代数幾何学シンポジウム記録
2005年度 pp.106-115

量子Lefschetzによる量子コホモロジーの収束

入谷 寛*

平成18年1月7日

1 序

量子コホモロジー環とはコンパクトなシンプレクティック多様体に対して定義される結合的な代数で，通常のコホモロジー環をいくつかの変形パラメータにより変形したものである．量子コホモロジーの積の構造定数は変形パラメータに関する形式べき級数として定義されており，その収束は非自明である．しかし，これまで収束しない例は見つかっておらず，Calabi-Yauの場合はミラー対称性の観点からも一般に収束が期待される．

CoatesとGiventalによる量子Lefschetz定理により，多様体Xの量子コホモロジーからその中の超曲面Yの量子コホモロジーを部分的に計算することができる．本稿では，Xの量子コホモロジーの構造定数が収束するときに，Yの量子コホモロジーの構造定数のうち量子Lefschetz定理を用いて計算されるものは収束する，という定理を報告する．この応用として、Fanoではないトーリック多様体に対しても，量子コホモロジーの半単純性や，全種数でのGromov-Witten理論のビラソロ予想を示すことができる．これらはFanoトーリックの場合にはすでに知られていたものである．

2 量子コホモロジー

Xをコンパクトなシンプレクティック多様体とする．小量子コホモロジー$QH^*_{\mathrm{small}}(X)$は加群としては

$$H^*(X)\otimes\mathbb{C}[[q_1,\dots,q_r]],\quad r=\dim H_2(X)$$

*Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University, Kitashirakawa Oiwake-cho Sakyo-ku Kyoto 606-0816, Japan, iritani@math.kyoto-u.ac.jpa

と同型であり，ここに(超)可換かつ結合的な積$*$を入れたものである．また，$*$は$\mathbb{C}[[q_1,\ldots,q_r]]$上双線形であり，パラメータ$q=0$とおくと，コホモロジー環のカップ積に一致する．小量子コホモロジーの積$*$の構造定数は三点関数によって与えられる．A,B,CをXのサイクルとし，$[A],[B],[C]$をそれらが代表するコホモロジー類とする． このとき，

$$\langle [A],[B],[C]\rangle_d := \ A,\ B,\ C \text{ に交わる次数 } d \text{ の } J\text{-正則球面} (\mathbb{P}^1) \text{ の「数」}.$$

ここで「数」と書いたものは正確には符号つきの個数であり，さらに自己同型があるときにはその位数で割るために一般には有理数になる．またdは2次の整ホモロジー類である．積$*$はこれを用いて，

$$\langle [A]*[B],[C]\rangle = \sharp(A\cap B\cap C)+\sum_{d\neq 0}\langle [A],[B],[C]\rangle_d q^d.$$

と定義される．ここで，左辺のペアリングは$\langle \alpha,\beta\rangle=\int_X \alpha\cup\beta$で定義される．右辺の初項は通常のコホモロジーのカップ積から来る古典的な部分に対応し，第二項は量子効果を表している．q^dは$H_2(X,\mathbb{Z})$の群環の元であり，$H_2(X,\mathbb{Z})$の基底に対応する変数$q_1,\ldots,q_r$を用いると$q^d=q_1^{d_1}\cdots q_r^{d_r}$と書かれる．量子効果は(先験的には)$q$の形式的べき級数であたえられ，この収束が本稿のテーマである．

より一般にn点関数$\langle \alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle_d$が$\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in H^*(X)$に対して定義され，それを用いて大量子コホモロジー環$(QH^*_{\mathrm{big}}(X),*)$が定義される．

$$QH^*_{\mathrm{big}}(X)=H^*(X)\otimes\mathbb{C}[[q,t]],\quad q=(q_1,\ldots,q_r),\ t=(t_0,\ldots,t_s)\in H^*(X)$$

$$\langle \alpha*\beta,\gamma\rangle=\sum_{d,n}\langle \alpha,\beta,\gamma,\overbrace{t,\cdots,t}^{n}\rangle_d\frac{q^d}{n!}.$$

