代数幾何学シンポジウム記録
2006年度　pp.12-18

2-torsion を持つある種の一般型極小代数曲面について

Masaaki Murakami
Osaka University

主定理

本稿は 2006 年度城崎代数幾何学シンポジウムの講演[1]に関する報告である。c_1，χ をそれぞれ代数曲面の第 1 Chern 類と構造層の Euler 数を表すとき，$c_1^2 = 2\chi - 1$ を満たし 2-ねじれ因子を持つ極小複素代数曲面に関しての筆者のある結果を解説する。条件を満す代数曲面について構造層の Euler 数 χ に上からの評価をあたえ，χ が極大な場合に曲面の構造を決定するのが，その内容である。以下代数多様体は全て複素数体 $\mathbb{C}$ 上のものとする。

定理 1. X は一般型極小代数曲面であり，第 1 Chern 数 c_1^2, 構造層の Euler 数 χ が $c_1^2 = 2\chi - 1$ を満たすとする。この時 X の Picard 群のねじれ部分 $\mathrm{Tors}(X)$ が非自明であれば次の $i)$ 及び $ii)$ が成立する：

$i)$ $\chi \leq 4$;

$ii)$ もし $\chi = 4$ であれば Picard 群のねじれ部分 $\mathrm{Tors}(X)$ は 2 次巡回群 $\mathbb{Z}/2$ に同型であり，このとき曲面 X は以下のように得られる：

$a)$ まず $d = 0$ または 2 とし，d 次 Hirzebruch 曲面 Σ_d をとる。

$b)$ 次に Σ_d の分岐二重被覆をとる。分岐因子を B とおく。分岐因子 B の特異点に対応してこの二重被覆も特異点をもつので，この二重被覆の極小特異点解消をとり Y とおく。

$c)$ この時 Y に 2 次巡回群 $G = \mathbb{Z}/2$ のある自由作用を見つけることができ，我々の X はこの自由作用による Y の商 Y/G である。

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & \Sigma_d \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \\ X = Y/G & & \end{array}$$

図 1

勿論分岐因子 B が指定されてはじめて Y が定まり，群 $G = \mathbb{Z}/2$ による自由作用が指定されてはじめて Y/G が定まる。従って上の定理を構造定理と呼ぶには，まず分岐因子 B がどんなものであるかはっきりさせること，そして曲面 Y への自由作用がなんであるかはっきりさせることが必要である。以下この二つに答を与えるが，その前にこの定理の背景等に関して簡単に注意を与える。

[1]講演の機会を与えてくださったオーガナイザーの皆様および講演に耳を傾けてくださった参加者の皆様に深く感謝致します。

背景等

注意 1. 本講演で紹介した結果は $c_1^2 = 2\chi - 1$ の一般型極小代数曲面に関する一連の研究の続きである。背景については既に幾つかの講演で述べてきたが，ひとつには直線 $c_1^2 = 2\chi - 1$ が Noether 線に平行であること，この直線上で $\chi = 1$ の場合が良く知られた数値的 Godeaux 曲面（$c_1^2 = 1$ で幾何種数 $p_g = 0$, 不正則数 $q = 0$）に対応することに注意されたい。実際この研究は数値的 Godeaux 曲面に関する Picard 群のねじれ部分を考え併せた研究を Noether 線にそって広げたものでもある。

注意 2. 直線 $c_1^2 = 2\chi - 1$ 上では不正則数 q の消滅が言え，Picard 群のねじれ部分 Tors が第 1 整係数ホモロジー群に一致する。このねじれ群は同一の (χ, c_1^2) のもとである程度位相構造を識別するための役割をはたす。Noether 線に平行な直線にそって研究する際，一般に χ の小さなところで多くの型が表れる傾向がある。

注意 3. これまで Picard 群のねじれ部分を考え併せることにより構造定理が得られているのは，幾何種数 $p_g = 0$ 以外の一般型曲面では，Catanese-Debarre [3], Ciliberto-Mendes Lopes [4], Bartalesi-Catanese [2] で，みな直線 $c_1^2 = 2\chi - 2$ 上に不変量を持つ。

注意 4. [7] で $\chi \geq 3$ であれば Picard 群のねじれ部分 Tors(X)（以下ねじれ群と呼ぶ）の位数が高々 2 であることを示してあるので定理 1 の条件「Picard 群のねじれ部分 Tors(X) が非自明であれば」は「Picard 群のねじれ部分 Tors(X) が $\mathbb{Z}/2$ であれば」としても同じである。定理 1 により [7] の主定理は以下の定理 2 に改良される。

