

高次 CHOW 群とその応用  
 城崎、2006年10月26日

THOMAS GEISSER\*

1. 高次 Chow 群

高次 Chow 群は Bloch によって 1986 年ごろに定義された。  $X$  を体  $k$  上の代数多様体とする。代数幾何における標準的な単体  $\Delta^n$  を次のように定義する。

$$\Delta^n = \text{Spec } k[T_0, \dots, T_n] / (\sum t_i = 1)$$

多様体として  $\Delta^n$  は  $n$  次元 affine 空間と同じである。境界写像  $\delta_i : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$  を

$$(x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})$$

とする。境界写像の合成によって  $m < n$  に対して定まるさまざまな閉埋め込み  $\Delta^m \rightarrow \Delta^n$  を  $\Delta^n$  の面と呼ぶ。

定義 1.1.

$$z_n(X, i) = \bigoplus_{x \in (X \times \Delta^i)_{(i+n)}} \mathbb{Z}$$

を  $X \times \Delta^i$  の次元  $i+n$  の既約被約閉部分多様体のうち、すべての面  $X \times \Delta^m$  と *proper* に交わるもの全体で生成される自由 *abel* 群とする。

$V$  と  $W$  が *proper* に交わるという意味は、任意の  $V \cap W$  の既約成分  $T$  は次元が正しいこと、つまり、余次元

$$\text{codim } T = \text{codim } V + \text{codim } W$$

を満たすということである。各  $\delta_i$  に対して cycle の制限写像  $\delta_i^* : z_n(X, j) \rightarrow z_n(X, j-1)$  が定義される。引き戻しの交代和を

$$d_j = \sum (-1)^i \delta_i^* : z_n(X, j) \rightarrow z_n(X, j-1)$$

で表すと  $d_{n-1}d_n = 0$  になる。

$$\dots \xrightarrow{d_{j+1}} z_n(X, j) \xrightarrow{d_j} z_n(X, j-1) \xrightarrow{d_{j-1}} \dots \xrightarrow{d_2} z_n(X, 1) \xrightarrow{d_1} z_n(X, 0).$$

は *abel* 群の複体になる。この複体の  $j$  次元の homology を  $CH_n(X, j)$  で表し、 $X$  の高次 Chow 群と呼ぶ。

例： $j=0$  の時、高次 Chow 群は一般 Chow 群と同型である

$$CH_n(X, 0) = CH_n(X).$$

THOMAS GEISSER\*

例：任意の  $j < -n$  および  $n > \dim X$  に対して、 $CH_n(X, j) = 0$ .

例： $X$  を次元  $d$  の既約多様体とすると、 $z_d(X, j) = \mathbb{Z}$  で、 $d_{2j} = \text{id}$ ,  $d_{2j+1} = 0$  なので、

$$CH_d(X, i) = \begin{cases} 0 & j > 0 \\ \mathbb{Z} & j = 0. \end{cases}$$

例： $X$  を非特異代数多様体として、 $d = \dim X$  とおくと、

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times = CH^{d-1}(X, 1)$$

$$u \mapsto \begin{cases} (x, \frac{1}{1-u(x)}, \frac{-u(x)}{1-u(x)}) \subseteq X \times \Delta^1 & u \neq 1 \\ 0 & u = 1 \end{cases}$$

$u$  は可逆大域切断だから、 $\frac{1}{1-u(x)} \neq 0, 1$ ,  $\frac{-u(x)}{1-u(x)} \neq 0, 1$  なので、 $d_1 = \delta_0^* - \delta_1^* = 0 - 0$ .

命題 1.2.  $f: X \rightarrow Y$  が *proper* のとき、

$$f_*: z_n(X, j) \rightarrow z_n(Y, j)$$

$$V \rightarrow \begin{cases} [k(V) : k(f(V))] \cdot V & \dim V = \dim f(V) \\ 0 & \dim V > \dim f(V) \end{cases}$$

で定義すれば、 $d_j f_* = f_* d_j$  なので、

$$f_*: CH_n(X, j) \rightarrow CH_n(Y, j)$$

が導かれる。

特に、 $f: X \rightarrow k$  が *proper* な時、degree 写像

$$\text{deg} = f_*: z_0(X, *) \rightarrow z_0(k, *) \cong \mathbb{Z}$$

が存在する。

命題 1.3.  $f: X \rightarrow Y$  が平坦で *quasi-finite* のとき、

$$f^*: z_n(Y, j) \rightarrow z_n(X, j)$$

$$V \rightarrow f^{-1}(V)$$

と定義すれば、 $d_j f^* = f^* d_j$  なので、

$$f_*: CH_n(X, j) \rightarrow CH_n(Y, j)$$

が導かれる。

実際、 $z_n(-, *)$  は etale 層の複体。

定理 1.4. *Localization (Bloch)*:  $Z \rightarrow X$  は閉埋め込みで、 $U = X - Z$  は  $Z$  の開補集合とすると、次の完全系列を得る。

$$\cdots \rightarrow CH_n(Z, j) \xrightarrow{i_*} CH_n(X, j) \xrightarrow{j^*} CH_n(U, j) \rightarrow CH_n(Z, j-1) \rightarrow \cdots$$