ここで$t_0,\ldots,t_s$は$H^*(X)$の基底$T_0,\ldots,T_s$に関する線形座標．変数t_iを0とする時，大量子コホモロジーは小量子コホモロジーに一致する．

本稿の主定理は次のとおりである．

Theorem 2.1 ([5]) Xを滑らかな射影的代数多様体とする．$L\to X$を第一Chern類がnefである直線束とする．$QH^*_{\mathrm{big}}(X)$のすべての構造定数が収束すると仮定する．このとき，Lでねじられた量子コホモロジー$QH^*_{S^1}(X;L)$の構造定数は収束する．

主定理に現れる「ねじられた量子コホモロジー」とはやはり通常のコホモロジー環$H^*(X)$の変形である．これは$L\to X$の任意の横断的切断sから定まる滑らかな超曲面$Y=s^{-1}(0)\subset X$の量子コホモロジーと密接に関係する．後で見るように$QH^*(Y)$の構造定数は部分的に$QH^*_{S^1}(X;L)$のそれから計算され，$QH^*(Y)$の収束性が上の定理から部分的に従う．

3 収束について知られていたこと

量子コホモロジーは通常のコホモロジーの次数と，変数 q, t の次の次数付けに関して次数つき環になる．

$$\deg q^d = 2\langle c_1(X), d\rangle, \quad \deg t_i = 2 - \deg T_i$$

この次数は球面から X への正則写像のモジュライ空間の次元から決まっている．このことから，たとえば X が Fano $(-K_X > 0)$ ならばすべての q^d の次数は正であり，小量子コホモロジーの構造定数はつねに q の多項式となることがわかる．(q^d に現れる d は曲線で代表されるクラスのみである.) また逆に X が general type $(-K_X < 0)$ ならば q^d の次数も t_i の次数も共に負であり，大量子コホモロジーの構造定数も q と t の多項式である．($\deg T_i = 0, 1, 2$ となる t_i の次数は非負であるが，それらは影響しない．) したがって，以上の場合には収束性は自明に成り立っている．以下にもう少し非自明な場合を見よう．まず，$H^*(X)$ が環として $H^2(X)$ で生成される場合，小量子コホモロジーが大量子コホモロジーを決定することが知られている．さらに次が成り立つ．

Theorem 3.1 ([3, 5]) $H^*(X)$ が環として $H^2(X)$ で生成されると仮定する．もし $QH^*_{\mathrm{small}}(X)$ の構造定数が収束するならば，$QH^*_{\mathrm{big}}(X)$ の構造定数も収束する．

このことの系として，Fano 多様体 X で $H^*(X)$ が $H^2(X)$ で生成されているものの大量子コホモロジーは収束している．Dubrovin の reconstruction theorem は大量子コホモロジーをひとつの例として含むフロベニウス多様体が半単純 (semi-simple) であるとき，フロベニウス多様体は半単純な点から等モノドロミー変形の変形空間として再構成されることを主張している．したがって，次がいえる．

Theorem 3.2 ([2]) $QH^*_{\mathrm{big}}(X)$ があるパラメータの値 q, t で収束しており，その点で半単純であるならば，$QH^*_{\mathrm{big}}(X)$ は全体で収束している．

一般に，Fano 多様体の量子コホモロジーは半単純であることが多く，上の定理から Fano 多様体の量子コホモロジーの収束が従う場合も多い．X が代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^N$ の作用を持ち，その作用の固定点および1次元軌道がすべて孤立しているとき，「よい」トーラス作用を持つと言うことにする．この場合，Bott の固定点定理を使うと，量子コホモロジー $QH^*(X)$ の構造定数はあるラベルのついた樹木グラフに渡った和として組み合わせ論的に書き下すことができる．この場合にも次が示される．