定理 2. X を極小代数曲面とし，その不変量は $c_1^2 = 2\chi - 1$ を満すとする。このとき次が成立する：

i) $\chi = 2$ であればねじれ群の位数は高々 3,
ii) $\chi \geq 3$ であればねじれ群の位数は高々 2,
iii) $\chi \geq 5$ であればねじれ群の位数は 1。

分岐因子と自由作用の記述

定理 1 に現れた $f : Y \to \Sigma_d$ の分岐因子 B と 2 次巡回群 $\mathbb{Z}/2$ の曲面 Y への自由作用を記述しよう。そのために二つだけ準備が必要である。

まず一つ目の準備として Hirzebruch 曲面 Σ_d に対合を定める。曲面 Σ_d の開被覆 $\{U_1, U_2\}$ を $U_1 = \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1 = \{(u, (1:s))\}$, $U_2 = \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1 = \{(v, (1:t))\}$, $s = 1/t$, $u = t^d v$ となるようとる。この時 Σ_d の自己同型 ι_0 を

$$\iota_0 : (u, s) \to (-u, -s)$$

で定めれば，ι_0 は対合であり，その生成する 2 次巡回群 $G = \langle \iota_0 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2$ は Σ_d に作用する。我々の場合 $d = 0, 2$ と偶数なので，この作用の固定点集合は

ちょうど四つの孤立点からなる集合 $\{(u,s)=(0,0),(0,\infty),(\infty,0),(\infty,\infty)\}$ であることに注意されたい。

次に二つ目の準備として，曲面上の曲線の特異点に $[3,3]$-特異点と呼ばれるクラスを導入する。代数曲面 S とその上の被約曲線 C が与えられたとき，C の 3 重点 P は，P での blow up $S'\to S$ への狭義引き戻し C' が例外因子上に高々 negligible singularities しか持たない場合に $[3,3]$-特異点と呼ばれる。最も代表的な例は三つの非特異既約成分が一点で互いに局所交点数 2 で交わってできる 3 重点であり，実際 general な $[3,3]$-特異点はこの様なものとなっている。

さて先ほど述べた分岐因子と自由作用の記述を与えよう。

分岐因子。$f:Y\to\Sigma_d$ の分岐因子 B は以下の四つの条件で特徴づけられる:

i) $B\in|-4K_{\Sigma_d}|$, ただし K_{Σ_d} は Σ_d の標準因子,

ii) B はちょうど二つの $[3,3]$-特異点を持ち，残りの特異点はあったとしても高々 negligible singularities,

iii) B は $G=\langle\iota_0\rangle$ の Σ_d への作用で不変,

iv) B は ι_0 の固定点をとおらない。

この四つの条件から分岐因子 B の定義式がパラメータ付きでかけてしまうので，この条件は B の明示的な表示と等価である（ただしあくまで「原理的には書ける」というだけで，実際に書こうとするとコンピュータを用いて階数の高い連立一次方程式を解くことになる)。

自由作用。これは $G=\langle\iota_0\rangle\simeq\mathbb{Z}/2$ の Σ_d への作用を $f:Y\to\Sigma_d$ を通じて Y への持ち上げたものである。実際には Y への持ち上げはちょうど二通り存在するが，自由作用なのは片方だけなので $G=\mathbb{Z}/2$ の Y への自由作用はこれで一意に定まる。

以上で分岐因子 B と自由作用の正体が分かったので，定理 1 の $\chi=4$ の場合の曲面の "構造定理" が構造定理となった。

証明の概略

以下証明の概略を与えて本稿を終えることにする。幾つかのケースにわけそれぞれについて扱うので，全てのケースに証明の概略を与えることはできない。詳しくは [8] を参照されたい。以下 X は極小代数曲面で $c_1^2=2\chi-1$ を満すものとする。先に述べたようにこのとき $\chi\geq 3$ であればねじれ群の位数は高々 2 であったから，定理 1 を証明するためには $\chi\geq 4$ かつ $\mathrm{Tors}(X)\simeq\mathbb{Z}/2$ と仮定しておいて，実は $\chi=4$ であることと $\chi=4$ の場合の曲面 X が定理の様な記述を持つことを示せば良い。そこで以下 $\chi=\lambda\geq 4$ かつ $\mathrm{Tors}(X)\simeq\mathbb{Z}/2$ と仮定する。