複体の完全系列が存在して

$$0 \rightarrow z_n(Z, *) \xrightarrow{i_*} z_n(X, *) \rightarrow z_n(U, *) \xrightarrow{j_*} C \rightarrow 0$$

$C$  は acyclic (homology を持たない複体) であることを示せばよい。それは moving lemma という深い定理。

系 1.5. 任意の  $X$  に対して,

a) 高次 Chow 群はその複体の Zariski-cohomology と同型.

$$CH_n(X, j) \xrightarrow{\sim} H^{-j}(X_{\text{Zar}}, z_n(-, *)).$$

b) 次の spectral 系列が存在する

$$E_{s,t}^1 = \bigoplus_{x \in X^{(s)}} CH_{n-s}(k(x), s+t) \Rightarrow CH_n(X, s+t).$$

それは局所大域原理と見做せる。この系で、体の高次 Chow 群の制御が重大だと分かる。

$j = -n$  の時、 $z_{-n}(k, n)$  は  $\dim = 0$ 、つまり閉点で生成されるから、扱いは普段より簡単。

定理 1.6. (Totaro, Nesterenko-Suslin) 次の同型が存在する

$$K_n^M(k) \cong CH_{-n}(k, n)$$

$$\{u_1, \dots, u_n\} \mapsto \left( \frac{-u_1}{1 - \sum u_i}, \dots, \frac{-u_n}{1 - \sum u_i}, \frac{1}{1 - \sum u_i} \right) \in \Delta_k^n.$$

ここで  $K_n^M(k)$  は Milnor K 群

定義 1.7.  $K_0^M(k) = \mathbb{Z}$ ,  $K_1(k) = k^\times$ ,  $n \geq 2$  の時

$$K_n^M(k) = T_* k^\times / \langle a \otimes (1-a) \mid a \in k - \{0, 1\} \rangle.$$

(Steinberg 関係式). ここでは、abel 群  $A$  に対して、 $T_* A$  は  $A$  における tensor 代数.

定理 1.8. (Bloch-Lichtenbaum, Grayson-Suslin, Levine) 任意の  $X$  に対して、次の spectral 系列が存在する

$$E_{s,t}^2 = CH_{-t}(X, s+t) \Rightarrow K'_{s+t}(X).$$

(Atiyah-Hirzebruch 系列の類似と見做される).

予想 1.9. (Beilinson-Soule) 任意の  $i > 2(d-n)$  に対して、

$$CH_n(X, i) = 0.$$

THOMAS GEISSER\*

## 2. 双対性

$k$  を標数が 0 の閉体として、高次 Chow 複体を étale 層の複体と見做す。

定理 2.1.  $X$  が  $k$  上非特異ならば、

$$z_n(-, *) \otimes \mathbb{Z}/m \cong \mu_m^{\otimes d-n}[2d-2n]$$

一般に、Voevodsky が motivic 複体という複体  $\mathbb{Z}(n)$  を定義して、任意の  $X$  に対して

$$\mathbb{Z}/m(n) \cong \mu_m^{\otimes n}$$

で、 $X$  が滑らかな時、

$$z_n(-, *) = \mathbb{Z}(d-n)[2d-2n].$$

定理 2.2. (古典的な双対性, Grothendieck)  $X$  を閉体  $k$  上非特異で、次元  $d$  の代数多様体として、 $\mathcal{F}$  を  $X$  上の局所的 constant な étale 層で、 $m\mathcal{F} = 0$  とする。  $\mathcal{F}^\wedge = \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mu_m^{\otimes d})$  とおく。その時、有限群の完全な pairing

$$H_c^i(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}) \times H^{2d-i}(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}^\wedge) \rightarrow \mathbb{Z}/m.$$

が存在する。

証明する為に、先ず任意の  $f: X \rightarrow k$  上に対し、compact 台順像 cohomology  $Rf_!$  の右随伴関手  $Rf^!$  が存在して、

$$\text{Hom}_{k, \mathbb{Z}/m}(Rf_! \mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \text{Hom}_{X, \mathbb{Z}/m}(\mathcal{F}, Rf^! \mathcal{G})$$