Theorem 3.3 ([6]) X が「よい」トーラス作用を持つとき，$QH^*_{\mathrm{big}}(X)$ の構造定数は収束する．

Kontsevich は $\mathbb{P}^n$ の超曲面 Y の量子コホモロジーを計算する次のような処方箋を示した [8]. $\mathbb{P}^1$ から Y への正則写像の (コンパクト化された) モジュライ空間 $\overline{M}(Y)$ は $\mathbb{P}^1$ から $\mathbb{P}^n$ への正則写像のモジュライ空間 $\overline{M}(\mathbb{P}^n)$ に含まれている. Y の n 点関数はモジュライ空間 $\overline{M}(Y)$ 上の積分としてあらわされる. そこで, Y の n 点関数の計算の際に, あるオイラー類をおくことによって, $\overline{M}(Y)$ の上での積分を $\overline{M}(\mathbb{P}^n)$ 上での積分に置き換えることができる. $\mathbb{P}^n$ にはトーラスが作用しているので, Bott の固定点公式を使うことで結局 Y の n 点関数を計算することができる. この計算は Givental や Lian-Liu-Yau, Bertram らによって実行され, $\mathbb{P}^n$ 内の Calabi-Yau 超曲面に対する量子コホモロジーの計算や, ミラー対称性の証明に役立った [4].

この状況を一般化して, 与えられた多様体 X の超曲面 Y の量子コホモロジーを求めるという問題を考えることができる. この場合, $QH^*(X)$ は一般に既知であって $QH^*(X)$ と $QH^*(Y)$ の間の関係を記述することになるが, このタイプの定理を量子 Lefschetz 定理と呼ぶ. 現在知られている量子 Lefschetz 定理の中でもっとも強力なものは Coates と Givental によるもので, これは X がトーラス作用を持つということさえ仮定しない. 収束性を調べる観点からは, ambient 空間 X はトーラス作用をもっていたり Fano であったりして, $QH^*(X)$ の収束は知られていることが多い. そこで Coates と Givental による量子 Lefschetz 定理と収束性との整合性を調べることが問題となり, これが主定理の動機となっている.

量子コホモロジーを計算する別の方法として, 多様体を退化させる方法もある. たとえば, Jun Li による退化公式はある多様体が正規交叉する二つの多様体の smoothing として得られるときに, もとの多様体の量子コホモロジー (より一般には Gromov-Witten 不変量) を退化した二つの多様体の相対 Gromov-Witten 不変量から計算するというものである. この退化公式も Gromov-Witten 不変量のさまざまな計算に使われている. 一般の多様体に対する収束性を示すためには, 退化公式と収束性との整合性の検証も必要になってくると思われる.

4 ねじられた量子コホモロジー

ここでは簡単のため $c_1(L)$ が nef の場合に限り, X 上の直線束 L でねじられた量子コホモロジー $QH^*_{S^1}(X; L)$ について説明する. また, 以下では断りがなければ, 量子コホモロジーは大量子コホモロジーを意味するものとする. 多様体 X への n 点つき種数 0 の安定写像とは, 高々通常 2 重点のみの特異性を持ち算術的種数が 0 の曲線 C, C の滑らかな部分にある異なる n 点 $x_1, \ldots, x_n$ および正則写像 $f\colon C \to X$ の組 $(C, (x_1, \ldots, x_n), f)$ であって, 無限小の自己同型を持たないものである. $\overline{M}_{0,n}(X, d)$ を n 点つき, 種数 0 の X への次数 d の安定写像のモジュライ空間とする. これは固有な Deligne-Mumford stack

になる．$1 \leq i \leq n$ に対し，i 番目の点での評価写像 $\mathrm{ev}_i\colon \overline{M}_{0,n}(X,d) \to X$ が定まる．また，$n+1$ 番目の点を忘れる写像 $\mathrm{fgt}_{n+1}\colon \overline{M}_{0,n+1}(X,d) \to \overline{M}_{0,n}(X,d)$ も定まる．次の図式を考える．

$$\begin{array}{ccc} \overline{M}_{n+1}(X,d) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_{n+1}} & X \\ {\scriptstyle \mathrm{fgt}_{n+1}}\downarrow & & \\ \overline{M}_{0,n}(X,d) & & \end{array}$$