最も大まかな方針としては Miyaoka, Reid 等による数値的 Godeaux 曲面の研究（[6], [9]）に従いねじれ群に対応する不分岐 2 重被覆 $\pi:Y\to X$

をとり Y を調べる。Y を調べるには主に Horikawa の方法を道具として，Galois 群 $G = \mathrm{Gal}(Y/X) \simeq \mathbb{Z}/2$ の作用と組み合わせて Y の標準写像

$$\Phi_{K_Y} : Y - - \to \mathbb{P}^{2\lambda-2}$$

を調べる。以下 K_Y で Y の標準因子を表す。

補題 1. $\deg \Phi_{K_Y} = 1$ *or* 2。

補題 2. $\deg \Phi_{K_Y} = 1$ であれば $\lambda = 4$。$\deg \Phi_{K_Y} = 2$ であれば $2\lambda - 3 \leq \deg Z \leq 2\lambda - 1$。ただし $Z \subset \mathbb{P}^{2\lambda-2}$ は標準写像 Φ_{K_Y} による Y の像の Zariski 閉包。

$\deg \Phi_{K_Y} = 1$ の場合は大まかには次のような感じで排除される。まず $K_Y^2 - (3p_g(Y) - 7) = 8 - 2\lambda$ なので $\lambda = 4$ は Castelnuovo の不等式から従う。また $\lambda = 4$ の場合 Y はその不変量が Castelnuovo 直線上に存在する。Castelnuovo 直線上に不変量をもち標準写像が双有理な極小代数曲面については Ashikaga-Konno [1] にある諸結果を用いることができ，このリストによれば Castelnuovo 線上の曲面で双有理な標準写像を持つものはほとんどの場合種数 3 の非超楕円的なファイブレーション $Y \to \mathbb{P}^1$ を持つ。そこで Galois 群 G の Y への作用がこのファイブレーションの構造を保つこと，すなわち G の $\mathbb{P}^1$ への作用を誘起することを示せば，$\mathbb{P}^1$ への作用の固定点上のファイバーをとることにより Y の作用で不変なファイバー $C_0 \subset Y$ が見つかる。G は C_0 に作用するが C_0 が超楕円的ファイバーでも特異ファイバーでもなければ，(種数 3 なので) C_0 への作用に固定点が見つかり，これは G の Y への作用が固定点自由であることに反する。勿論 C_0 が超楕円的ファイバーや特異ファイバーかも知れないのでこれでは証明が完了していないし，実際の証明ではもっと近道をしたりするが，現象的にはこれが主な理由となってこの場合が排除される。いずれにせよ Ashikaga-Konno [1] 中のリストを用いることができるのでこの場合は定理 1 の証明の主要部分ではない。

だから本稿の主定理の証明の主要部分は $\deg \Phi_{K_Y} = 2$ の場合である。以下 $\deg \Phi_{K_Y} = 2$ としよう。この場合には補題 2 より $\deg Z = 2\lambda - 3$, $\deg Z = 2\lambda - 2$, $\deg Z = 2\lambda - 1$ のいずれかであり，それぞれの場合を調べることになる。なお $\deg Z = 2\lambda - 3$ の場合は Z が non-degenerate surface in $\mathbb{P}^{2\lambda-2}$ として極小次数を持つ場合にあたる。答を先に述べれば $\deg Z = 2\lambda - 3$ の場合と $\deg Z = 2\lambda - 1$ の場合は排除できて，$\deg Z = 2\lambda - 2$ かつ $\lambda = 4$ の場合のみが生き残る。実際に生き残るので $\deg Z = 2\lambda - 2$ の場合が最も大切であるとも言えるが，本稿では一番 Z の次数が大きい $\deg Z = 2\lambda - 1$ の場合のみ見ることにする。

以下 $\deg Z = 2\lambda - 1$ とする。この場合には標準線型系 $|K_Y|$ は base point free であって標準写像 Φ_{K_Y} は正則写像となる。この場合の排除の証明は Step 1. $Z = \Phi_{K_Y}(Y) \subset \mathbb{P}^{2\lambda-2}$ の極小特異点解消 $Z' \to Z$ を調べる，Step 2. 標準

