代数幾何学シンポジウム記録
2005年度 pp.89-93

高次ナッシュ爆発

安田　健彦

以下の報告は２００５年１０月に行われた城崎シンポジウムでの講演をまとめたものです．内容の詳細は論文 [Yas] を参照して下さい．

1　特異点解消とナッシュ爆発

以下標数 0 の代数閉体 k 上で考える。

代数多様体 X の**特異点解消**とは，非特異代数多様体 Y で X への固有双有理射 $Y \to X$ が与えられたもののことをいう．広中の定理により，任意の代数多様体に対して特異点解消が存在する．特異点解消は一意的ではないので，構成方法によって得られる特異点解消は異なる．そこで，特異点解消の良い構成方法を求める，というのは自然な問題だ．

X_{reg} を d 次元アフィン代数多様体 $X \subseteq \mathbb{A}^m$ の非特異点の成す開部分集合とし，G を $\mathbb{A}^m$ の d 次元線形部分空間の成すグラスマン多様体とする．点 $x \in X_{\text{reg}}$ での X の接空間 T_xX は G の点とみなせる．X の**ナッシュ爆発**とは，$X \times G$ の部分集合

$$\{(x, T_xX) | x \in X_{\text{reg}}\}$$

のザリスキ閉包として定義される．ナッシュ爆発は実際には X のアフィン空間への埋め込みには依らず，任意の代数多様体に対し，内在的に定義することも出来る．ナッシュ爆発（またはナッシュ爆発と正規化）を有限回繰り返して特異点解消が得られるか，という問題を考えるのは自然だ．この問題は Nobile, Rebassoo，González-Sprinberg，広中，Spivakovsky により研究された．詳しくは [GS] を参照のこと。

2 高次ナッシュ爆発

ナッシュ爆発は非特異点の接空間とその極限をパラメタ付ける空間だ．接空間の代わりに，他の幾何学的対象を使えば，新しい爆発を定義できる可能性がある．X を代数多様体，x をその点，$(\mathcal{O}_{X,x}, \mathfrak{m}_x)$ を x の局所環とするとき，x の n **次無限小近傍** $x^{(n)}$ を X のアルティン部分スキーム $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{n+1}$ と定義する．X が d 次元で，しかも点 x で非特異なとき，$x^{(n)}$ は長さが $\binom{n+d}{d}$ なので，X の $\binom{n+d}{d}$ 点のヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}_{\binom{n+d}{d}}(X)$ の点 $[x^{(n)}]$ に対応する．私は論文 [Yas] で**高次ナッシュ爆発**を次のように定義した．非負整数 n に対し，X の n **次ナッシュ爆発** $\mathrm{Nash}_n(X)$ を $\mathrm{Hilb}_{\binom{n+d}{d}}(X)$ の部分集合 $\{[x^{(n)}] | x \in X_{\mathrm{reg}}\}$ のザリスキ閉包と定義する．$n=0$ の場合，$\mathrm{Nash}_0(X)$ は X と同型になる．$n=1$ のときは，$\mathrm{Nash}_1(X)$ は上で定義したナッシュ爆発と同型になる．高次ナッシュ爆発は Oneto-Zatini によって定義された，連接層に付随するナッシュ爆発 [OZ] の特別な場合にもなっている。$\mathrm{Nash}_n(X)$ の点は全て，X の部分スキームで集合論的には 1 点になるものに対応する．したがって，写像

$$\pi_n : \mathrm{Nash}_n(X) \to X,\ [Z] \mapsto Z_{\mathrm{red}}$$

が定義できる．この写像は射影的双有理射で X_{reg} 上で同型射となる．

予想 1. X を d 次元代数多様体，n を非負整数，$[Z] \in \mathrm{Nash}_n(X)$ とする．$A \subseteq X$ をヤコビ・イデアル $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_X$ の d 乗で定義される閉部分スキームとする．もし Z がスキーム論的に A に含まれないなら，$\mathrm{Nash}_n(X)$ は点 $[Z]$ で非特異．

各 X に対し n を十分大きくとれば，任意の点 $[Z] \in \mathrm{Nash}_n(X)$ は仮定 $Z \not\subseteq A$ を満たす．従って，上の予想が正しければ，十分大きい n について，$\mathrm{Nash}_n(X)$ は X の特異点解消となる．

高次ナッシュ爆発はそれぞれ，与えられた代数多様体から直接，一つのステップで構成される．これは，広中の特異点解消定理の証明や，ナッシュ爆発の繰り返しと対照的だ．従って，一般に $\mathrm{Nash}_{n+1}(X)$ から $\mathrm{Nash}_n(X)$ へ自然な射は存在しない． また，$\mathrm{Nash}_{n+1}(X)$ の方が $\mathrm{Nash}_n(X)$ よりマイルドな特異点をもつとも限らない.（これらは定理 3 から具体的に分かる.）しかし，私は n が大きくなるにつれて，$\mathrm{Nash}_n(X)$ の特異点がマイルドになっていく**傾向があり**，十分大きな n に対して非特異になると予想している．