これにより，$\overline{M}_{0,n}(X,d)$ 上のベクトル束 $L_{n,d}$ を $L_{n,d} = {\mathrm{fgt}_{n+1}}_* \mathrm{ev}_{n+1}^*(L)$ と定義する．このベクトル束 $L_{n,d}$ は安定写像 $(C, x_1, \dots, x_n, f)$ でのファイバーが $H^0(C, f^*(L))$ に等しく，$c_1(L)$ が nef であるという仮定からランクは $\langle c_1(L), d\rangle + 1$ に等しい．$s\colon X \to L$ を切断とし，$Y = s^{-1}(0) \subset X$ を s の定める超曲面とする．$L_{n,d}$ は s からさだまる自然な切断 $\tilde{s}$ をもち，Y への安定写像のモジュライは $\tilde{s}$ のゼロ点集合としてあらわされる:

$$\overline{M}_{0,n}(Y,d) = \tilde{s}^{-1}(0) \subset \overline{M}_{0,n}(X,d), \quad \tilde{s}\colon \overline{M}_{0,n}(X,d) \to L_{n,d}.$$

そこで，L でねじられた n 点関数を次で定義する．

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle_d^L := \int_{[\overline{M}_{0,n}(X,d)]_{\mathrm{virt}}} \mathrm{ev}_1^*(\alpha_1) \cup \cdots \cup \mathrm{ev}_n^*(\alpha_n) \cup \mathrm{Euler}_{S^1}(L_{n,d}).$$

ここで，$[\overline{M}_{0,n}(X,d)]_{\mathrm{virt}}$ は Gromov-Witten 理論で定義される仮想基本類であり，Euler_{S^1} は S^1 同変オイラー類．ただし，$L_{n,d}$ にはファイバーへのスカラー倍で働く S^1 作用を考える．1 点の S^1 同変コホモロジーの生成元を λ とするとき，ねじられた不変量は $\mathbb{C}[\lambda]$ に値を持つ．ねじられた n 点関数と Y の n 点関数の間には次の関係が知られている．

Theorem 4.1 ([7]) L を X 上の nef な直線束，$Y \subset X$ を L の切断の定める滑らかな超曲面とする．$i\colon Y \hookrightarrow X$ を埋め込み写像とする．$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in H^*(X)$ に対して，非同変極限において，

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle^L \to \langle i^*\alpha_1, \dots, i^*\alpha_n\rangle_d^Y \quad \text{as } \lambda \to 0$$

が成立する．ここで，右辺は Y の n 点関数．

ねじられた不変量を用いてねじられた量子コホモロジー環 $(QH_{S^1}^*(X;L), *_L)$ が同様に定義される．

$$QH_{S^1}^*(X;L) = H^*(X) \otimes \mathbb{C}[\lambda][[q,t]],$$

$$\langle \alpha *_L \beta, \gamma\rangle^L = \sum_{n,d} \langle \alpha, \beta, \gamma, \overbrace{t, \dots, t}^{n}\rangle^L \frac{q^d}{n!}.$$

5

ここで，$\langle\alpha,\beta\rangle^L := \int_X \alpha\cup\beta\cup \mathrm{Euler}_{S^1}(L)$ である．上の定理が示すように，ねじられた量子コホモロジーは Y の量子コホモロジーと密接な関係にあり，X のコホモロジー類の制限として得られる Y 上のコホモロジー類に関する $QH^*(Y)$ の構造定数がそこから読み取れる．