写像 $\Phi_{K_Y}: Y \to \mathbb{P}^{2\lambda-2}$ が射 $f: Y \to Z'$ に持ち上がることを示す，Step 3. G の作用と組み合わせて射 $f: Y \to Z'$ を調べ，実際には有り得ない結論を導く，なる手順で行う。

まず Step 1 については，$\mathbb{P}^n$ 内の次数が極小次数足す 2 となる曲面に partial classification を与えた。

命題 1. $n \geq 4$ とし，Z を $\mathbb{P}^n$ 内の次数 $n+1$ の non-degenerate な曲面とする。また Z の極小特異点解消 Z' の不正則数は 0 とし，特異点解消の射 $Z' \to Z \subset \mathbb{P}^n$ は完備線型系 $|D|$ で与えられるとする。このとき n は 11 を超えない。また $0 \leq e \leq 3$ と e 次 Hirzebruch 曲面 Σ_e の $11-n$ 点 blow up $r: Z' \to \Sigma_e$ が存在して $D \sim -K_{Z'} + r^*\Gamma$。ただしここに Γ は Hirzebruch 曲面 $\Sigma_e \to \mathbb{P}^1$ のファイバー。

我々の場合 $n = 2\lambda - 2$ である。曲面 Y の不正則数は 0 であり，しかも Z は $\Phi_{K_Y}: Y \to \mathbb{P}^n$ の像なので，上の命題の仮定が全て満たされる。従って極小特異点解消 $Z' \to Z$ は上の命題の通り $11-n$ 点 blow up $r: Z' \to \Sigma_e$ と射 $\Phi_D: Z' \to \mathbb{P}^n$（但し $D \sim -K_{Z'} + r^*\Gamma$）で与えられる。

次に Step 2 について見よう。

補題 3. 標準写像 $\Phi_{K_Y}: Y \to Z$ は Z の極小特異点解消 $\Phi_D: Z' \to Z$ を経由する。すなわち正則写像 $f: Y \to Z'$ が存在して $\Phi_{K_Y} = \Phi_D \circ f$。

Horikawa の small c_1^2 の中の標準写像の持ち上げの証明は実際にやってみると，我々の場合には，消滅定理を使う下りでつっかえてしまってどうもうまく機能しない。そこで別の方法を与える。まず

$$
\begin{array}{ccc}
Y' & \xrightarrow{f'} & Z' \\
{\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_D} \\
Y & \xrightarrow{\Phi_{K_Y}} & Z
\end{array}
$$

を有理写像 $\Phi_D{}^{-1} \circ \Phi_{K_Y}: Y - - \to Z'$ の長さ最小の不確定点解消とする。この blow up の合成 $p: Y' \to Y$ が同型射であることを示せば良いが，それには $K_{Y'} \sim p^*K_Y + \eta$ で定まる例外因子 η について $f'_*\eta = 0$ を言えば良い。p の長さを最小にとってあるので，もし p が同型でなければ最後の blow up で生ずる (-1)-curve が f' でつぶれないからである。$f'_*\eta = 0$ を言うために $f': Y' \to Z'$ の分岐因子を B' として，B' にそって分岐する double cover of Z' の canonical resolution $Y^\sharp$ の不変量を計算する。$B' \sim 2(2D - r^*\Gamma + f'_*\eta/2)$ であるから，$Y^\sharp$ の構造層の Euler 数は

$$
\begin{aligned}
\chi(\mathcal{O}_{Y^\sharp}) &= 2\chi(\mathcal{O}_{Z'}) + (2D - r^*\Gamma + f'_*\eta/2)(D + f'_*\eta/2)/2 - \varepsilon \\
&= 2 + n - (r^*\Gamma)(f'_*\eta)/4 + (f'_*\eta)^2/8 - \varepsilon
\end{aligned}
$$

5

である。ただしここに ε は分岐因子 B' の特異点からの寄与である（$\varepsilon \geq 0$）。一方 $\chi(\mathcal{O}_{Y^\natural}) = \chi(\mathcal{O}_Y) = n+2$ であるからこれと上式を比べて

$$-(r^*\Gamma)(f'_*\eta)/4 + (f'_*\eta)^2/8 - \varepsilon = 0 \tag{1}$$

を得る。$|r^*\Gamma|$ は base point free なので $-(r^*\Gamma)(f'_*\eta)/4 \leq 0$, 一方 $\Phi_D \circ f'$ で η の各成分はつぶれ $Df'_*\eta = 0$ なので $+(f'_*\eta)^2/8 \leq 0$, さらに ε は B' の特異点の寄与なので $-\varepsilon \leq 0$。よって式 (1) より $(f'_*\eta)^2 = 0$。これと $Df'_*\eta = 0$ を併せて Hodge's index theorem より $f'_*\eta = 0$ が従う。

