してくれれば，各々，式 (3) およびオービフォルド Euler 標数の母関数表示に一致する．

構成的関数においても同様に，$\mathbf{Q}$-代数 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n\mathcal{F}^{S_n}(X^n)\otimes\mathbf{Q}$ が考えられて（積 $\odot$ も同じ形で定義する），D^n 作用素も同様に与えられる．さらに，"構成的関数および Chow ホモロジー係数の" ベキ級数代数の間に，$\mathbf{Q}$-代数としての自然変換 C_*^{sym} が与えられる（つまり積 $\odot$ も保存する）：

$$C_*^{sym}(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_nz^n):=\sum_{n=0}^{\infty}C_*^{S_n}(\alpha_n)z^n.$$

この種の公式の一般な形は次で与えられる：X を G-（特異）多様体とし，$G_n:=G^n\sim S_n$ を wreath product とする（G と S_n の半直積群）．$\Omega_A(r)$ で A の中の指数 r の部分群全体の集合とする．和の有限性に関するしかるべき条件の下，次が成り立つ：

Theorem 0.14 (Chern 類に関する "Dey-Wohlfahrt" 公式 [25])：

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_*^{G_n}(1\!\!1^{(A)}_{X^n/G_n})z^n=exp\left(\sum_{B\in\Omega_A}\frac{1}{|A:B|}(zD)^{|A:B|}C_*^G(1\!\!1^{(B)}_{X/G})\right).$$

Remark 0.15 $X = pt$ とすれば，これは wreath product 表現の個数 $|\mathrm{Hom}(A, G_n)|$ の数え上げ公式（[23]）を与える（$G = \{e\}$ のとき，古典的な Dey-Wohlfahrt 公式）：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\mathrm{Hom}(A, G_n)|}{|G|^n n!} z^n = exp\left(\sum_{B\in\Omega_A} \frac{|\mathrm{Hom}(B, G)|}{|G|\cdot|A:B|} z^{|A:B|}\right).$$

より一般に，部分群や表現などの数え上げ母関数（e.g.,[42]）について，ある種の次数付き空間列の Chern 類母関数に拡張することを，上の指数関数公式は示唆している．

$G = \{e\}$ で $A = \mathbf{Z}, \mathbf{Z}^2$ の場合が前出の２つの Chern 類生成母関数であり，さらに $A = \mathbf{Z}^m$ の場合に得られる Chern 類の母関数公式において，その "0-次元ホモロジー" 部分は，$\chi_m(X^n; S_n)$ の生成母関数である（wreath product の場合は Tamanoi (2001) の公式を与える）：

Corollary 0.16

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_m(X^n; S_n)\, z^n = \prod_{j_1,\cdots,j_{m-1}\geq 1} \left(\frac{1}{1 - z^{j_1 j_2 \cdots j_{m-1}}}\right)^{j_1^{m-2} j_2^{m-3} \cdots j_{m-2}\, \chi(X)}.$$

- $k = \mathbf{C}$ の場合において，複素代数多様体の（位相的）Euler 標数，算術種数，符号数は，所謂 Hirzebruch の χ_y-種数により統合されるのであった（各々，$y = -1, 0, 1$ の場合に対応）．χ_y-種数の自然変換としての "class version" として，Brasselet-Schürmann-Yokura [4]（[35]）により，"モティビック Chern 類" mC_* と "Hirzebruch 類自然変換" $(T_y)_*$ が導入されている．特に，$y = -1, 0$ とすれば，これは Chern-MacPherson 自然変換と Baum-Fultn-MacPherson による Riemann-Roch を与える：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{F}(X) & \longleftarrow & K_0(var/X) & \xrightarrow{mC_*} & G_0(X) \\
C_* \downarrow & & (T_y)_* \downarrow & & \downarrow, td_* \\
H_*(X; \mathbf{Q}) & \xleftarrow{y=-1} & H_*(X) \otimes \mathbf{Q}[y] & \xrightarrow{y=0} & H_*(X; \mathbf{Q})
\end{array}$$

ここで，$G_0(X)$ は X 上の代数的連接層の Grothendieck 群，$K_0(var/X)$ は（X 上の）代数多様体の相対 Grothendieck 群を指す．この自然変換は，X の特異点に関する適当な条件下で，弦的不変量（stringy invariant）の "class version"（例えば，Hodge 多項式や elliptic 種数（Borisov-Libgober）の一般化）を示唆している．

この節での対称積に関する議論（C_*^{sym} 等）は，そのままこの自然変換にも適用できて，結果，(Baum-Fultn-MacPherson の）Todd 類などに関する同種の母関数公式が得られる．

参考文献

[1] P. Aluffi, *Chern classes for singular hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), 3989–4026.

[2] ———, *Inclusion-Exclusion and Segre class, I and II*, arXiv: AG/0203122, AG/0203284.

[3] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps, vol. I*, Monographs Math. 82, Birkhäuser (1985)

[4] J. P. Brasselet, J. Schürmann and S. Yokura, *Hirzebruch classes and motivic Chern classes for singular spaces*, arXiv:AG/0503492.

[5] J. P. Brasselet and M. H. Schwartz, *Sur les classes de Chern d'une ensemble analytique complexe*, Astérisque vol 82–83 (1981), 93–148.

[6] J. P. Brasselet, D. Lehmann, J. Seade and T. Suwa, *Milnor classes of local complete intersections*, Trans. AMS. 354 (2002), no. 4, 1351–1371.