なので、

$$\text{Hom}(H_c^i(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}), \mathbb{Z}/m) \cong \text{Ext}_{X, \mathbb{Z}/m}^{-i}(\mathcal{F}, Rf^! \mathbb{Z}/m) \cong \text{Ext}_{X, \mathbb{Z}/m}^{2d-i}(\mathcal{F}, \mu_m^{\otimes d})$$

を得る。二つ目の同型は

$$Rf^! \mathbb{Z}/m \cong \mu_m^{\otimes d}[2d]$$

による (それは証明の一番難しい部分)。結局  $\mathcal{F}$  が局所的 constant によって、任意の  $i > 0$  に対して、 $\mathcal{E}xt_{X, \mathbb{Z}/m}^i(\mathcal{F}, \mu_m^{\otimes d}) = 0$  だから、spectral 系列

$$H^s(X_{\text{ét}}, \mathcal{E}xt_{\mathbb{Z}/m}^t(\mathcal{F}, \mu_m^{\otimes d})) \Rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}/m}^{s+t}(\mathcal{F}, \mu_m^{\otimes d})$$

が退化して、定理が従う。

それを、任意の  $X$  に一般化したい。

étale 層の複体

$$\mathbb{D} = z_0(-, *)$$

を定義する。これから、 $k$  を標数が 0 の閉体として、 $X$  を  $k$  上の (任意の) 代数多様体とする。

定理 2.3. (Suslin) 有限群の完全 pairing

$$H_c^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/m) \times CH_0(X, i, \mathbb{Z}/m) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

が存在する.

有限係数の高次 chow 群  $CH_n(X, i, \mathbb{Z}/m)$  の定義は、複体

$$\cdots z_n(X, i) \otimes \mathbb{Z}/m \xrightarrow{d_i} z_n(X, i-1) \otimes \mathbb{Z}/m \cdots$$

の homology. ここでは、 $z_n(X, j)$  が自由群であることを使っている. 一般に、導来 tensor 積を使う. 長完全系列

$$\cdots CH_n(X, i) \xrightarrow{\times m} CH_n(X, i) \rightarrow CH_n(X, i, \mathbb{Z}/m) \rightarrow CH_n(X, i-1) \cdots$$

が存在して、特に、短完全系列

$$0 \rightarrow CH_n(X, i)/m \rightarrow CH_n(X, i, \mathbb{Z}/m) \rightarrow {}_mCH_n(X, i-1) \rightarrow 0$$

を得る. それを使って、 $CH_n(X, i)$  は、一意可除部分を除いて、 $CH_n(X, i, \mathbb{Z}/m)$  から復元できる.

系 2.4. (G.) a) 高次 Chow 群から、 $\mathbb{D}$  の étale-cohomology への標準同型

$$CH_0(X, i) \xrightarrow{\sim} H^{-i}(X_{\text{ét}}, \mathbb{D}).$$

は同型.

b)  $X$  を proper とすると、étale 層の複体の間の標準な trace 写像

$$tr : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{Z}$$

が存在する.

a) は、"Beilinson-Lichtenbaum 予想" の特別の場合 ( $n = d$ ,  $k$  が閉体).

定理 2.5. (G.)  $\mathcal{F}$  を  $X$  上の constructible étale 層とすると、有限群の完全 pairing

$$H_c^i(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}) \times \text{Ext}_X^{1-i}(\mathcal{F}, \mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

が存在する.

Grothendieck の定理 2.2 が定理 2.1 によって定理 2.5 に含まれている:

$$\text{Ext}_X^{1-i}(\mathcal{F}, \mathbb{D}) \cong \text{Ext}_{X, \mathbb{Z}/m}^{-i}(\mathcal{F}, \mathbb{D}/m) \cong \text{Ext}_{X, \mathbb{Z}/m}^{-i}(\mathcal{F}, \mu_m^{\otimes d}[2d]).$$

$X$  の次元が 1 のとき、定理 2.5 は Deninger の結果で、 $X$  の次元が 2 のとき、定理 2.5 は Spiess の結果.

系 2.6.  $f : X \rightarrow Y$  とする.

a) 任意の局所的 constant な torsion 層  $\mathcal{F}$  に対して、

$$\mathbb{D} \otimes f^* \mathcal{F} \cong Rf_! (\mathbb{D} \otimes \mathcal{F}).$$

b) 任意の torsion 層  $\mathcal{F}$  と有限生成な局所的 constant 層  $\mathcal{G}$  に対して、

$$\text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathbb{D} \otimes f^* \mathcal{G}) \cong \text{Hom}_Y(Rf_! \mathcal{F}, \mathbb{D} \otimes \mathcal{G}).$$

THOMAS GEISSER\*

## 3. 基本群

基本群  $\pi_1^{ab}(X)/m$  は  $X$  の次数が  $m$  の被覆空間の自己同型群.  $k = \mathbb{C}$  のとき、位相的な  $\pi_1^{ab}(X(\mathbb{C}))/m$  と同型.