最後に Step 3 を見る。次の補題は Step 2 の証明から明らかであろう。

補題 4. $f : Y \to Z'$ の分岐因子を B とおけば，$B \sim 2(2D - r^*\Gamma)$ であり，B は高々 negligible singularities しか特異点を持たない。

Galois 群 $G \simeq \mathbb{Z}/2$ の Y への作用は Z' への作用を誘起するが，実は B 上にこの Z' への作用の固定点が存在する事を示すことができる。すると次のようにして $\deg Z = 2\lambda - 1$ の場合を排除することができる。まず G の作用の固定点 $x \in B \subset Z'$ をとる。すると補題 4 より f での逆像 $f^{-1}(x)$ は一点からなる集合か，あるいは有理二重点の基本サイクルの底空間である。$f^{-1}(x)$ は G の Y への作用で不変であるから，このことより $f^{-1}(x)$ 内に G の作用での固定点があることが従う。これは $Y \to X$ が不分岐 Galois 被覆であることに反するので $\deg Z = 2\lambda - 1$ の場合は有り得ない。

例えば $\lambda = 4$ の場合には $r : Z' \to \Sigma_e$ は 5 点 blow up となってしまう。命題 1 で blow up の中心となる $11 - n$ 点は infinitely near な場合も有り得るので，この 5 点の configuration を個別に考えることにより B 上の固定点の存在をしらべるのは場合の数が膨れ上がってしまい事実上無理である。G の Z' への作用の固定点集合が $CB \neq 0$ なる 1 次元成分 C を持つことを blow up の中心の configuration を見ずに示すことにより，B 上の固定点の存在をいう。

付足し

標準写像の像 Z の次数がより低い場合は，上に証明の概略を述べた $\deg Z = 2\lambda - 1$ の場合に比べて簡単なのかというと，実はそうではない。綺麗に排除するため，また Galois 群から誘導される自己同型を決定するために，上とはもう少し別の議論も用いるが，今回の講演では触れなかった。

$\chi = 4$ の場合に出てきた答が，[5] にある 2-標準写像が双有理にならないもののうち non-standard case と呼ばれているものの分類結果と（おそらく）一致していることに気が付いたので，[4] の様に non-standard case になることを証明することにより別の証明を与えられるかと思い Mendes Lopes さんに伺ってみたのですが，Francia さんと一緒に実際に昔考えていた時期がありそんな甘くはないとのことでした。

References

[1] ASHIKAGA, T., KONNO, K. Algebraic surfaces of general type with $c_1^2 = 3p_g - 7$, *Tohoku. Math. J.*, **42** (1990), no. 4, 517–536.

[2] BARTALESI, A., CATANESE, F. Surfaces with $K^2 = 6$, $\chi = 4$, and with torsion. Conference on algebraic varieties of small dimension (Turin, 1985), *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, **1986, Special Issue** (1987), 91–110.

[3] CATANESE, F., DEBARRE, O. Surfaces with $K^2 = 2$, $p_g = 1$, $q = 0$, *J. Reine. Angew. Math.*, **395** (1989), 1–55.

[4] CILIBERTO, C., MENDES LOPES, M. On surfaces of general type with $K^2 = 2\chi - 2$ and non-trivial torsion, *Geom. Dedicata*, **66** (1997), no. 3, 313–329.

[5] CILIBERTO, C., MENDES LOPES, M. On regular surfaces of general type with $p_g = 3$ and non-birational bicanonical map, *J. Math. Kyoto Univ.*, **40** (2000), no. 1, 79–117.

[6] MIYAOKA, Y. Tricanonical Maps of Numerical Godeaux Surfaces, *Invent. Math.*, **34** (1976), no. 2, 99–111.

[7] MURAKAMI, M. A bound for the orders of the torsion groups of surfaces with $c_1^2 = 2\chi - 1$, *to appear in Math. Z.*

[8] MURAKAMI, M. Remarks on surfaces with $c_1^2 = 2\chi - 1$ having non-trivial 2-torsion, *preprint* (2005).

[9] REID, M. Surfaces with $p_g = 0$, $K^2 = 1$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **25** (1978), no. 1, 75–92.