代数幾何学シンポジウム記録
2007年度　pp.124-124

クイバーの表現型の非可換代数幾何学的特徴付け

源 泰幸 （京大理）　minamoto@kusm.kyoto-u.ac.jp.

♡ 非可換代数幾何学って？

非可換代数幾何学という分野には幾つかの流派がある様ですが、そこでの主流な研究姿勢は、「ある性質を満たすアーベル圏（または三角圏）を何らかの空間 X 上の連接層の圏（または導来圏）と見做して研究しよう。」というものです。

♣ 非可換射影幾何学とは、、、

非可換射影幾何学は近年盛んに研究されていますが、そこでは次数環 R に以下の様にアーベル圏 $\operatorname{qgr} R$ を対応させます。

定義 1. k を体、A を k 上の有限次元代数とする。A 上の連結な連接的次数環 R に対して連接的次数右 R 加群の圏を $\operatorname{gr} R$、k 上有限次元な次数右 R 加群の圏を $\operatorname{tor} R$ と書く。そして次の様に定める。

$$\operatorname{qgr} R := \operatorname{gr} R / \operatorname{tor} R$$

これを（未定義な）非可換射影的スキーム $\operatorname{proj} R$ 上の連接層の圏と見做します。
この定義は次の（通常の）射影幾何学における Serre の定理を逆用している訳です。

定理 2 (Serre). R を有限個の次数 1 の元で k 上生成されている k 上の連結な可換次数環とし、X を通常の R の射影的スキーム $\operatorname{proj} R$ とする。このとき、次の関手は圏同値を与える。

$$\overline{\Gamma}_* : \operatorname{coh} X \xrightarrow{\sim} \operatorname{qgr} R,$$
$$\overline{\Gamma}_*(\mathcal{F}) := \oplus_{n\geq 0} H^0(X, \mathcal{F}(n)) \operatorname{mod} \operatorname{tor} R$$

注意 2.1. 上の定義においては有限次元代数 A 上の次数環を考えましたが、これは今回の研究で初めて必要になったものです。普通は体 k 上の次数環を考えます。
上の定義においては R を連接的と仮定しましたが、非可換射影幾何学において主に研究されているのは R にネター性を仮定した場合です。しかし、A.Connes 流の非可換幾何学との関係をつけるためには連接的な場合にまで考察を広げる事が不可欠なのだそうです。 ■

k を体、A を k 上の有限次元代数とします。A 線形圏 $\mathcal{E}$ と $\operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \cong A$ を満たす対象 $\mathcal{O} \in \mathcal{E}$ とその自己同値 $s : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ の三つ組 $(\mathcal{E}, \mathcal{O}, s)$ を考えます。$\mathcal{F} \in \mathcal{E}$ に対して $\mathcal{F}(n) := s^n(\mathcal{F})$ と記すことにします。そして

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) := \oplus_{n\geq 0} \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}, \mathcal{F}(n)), \Gamma_n(\mathcal{F}) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}, \mathcal{F}(n))$$

と定めます。そして、特に次の様に定めます。

$$R := \Gamma_*(\mathcal{E}, \mathcal{O}, s) := \Gamma_*(\mathcal{O}),\ R_n := \Gamma_n(\mathcal{O})$$

$x \in \Gamma_l(\mathcal{F}), b \in R_m, a \in R_n$ に対して

$$x \cdot a := s^n(x) \circ a \qquad a \cdot b := s^m(a) \circ b.$$

と定めると R は A 上連結な次数環になり $\Gamma_*(\mathcal{F})$ は次数右 R 加群になります。
（通常の）射影幾何学では豊富性の概念が大切でした。三つ組み $(\mathcal{E}, \mathcal{O}, s)$ が与えられたとき、（通常の）豊富性を抽象化することにより $(\mathcal{O}, s)$ の組に対しても豊富性が定義されます。定義は省略しますが、次の定理が基本的です。

定理 3 (Artin-Zhang, Polishchuk). 三つ組 $(\mathcal{E}, \mathcal{O}, s)$ があって $(\mathcal{O}, s)$ が豊富であるとする。このとき、R は連接的であり、$\Gamma_*(\mathcal{F})$ は連接的右次数 R 加群となる。
そして関手を次の様に定めると

$$\overline{\Gamma}_* : \mathcal{E} \longrightarrow \operatorname{qgr} R, \overline{\Gamma}_*(\mathcal{F}) := \Gamma_*(\mathcal{F}) \operatorname{mod} \operatorname{tor} R$$

これは三つ組 $(\mathcal{E}, \mathcal{O}, s)$ と $\left(\operatorname{qgr} R, \overline{R}, (1)\right)$ との同値を与える。すなわち、$\overline{\Gamma}_*$ は圏同値であり $\overline{\Gamma}_*(\mathcal{O}) \cong \overline{R}$ と $\overline{\Gamma}_* \circ s = (1) \circ \overline{\Gamma}_*$ とが成り立つ。