$X$  が proper のとき、

$$\pi_1^{ab}(X)/m := \text{Hom}(H^1(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/m), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = CH_0(X, 1, \mathbb{Z}/m).$$

つまり、abel 化された基本群が高次 Chow 群で表され、係数系列によって、

$$0 \rightarrow CH_0(X, 1)/m \rightarrow \pi_1^{ab}(X)/m \rightarrow {}_mCH_0(X) \rightarrow 0.$$

同型  $\pi_1^{ab}(X)/m \cong CH_0(X, 1, \mathbb{Z}/m)$  は Hurewicz の定理の類似と見做される: abel 化された基本群は homology 群と同型.

## 4. ROJTMAN の定理

定理 4.1. (Abel-Jacobi)  $C$  を複素数体上の非特異射影直線として、

$$Jac_C = H^0(C, \Omega^1)^{\wedge} / H_1(C, \mathbb{Z})$$

とする. Chow 群の  $deg = 0$  部分群は  $Jac_C$  で表される.

$$\begin{aligned} \rho: CH_0(C)^0 &\xrightarrow{\sim} Jac_C \\ \sum_i n_i x_i &\mapsto (\omega \mapsto \sum_i n_i \int_0^{x_i} \omega). \end{aligned}$$

$X$  を閉体上の proper 多様体として、 $X$  の閉点  $x$  を固定する. そのとき、 $X$  から abel 多様体への写像の普遍な対象が存在して、つまり  $Alb_X$  は始対象. その多様体を Albanese 多様体とよび、 $f_x: X \rightarrow Alb_X$  と書く.  $f_x: X \rightarrow Alb_X$  は一意の同型を除いて一意.

補題 4.2. Albanese 写像、

$$\begin{aligned} S: CH_0(X)^0 &\rightarrow Alb_X(k) \\ \sum_i n_i x_i &\mapsto \sum_i n_i f_x(x_i) \end{aligned}$$

は  $x$  の取りかたによらない.

他の点  $y \in X$  を選ぶと、 $f_y = f_x - f_x(y)$  なので、

$$\sum_i n_i f_y(x_i) = \sum_i n_i f_x(x_i) - (\sum_i n_i) f_x(y) = \sum_i n_i f_x(x_i).$$

Abel-Jacobi 定理の一般化について、Mumford(1966) は複素数体上の反例を与えた. 具体的に、 $X$  は種数が零でない曲面をとると、Albanese 写像の核は巨大だる.

定理 4.3. (Rojtman, Bloch, G.)  $X$  を正規で *proper* な代数多様体とする. そのとき, Albanese 写像が *torsion* 部分群の同型を誘導する.

$$\begin{aligned} \text{Alb} : \text{tor}CH_0(X) &\xrightarrow{\sim} \text{tor}Alb_X(k). \\ \sum_i n_i x_i &\mapsto \sum_i n_i f_x(x_i) \end{aligned}$$

証明は  $X$  が非特異の時, Rojtman と Bloch の定理、正規の場合に著者によって拡張.

次元について帰納法を使って、 $S$  は  $l^n$ -torsion 部分群で全射. 次元が 1 のとき、正規な曲線は滑らかで、Abel-Jacobi 定理によって  $S$  は同型.

$$\begin{array}{ccccc} CH_0(X, 1)/m & \longrightarrow & CH_0(X, 1, \mathbb{Z}/m) & \longrightarrow & {}_mCH_0(X) \\ & & \parallel & & \downarrow s \\ & & H^1(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/m)^* & \xlongequal{\quad} & {}_mAlb_X(k) \end{array}$$

下の同型は、

$$H^1(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/m)^* \cong \text{Hom}(\mu_m, {}_m\text{Pic}_X)^*$$

で、極限をとると、それは Cartier-西双対性によって

$$\text{Hom}(\mu_m, {}_m\text{Pic}_X^0)^* \cong \text{Hom}({}_m\text{Alb}_X, \mathbb{Z}/m)^* = {}_m\text{Alb}_X$$

と同型になる. この図式によって、 $S$  は同型で、

$$CH_0(X, 1) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$$

を得る. それは、先に斎藤秀司さんに、Weil 予想を使って証明された. 任意の  $X$  に対して、Chevalley の定理によって、

$$0 \rightarrow L \rightarrow \text{Pic}_X^0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

の分解が存在する. ここでは  $L$  は affine で、 $A$  は abel 多様体.  $\chi(T) = \text{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ 、 $T$  の指標群とにおいて、 $A^t$  を  $A$  の双対 abel 多様体とおくと、

$$0 \rightarrow \text{tor}A^t \rightarrow CH_0(X, 1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \chi(T) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

を得る.