5 量子 Lefschetz 定理

ここでは Coates と Givental による量子 Lefschetz 定理 [1] を紹介する．もともと，Lefschetz の超平面定理とは ample な直線束 L に対して，制限写像 $H^*(X) \to H^*(Y)$ が $* < \dim_{\mathbb{C}} Y$ で同型になることを主張する．明らかにこの制限写像は通常のコホモロジー環の間の環順同型であるが，量子コホモロジーの間の制限写像 $QH^*(X) \to QH^*(Y)$ は環順同型ではない．量子 Lefschetz はこの二つの環構造の違いを記述するものである．Coates と Givental による量子 Lefschetz 定理はこの両者の間にねじられた量子コホモロジー $QH^*_{S^1}(X;L)$ を考えて，$QH^*_{S^1}(X;L)$ と $QH^*(X)$ の間の関係を記述した．

まず，Givental による量子化の形式について簡単に説明する．X に対し次の無限次元シンプレクティックベクトル空間 $(\mathcal{H},\Omega)$ を用意する．

$$\mathcal{H} = H^*(X)[[\hbar^{-1},\hbar]], \quad \Omega(f(\hbar),g(\hbar)) = \mathrm{Res}_{\hbar=0}\langle f(-\hbar),g(\hbar)\rangle d\hbar.$$

$\mathcal{H}$ は isotoropic な部分空間 $\mathcal{H}_+,\mathcal{H}_-$ による直和分解を持つ．

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+\oplus\mathcal{H}_-, \quad \mathcal{H}_+ = H^*(X)[[\hbar]],\ \mathcal{H}_- = \hbar^{-1}H^*(X)[[\hbar^{-1}]].$$

X の Gromov-Witten 理論およびそれを L でねじった理論の各々に対して，理論の母関数 $\mathcal{F}^X$, $\mathcal{F}^{(X,L)}$ が $\mathcal{H}_+$ 上の形式的関数として定まる．ただしこれらは全種数にわたり，descendant も含む母関数である．(詳細は彼らの論文を参照されたい．) 母関数 $\mathcal{F}^X,\mathcal{F}^{(X,L)}$ は次の形をしている．

$$\mathcal{F} = \sum_{g=0}^{\infty}\epsilon^{g-1}\mathcal{F}_g.$$

ここで ϵ は種数展開のパラメータで，$\mathcal{F}_g$ は種数 g の部分である．通常の正準量子化の手続きと同様にして，$(\mathcal{H},\Omega)$ の線形シンプレクティック変換 A に対して，その量子化として，$\mathcal{H}_+$ 上の (一般には無限階の) 微分作用素 $\widehat{A}$ が定まる．ただし，ここで量子化のプランク定数にあたるのは $\hbar$ ではなく ϵ である．

Theorem 5.1 (量子 Riemann-Roch 定理 [1]) Δ を $\mathcal{H}$ の次のようなシンプレクティック変換とする．

$$\Delta = \exp\left(\sum_{m,l\geq 0} s_{2m+l-1}\frac{B_{2m}}{(2m)!}\,\mathrm{ch}_l(L)\hbar^{2m-1}\right).$$

ただし，B_{2m} はベルヌーイ数で $s_{-1}=0, s_0=\log\lambda, s_i=(-1)^{i-1}(i-1)!/\lambda^i$. このとき，$\mathcal{F}^{(X,L)}$ と $\mathcal{F}^X$ は次の関係にある．

$$\exp(\mathcal{F}^{(X,L)}) \propto \widehat{\Delta}\exp(\mathcal{F}^X).$$

この定理はすべての種数にわたった母関数の関係を与えるが，種数 0 の部分の情報のみを取り出すこともできる．まず，種数 0 の部分の母関数 $\mathcal{F}_0$ にたいし，1 形式 $d\mathcal{F}_0\colon \mathcal{H}_+ \to T^*\mathcal{H}_+$ を同一視 $T^*\mathcal{H}_+ \cong \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- = \mathcal{H}$ によって $\mathcal{H}$ に値を持つと考えることにする．次の系によれば，$\exp(\mathcal{F}_0/\epsilon + \mathcal{F}_0 + \epsilon\mathcal{F}_1 + \cdots)$ の準古典極限は $d\mathcal{F}_0$ のグラフと考えられる．