[7] D. Edidin and W. Graham, *Equivariant intersection theory*, Invent. Math. 131 (1998), 595–634.

[8] L. Ernström, T. Ohmoto and S. Yokura, *Topological Radon transformations*, Jour. Pure and Applied Algebra, Vol. 120, No. 3, (1997), 235–254

[9] L. Fehér and R. Rimányi, *Classes of degeneracy loci for quivers: the Thom polynomial point of view*, Duke Math. Jour. 114, no.2, (2002), 193–213.

[10] ———, *Schur and Schubert polynomials as Thom polynomials – cohomology of moduli spaces*, Cent. Eur. J. Math. 1, no. 4, (2003), 418–434.

[11] ———, *Calculation of Thom polynomials and other cohomological obstructions for group actions*, Real and Complex Singularities (Sao Carlos, 2002), Contemp. Math., 354, AMS, (2004), 69–93.

[12] W. Fulton, *Intersection Theory*, second edition, Springer-Verlag (1997)

[13] W. Fulton and R. MacPherson, *Categorical framework for the study of singular spaces*, Memoirs of the AMS, vol. 243 (1981).

[14] F. Hirzebruch and T. Höfer, *On the Euler number of an orbifold*, Math. Ann. 286 (1990), 255–260.

[15] D. Joyce, *Constructible functions on schemes and stackes*, preprint, arXiv:AG/0403305

[16] M. E. Kazarian, *Characteristic Classes of Singularity Theory*, Arnold-Gelfand Seminars, Birkhäuser (1997), 325–340

[17] ———, *Multisingularities, cobordisms and enumerative geometry*, Russian Math. Survey 58:4 (2003). 665–724 (Uspekhi Mat. nauk 58:4 29–88).

[18] ———, *Thom polynomials*, to appear in Proceedings of JMS conference "Singularity Theory and its application", Sapporo, 2003.

[19] G. Kennedy, *MacPherson's Chern classes of singular algebraic varieties*, Comm. Algebra, 18(9) (1990), 2821–2839.

[20] I. G. Macdonald, *The Poincaré polynomial of a symmetric product*, Proc. Camb. Phil. Soc. 58 (1962), 563–568.

[21] R. MacPherson, *Chern classes for singular algebraic varieties*, Ann. of Math. , vol. 100, no.3 (1974), 421–432.

[22] J. Mather, *Stability of C^∞ mappings: III, Finite determined map germs*, Publ. Math. IHES, 89 (1969), 127–156.

[23] T. Müller, *Enumerating representations in finite wreath product*, Adv. Math. 153 (2000), 118–154.

[24] T. Ohmoto, *Equivariant Chern classes of singular algebraic varieties with group actions*, to appear in Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. (2006).

[25] ———, *Generating functions of Chern classes I : Symmetric Products*, preprint (2005).

[26] ———, *Generating functions of Chern classes II : Hilbert schemes*, in preparation.

[27] ———, *Thom polynomial expression for Segre type classes of singular loci of maps*, preprint (2005).

[28] ———, *Chern classes and Thom polynomials*, e-lect. note, Advanced School and Workshop on Singularities in Geometry and Topology, ICTP, 2005.

[29] T. Ohmoto and S. Yokura, *Product formula of Milnor class*, Bull. Polish Academy of Sciences, vol. 48, No. 4 (2000), 388–401

[30] T. Ohmoto, T. Suwa and S. Yokura *A Remark on Chern Classes of Complete Intersections*, Proceedings of Japan Academy, 73, Ser. A (1997), 93–95

[31] A. Parusiński and P. Pragacz, *Characteristic classes of hypersurfaces and characteristic cycles*, J. Algebraic Geom. 10 (2001), no.1, 63–79.

[32] I. R. Porteous, *Simple singularities of maps*, Proceedings of Liverpool Singularities I, Lect. Notes Math., vol. 192, Springer (1971), 286–307.

[33] R. Rimányi, *Thom polynomials, symmetries and incidences of singularities*, Inv. Math. 143 (2001), 499-521

[34] J. Schürmann, *A generalized Verdier-type Riemann-Roch theorem for Chern-Schwartz-MacPherson classes*, arXiv:AG/0202175.

[35] J. Schürmann and S. Yokura, *A survey of characteristic classes of singular spaces*, arXiv: AG/0202175.

[36] M. H. Schwartz, *Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe*, C. R. Acad. Sci. Paris t.260 (1965), 3262-3264, 3535–3537

[37] T. Suwa *Classes de Chern des intersections complètes locales*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol 324 (1996), 67–70.

[38] ———, *Indices of Vector Fields and Residues of Singular Holomorphic Foliations*, Actualités Mathématiques, Hermann (1998).

[39] B. Totaro, *The Chow Ring of a Classifying Space*, Proc. Symposia in Pure Math., vol. 67 (1999), 249–281.

[40] S. Yokura, *On a Verdier-type Riemann-Roch for Chern-Schwartz-MacPherson class*, Topology and Its Application 94 (1999), 315–327

[41] ———, *On characteristic classes of complete intersections*, "Algebraic Geometry - Hirzebruch 70", Contemporary Math. AMS. 241 (1999).

[42] T. Yoshida, *Classical Problems in Group Theory (I): Enumerating subgroups and homomorphisms*, Sugaku Expositions, AMS, Vol. 9, No.2, (1996), 169–188.