♢ 道代数と非可換射影幾何学の関係。

以下、クイバー Q の道代数 $A = kQ$ といえば k 上有限次元なものを考える事にします。道代数が有限生成直既約加群を有限個しか持たないとき、Q は有限表現型と呼ばれ、そうでないときは無限表現型と呼ばれます。有限表現型の道代数については次が有名です。

定理 4 (Gabriel).

$$Q \text{ は有限表現型} \iff Q \text{ の下部グラフは } \mathrm{ADE} \text{ 図形}$$

裏を返せば、大概の道代数は無限表現型になっているといえます。以下では主に無限表現型の道代数について考察します。
k 双対 $A^* := \operatorname{Hom}_{k-\mathrm{vect}}(A, k)$ は両側 A 加群になります。$- \otimes^{\mathbf{L}}_A A^*$ は有限生成右 A 加群の導来圏 $D^b(\text{mod-}A)$ の Serre 関手になります。これの -1 シフト $\tau := - \otimes^{\mathbf{L}}_A A^*[-1]$ が表現論的には大切です。τ は Happel による導来圏版 Auslander-Reiten 理論における Auslander-Reiten 変換になっています。$\rho := \tau^{-1}$ とおいて次の様に定義します。

定義 5. 次の性質を満たす対象 $M^\cdot$ のなす $D^b(\text{mod-}A)$ の充満部分圏を $D^{\rho,\geq 0}$ とする。

$$\mathbb{R}\operatorname{Hom}^\cdot(A, \rho^n M^\cdot) \in D^{\geq 0}(k\text{-}vect) \; for \; n \gg 0$$

$D^{\rho,\leq 0}$ も同様に定義する。

ρ は豊富であろうと直感を働かせ Serre の消滅定理を逆用してこの様に定義をしたのですが、目論み通り次が成り立ちます。

命題 6. Q を無限表現型クイバーとする。
(1) $(D^{\rho,\geq 0}, D^{\rho,\leq 0})$ は t-構造である。
この t-構造の芯 (heart) を $\mathcal{H}^\rho$ とする。
(2) $A \in \mathcal{H}^\rho$ であり、(A, ρ) は三つ組 $(\mathcal{H}^\rho, A, \rho)$ 上豊富である。

三つ組 $(\mathcal{H}^\rho, A, \rho)$ から定まる次数環 $\Gamma_*(\mathcal{H}^\rho, A, \rho)$ は表現論において研究されている、*preprojective algebra* と呼ばれ、$\Pi(Q)$ と記される環になっていることが分かります。定理 3, 命題 6 より結果が得られます。

主定理 7 (Lenzing, Minamoto). クイバー Q は道代数 kQ が有限次元であり無限表現型とする。このとき次の自然な三角圏の同値が存在する。

$$D^b(\text{mod-}kQ) \xrightarrow{\sim} D^b(\operatorname{qgr} \Pi(Q))$$

Q が Kronecker クイバー $\Omega : \circ \rightrightarrows \circ$ の場合には、圏同値 $\operatorname{qgr} \Pi(\Omega) \cong \operatorname{coh} \mathbb{P}^1$ が成り立ちます。この圏同値によって、定理 7 の三角同値は Beilinson の定理によって与えられる三角同値

$$D^b(\text{mod-}k\Omega) \xrightarrow{\sim} D^b(\operatorname{coh} \mathbb{P}^1)$$

になります。

♠ クイバーの表現型の非可換代数幾何学的特徴付け。

三角圏 $\mathcal{T}$ は Serre 関手 S を持ちある自然数 m, n に対し $S^m \cong [n]$ を満たすとき分数次元 **Calabi-Yau** 圏と呼ばれます。例としては、宮地-Yekutieli による導来 Picard 群の結果から、有限表現型の道代数 kQ の導来圏 $D^b(\text{mod-}kQ)$ は Calabi-Yau 圏であるということが分かります。Calabi-Yau 圏の定義は、もちろん、Calabi-Yau 多様体の導来圏の性質を抽象化したものですが、冒頭に述べた「非可換幾何学の対象として三角圏を考察する」という精神から出てきたものでしょう。同じ精神からすれば、Serre 関手のシフトの逆関手 ρ が豊富であることから、無限表現型の道代数 kQ の導来圏 $D^b(\text{mod-}kQ)$ を **Fano** と呼んでも良いと思われます。
以上から、クイバーの表現型の非可換代数幾何学的特徴付けが得られます。

系 8. Q を道代数 kQ が k 上有限次元なクイバーとする。このとき

$$Q \text{ は有限表現型} \iff D^b(\text{mod-}kQ) \text{ は Calabi-Yau}$$
$$Q \text{ は無限表現型} \iff D^b(\text{mod-}kQ) \text{ は Fano}$$