Corollary 5.2 (量子 Lefschetz 定理 [1]) 1 形式のグラフ $\mathrm{Graph}(d\mathcal{F}_0^X)$，$\mathrm{Graph}(d\mathcal{F}_0^{(X,L)})$ は $\mathcal{H}$ のなかのラグランジアン錐をなし，次が成立する．

$$\mathrm{Graph}(d\mathcal{F}_0^{(X,L)}) = \Delta\,\mathrm{Graph}(d\mathcal{F}_0^X) \subset \mathcal{H}.$$

上の系は無限次元空間 $\mathcal{H}_+$ の上の母関数の言葉で量子 Lefschetz 定理を述べるものであるが，D 加群の言葉を使ってより具体的に述べることもできる．量子コホモロジー $QH^*(X)$ は次の平坦接続 $\nabla_a^\hbar$, $\nabla_i^\hbar$ の作用によって D 加群の構造を持つことが知られている．

$$\nabla_a^\hbar = \hbar q_a \frac{\partial}{\partial q_a} + p_a *, \quad 1 \le a \le r,$$
$$\nabla_a^\hbar = \hbar \frac{\partial}{\partial t_i} + T_i *, \quad 0 \le i \le s.$$

ここで，$p_1, \ldots, p_r$ は $q_1, \ldots, q_r$ に双対な $H^2(X)$ の基底である．これらの作用素は量子コホモロジーに作用し互いに可換であり，$QH^*(X)$ に D 加群の構造が入る．まったく同様に，ねじられた量子コホモロジー $QH^*_{S^1}(X;L)$ も D 加群の構造を持つ．上の量子 Lefschetz 定理は次のような言いかえを持つ．

Corollary 5.3 (量子 Lefschetz 定理，言い換え) 2 つの D 加群 $QH^*_{S^1}(X,L)$，$QH^*(X)$ はあるゲージ変換 g でつながっている．

$$g\colon (QH^*_{S^1}(X,L), \nabla^{\hbar,L}) \xrightarrow{\cong} (QH^*(X), \nabla^\hbar),$$

ただし，g は $g|_{q=0} = \sqrt{\mathrm{Euler}_{S^1}(L)}\Delta$ を満たす．

6 主定理の証明

主定理の証明は上の言い換えを用いて行われる．まず困難な点はゲージ変換の初期条件を与えるΔが$\hbar$に関して収束しない級数となっていることである．したがってgが収束することはまったく期待できない．証明では上の系におけるゲージ変換gを二つのゲージ変換の合成として求める．

$$g = g_1 \circ g_2, \quad g_1|_{q=0} = \sqrt{\mathrm{Euler}_{S^1}(L)}\Delta, \; g_2|_{q=0} = \mathrm{id}\,.$$

このとき，$QH^*(X)$ の接続 $\nabla^\hbar$ は 2 段階で変換される．

$$\nabla^\hbar \xrightarrow{(1)} g_1^*\nabla^\hbar \xrightarrow{(2)} g_2^*g_1^*\nabla^\hbar = \nabla^{\hbar,L}.$$

最初のゲージ変換g_1は具体的に書き下されるある発散級数である．これはCoates-Giventalにより hypergeometric modification と呼ばれている．一般に，量子コホモロジー D 加群 $(QH^*(X), \nabla^\hbar)$ に対して J 関数と呼ばれる $H^*(X)$ に値を持つ解 $J_X(q,t,\hbar)$ が定義される．これは g_1 による変換において次のように変化する．

$$J_X = \sum_{d\geq 0} J_d(t,\hbar)q^d \xrightarrow{(1)} J^{\mathrm{hyp}} = \sum_{d\geq 0} \prod_{k=0}^{\langle c_1(L),d\rangle} (c_1(L) + k\hbar + \lambda) J_d(t,\hbar)q^d.$$