3 曲線の場合

C を解析的に既約な曲線，$\tilde{C}$ をその正規化とする．C の n 次ナッシュ爆発 $\mathrm{Nash}_n(C)$ は C と $\tilde{C}$ にはさまれる：

$$\tilde{C} \xrightarrow{\phi_n} \mathrm{Nash}_n(C) \xrightarrow{\pi_n} C.$$

$\mathrm{Nash}_n(C)$ はモジュライ空間なので，射 ϕ_n は C の部分スキームの $\tilde{C}$ 上の平坦族に対応する．この族を $\mathcal{Z}_n \subseteq \tilde{C} \times C$ と書く．ここで C の特定の点 c に注目しよう．C は解析的に既約なので，c は一意的に $\tilde{C}$ の点 $\tilde{c}$ に持ち上がる．

$$\epsilon : \operatorname{Spec} k[t]/(t^2) \to \tilde{C}$$

を $\tilde{c}$ での 0 でないザリスキ接ベクトルとし，

$$\mathcal{Z}_{n,\epsilon} := \operatorname{Spec} k[t]/(t^2) \times_{\epsilon,\tilde{C}} \mathcal{Z}$$

を定義する．$\mathcal{Z}_{n,\epsilon}$ は射 $\phi_n \circ \epsilon$ に対応する族.

定理 2. ϕ_n が $\tilde{c}$ の周りで同型射であることの必要十分条件は $\mathcal{Z}_{n,\epsilon}$ が非自明な族であること.

証明.

$$\begin{aligned}
&\phi_n \text{ が } \tilde{c} \text{ の周りで同型射} \\
&\Leftrightarrow \phi_n \circ \epsilon \neq 0 \in T_{\phi_n(\tilde{c})}(\mathrm{Nash}_n(C)) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{Z}_{n,\epsilon} \text{ は非自明な族}
\end{aligned}$$

□

数値的モノイドとは非負整数の成す加法に関するモノイド $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の部分モノイド S で，補集合 $\mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus S$ が有限集合になるものをいう．数値的モノイド S に対し，1 変数多項式環 $k[x]$ の部分環

$$k[S] := k[x^n; n \in S] \subseteq k[x]$$

が定義できる．スキーム $\operatorname{Spec} k[S]$ を S に付随する**単項式曲線**という．単項式曲線はただひとつの特異点をもつ．これを c とし，上のように各 n に対し，$\mathcal{Z}_{n,\epsilon}$ を定義しよう．この場合 $\mathcal{Z}_{n,\epsilon}$ を具体的に求めることができ，上の定理を適用することで，次の定理を証明できる．

定理 3. $S \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を数値的モノイドとし，S の元を小さい方から並べて，次のように書くことにする：

$$S = \{0 < s_0 < s_1 < s_2 < \cdots\}.$$

C を S に付随する単項式曲線とする．このとき，$\mathrm{Nash}_n(C)$ が非特異であることの必要十分条件は，$s_n - 1 \in S$.

例 4. S を 5 と 7 で生成される数値的モノイドとし，C をそれに付随する単項式曲線とする．S は明示的に次のように書ける．

$$S = \{0, 5, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, \dots\}.$$

24 以上の自然数は全て S に属する。例えば定理 3 の記号で s_2 は，この場合 10 で，$10 - 1 = 9$ は S に属さないので $\mathrm{Nash}_2(C)$ は特異点を持つ．このように見ていくと，$\mathrm{Nash}_n(C)$ が特異点を持つのは，n が $0, 1, 2, 3, 4, 6, 11$ のときで，それ以外のとき $\mathrm{Nash}_n(C)$ は非特異になる．

系 5. 予想 1 は平面単項式曲線（すなわち二つの互いに素な自然数で生成される数値的モノイドに付随する単項式曲線）に対しては正しい．

証明. 数値的モノイド S が互いに素な自然数 p, q で生成されるとし，C を S に付随する単項式曲線とする．$\mathrm{Nash}_n(C)$ の点 $[Z_n]$ を $\pi_n([Z_n])$ が C の特異点 c となるものとする。定理 3 の証明の中で，実は $Z_n \subseteq C$ がイデアル

$$\mathfrak{a}_n := (x^{s_m}; m \geq n) \subseteq k[S]$$

で定義されることも示す（[Yas] を参照のこと）．C のヤコビ・イデアルは

$$J = (x^{p(q-1)}, x^{q(p-1)}) \subseteq k[x^p, x^q].$$

一方，初等整数論で $(p-1)(q-1)$ 以上の自然数は全て S に属することが知られている．従って，もし $s_n > (p-1)(q-1)$ なら，定理 3 より $\mathrm{Nash}_n(C)$ は非特異．逆にもし $s_n \leq (p-1)(q-1)$ なら $\mathfrak{a}_n \supseteq J$ となり予想の仮定を満たさない． □

参考文献

[GS] G. González-Sprinberg. Désingularisation de surfaces par des modifications de Nash normalisées. Séminaire Bourbaki, Vol. 1985/86. Astérisque 145-146 (1987), 4, 187–207.

[OZ] A. Oneto and E. Zatini. Remarks on Nash blowing-up. *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, Vol. 49, 1 (1991), 71–82.

[Yas] T. Yasuda. Higher Nash blowups. preprint, `math.AG/0512184`