この変化の形により，このステップを hypergeometric modification と呼ぶ．もしこの段階で J^{hyp} が収束すれば，次のゲージ変換 g_2 は自動的に収束して $QH^*_{S^1}(X,L)$ の収束性も従う．ところが，もし $c_1(X) - c_1(L)$ が nef でなければ J^{hyp} は q の形式べき級数になり，次のステップでの困難が残される．たとえ J^{hyp} が収束しない場合でも，接続 $g_1^*\nabla^\hbar$ の接続行列は次の評価つきべき級数環 $\mathcal{O}^\hbar$ に値を持つことが示される．

$$\mathcal{O}^\hbar = \left\{ \sum_{d,m,n\geq 0} A_{d,m,n} q^d t^m \hbar^n \; ; \; |A_{d,m,n}| \leq C_1 C_2^{|d|+|m|+n} |d|^n, \exists C_1, C_2 > 0 \right\}$$

次のステップ(2)では，次のLemmaを用いてゲージ変換g_2を求め，これにより$QH^*(X;L)$の収束性が示される．

Lemma 6.1 接続行列の各成分が環 $\mathcal{O}$ に属する平坦接続 $\widetilde{\nabla}^\hbar = \hbar d + \Omega(q,t,\hbar)$ にたいして，次を満たし，$\mathcal{O}^\hbar$ 上定義されるゲージ変換 g_2 が一意に存在する．

$$g_2|_{q=0} = \mathrm{id},$$
$$g_2^*\widetilde{\nabla}^\hbar = \hbar d + \Omega'(q,t), \quad \Omega'(q,t) \text{ は } \hbar \text{ によらない}.$$

さらにこのとき，$\Omega'(q,t)$ は収束べき級数になる．

この証明において注意したいのは，$c_1(Y) = c_1(X) - c_1(L)$ が nef のとき，主定理の主張は実は Coates-Givental の定理から明らかであるということである．特に，主定理は Calabi-Yau 超曲面の場合には何も新しいことを主張していない．報告者は個人的には Calabi-Yau の場合にはミラー対称性から収束が示されるだろう，と期待している．

7　応用

この収束の定理の応用として (正確にはこの証明の応用として)，Fano とは限らないトーリック多様体に対してもミラー対称性の様子が明らかになる，という副産物が得られる．たとえば，量子コホモロジーをミラーを用いて記述することにより，Fano ではない場合にもトーリック多様体の量子コホモロジーが半単純であることがわかる．さらに同変ミラーと Givental の理論を用いると，Fano ではないトーリック多様体に対するヴィラソロ予想も証明される．これらについては論文 [5] を参照されたい．

参考文献

[1] T. Coates, A.B. Givental, *Quantum Riemann - Roch, Lefschetz and Serre.* math.AG/0110142.

[2] B. Dubrovin, *Geometry of 2D topological field theories.* Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993), pp.120–348, Lecture Notes in Math. 1620, Springer, Berlin, 1996.

[3] C. Hertling, Yuri I. Manin, *Unfoldings of meromorphic connections and a construction of Frobenius manifolds.* Frobenius manifolds, 113–144, Aspects Math., E36, Vieweg, Wiesbaden, 2004.

[4] A. B. Givental, *Equivariant Gromov-Witten invariants.* Internat. Math. Res. Notices 1996, no. 13, pp.613–663.

[5] H. Iritani, *Convergence of quantum cohomology by quantum Lefschetz.* math.DG/0506236.

[6] H. Iritani, *Convergence of Gromov-Witten theory by localization.* in preparation.

[7] Bumsig Kim, A. Kresch, T. Pantev, *Functoriality in intersection theory and a conjecture of Cox, Katz, and Lee.* J. Pure Appl. Algebra 179 (2003), no. 1-2, pp.127–136.

[8] Maxim Kontsevich *Enumeration of rational curves via torus actions.* The moduli space of curves (Texel Island, 1994), 335–368, Progr. Math., 129, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995.