代数幾何学シンポジウム記録
2007年度　pp.86-90

SIMULTANEOUS FLATTENING OF FROBENIUS AND MINIMAL RESOLUTION

TAKEHIKO YASUDA

Abstract. The F-blowup is an analog of the higher Nash blowup and defined as a subscheme of the Hilbert scheme of points. It is characterized as the universal flattening of Frobenius morphism. Relating it with the G-Hilbert scheme, we obtain non-trivial results. In the toric case, we have an explicit description of the F-blowup. In some cases, an F-blowup is a nice resolution and the sequence of F-bloupws stabilizes or is bounded.

1. 高次ナッシュ爆発

まず最初に高次ナッシュ爆発について簡単に説明する．標数 0 の代数閉体上の（特異点を許す）代数多様体 X を考える．点 $x \in X$ の局所環を $(\mathcal{O}_{X,x}, \mathfrak{m}_x)$ と書く．$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，イデアルの冪 $\mathfrak{m}_x^{n+1}$ はクラスター（すなわち，0 次元部分スキーム）$x^{(n)} \subseteq X$ を定める．これは x の n **次無限小近傍**と呼ばれ，一点 x に被約でないスキーム構造を与えたものだ．このクラスターは X のヒルベルト・スキーム $\mathrm{Hilb}\, X$ の点と同一視される．そこで次の定義をする．

定義 1.1. X の n **次ナッシュ爆発** $\mathrm{Nash}_n X$ を部分集合 $\{x^{(n)} | x \in X_{\mathrm{sm}}\} \subseteq \mathrm{Hilb}\, X$ の閉包と定義する．ここで $X_{\mathrm{sm}} \subseteq X$ は非特異点の集合．

$\mathrm{Nash}_n(X)$ の各点は X のクラスターで，集合としては一点になっているものと同一視される．従ってスキーム構造を忘れるという忘却写像

$$\mathrm{Nash}_n X \to X,\ Z \mapsto Z_{\mathrm{red}}$$

が存在する．この写像はスキームの射で，さらに射影的かつ双有理的となる．そこで次の問題を考えるのは自然だろう．

問題 1.2. 任意の代数多様体 X と十分大きな n について，$\mathrm{Nash}_n X$ は非特異か？

私は 1 次元で肯定的に解決し [Yasuda, a]，一般次元でもそのまま成り立つと予想したが，そうではないようだ．最近の計算によると，おそらく 2 次元の A_3 特異点が反例になっている．

2. F 爆発

高次ナッシュ爆発の類似物である F 爆発というものを調べていくと，予想外に興味深い研究対象であることが分かってきた．

2.1. **導入.** 標数 $p > 0$ の環 R，イデアル $I \subseteq R$，そして $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を考える．$q := p^e$ とおく．このとき e **次フロベニウス冪** $I^{[q]}$ は $\{f^q | f \in I\}$ で生成される R のイデアルと定義する．標数 p の代数閉体上定義された代数多様体 X の点 x に対し，$x^{[q]} \subseteq X$ をイデアル $\mathfrak{m}_x^{[q]} \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ に対応する部分スキームとする．

JSPS research fellow (PD).

定義 2.1. X の e **次** F **爆発**$\mathrm{FB}_e X$ を部分集合 $\{x^{[q]} | x \in X_{\mathrm{sm}}\} \subseteq \mathrm{Hilb}\, X$ の閉包と定義する．

すなわち，高次ナッシュ爆発で普通の冪 $\mathfrak{m}_x^{n+1}$ を考えたところを，フロベニウス冪 $\mathfrak{m}_x^{[q]}$ で置き換えただけのものである．

以後，簡単のために X はアフィン代数多様体 $\mathrm{Spec}\, R$ とする．（F 爆発は開集合への制限，さらにはスムーズ射と可換なので，こう仮定しても一般性を失わない．）部分環 $R^q := \{f^q | f \in R\} \subseteq R$ は e 次相対フロベニウス射 $F^e : X \to X_e := \mathrm{Spec}\, R^q$ を定める．各点 $x \in X$ に対し，$F^e(x)$ 上のスキーム論的ファイバーは $x^{[q]}$ である．F^e は $X_{e,\mathrm{sm}}$ 上で平坦なので，対応する射 $X_{e,\mathrm{sm}} \to \mathrm{Hilb}\, X$ があるが，これは埋め込みになっている．従って，自然な双有理写像 $\mathrm{FB}_e X \dashrightarrow X_{e,\mathrm{sm}}$ がある．さらに，これは射影的双有理射

$$\mathrm{FB}_e X \to X_e$$

に拡張できる．これは写像として忘却写像

$$\mathrm{FB}_e X \to X,\ Z \to Z_{\mathrm{red}}$$

（これはスキームの射ではない）と $F^e : X \to X_e$ の合成と一致する．

2.2. **フロベニウス射の平坦化.**

定義 2.2. $f : Y \to X$ を整スキームの射とする．f の平坦化とは固有双有理射 $X' \to X$ でファイバー積 $X' \times_X Y$ の既約成分で X' を支配するものに被約スキーム構造を入れたものは X' 上平坦であるもののこと．f の平坦化 $X' \to X$ が普遍平坦化であるとは，任意の f の平坦化 $X'' \to X$ が $X'' \to X' \to X$ と分解することをいう．

普遍平坦化は定義より存在すれば一意的だ．そして射影的射に対しては存在する．実際，射影的射 $f : Y \to X$ に対し，相対ヒルベルト・スキーム $\mathrm{Hilb}(Y/X)$ の既約成分として，普遍平坦化は実現できる．

ここでフロベニウス射の場合を考える．X を再び正標数の（アフィン）代数多様体とする．Kunz の定理 [Kunz, 1969] より，$F^e : X \to X_e\ (e > 0)$ は，ちょうど $X_{e,\mathrm{sm}}$ 上で平坦である．

事実 2.3. $\mathrm{FB}_e X$ は $F^e : X \to X_e$ の普遍平坦化である．

この事実より，$\pi_e : \mathrm{FB}_e X \to X_e\ (e > 0)$ はちょうど $X_{e,\mathrm{sm}}$ 上で同型射となる．

2.3. **修正版 F 爆発.**

既に述べたように，$\mathrm{FB}_e X$ は X とではなく X_e と自然に双有理的だった．しかし，それでは異なる e に対する $\mathrm{FB}_e X$ を比べるのに不便なので次の定義をする．

定義 2.4. $\mathrm{FB}'_e X$ を e 次絶対フロベニウス射 $F^e_{\mathrm{ab}} : X \to X$ の普遍平坦化と定義する．

または，同じ事だが，自然な射 $\mathrm{Spec}\, R^{1/q} \to X = \mathrm{Spec}\, R$ の普遍平坦化と定義しても良い．また，$\mathrm{Hilb}(\mathrm{Spec}\, R^{1/q})$ の部分スキームとして構成することも出来る．$\mathrm{FB}_e X$ と $\mathrm{FB}'_e X$ は $\mathbb{Z}$ 上では同型で，自然な射 $\mathrm{FB}'_e X \to \mathrm{FB}_e X$ があり，これはフロベニウス射となる．

2.4. **主要問題.**

問題 2.5. X を正標数の代数多様体とする．

(1) 十分大きな e に対し，$\mathrm{FB}_e X$ は非特異か．
(2) F 爆発の列 $\mathrm{FB}'_1 X, \mathrm{FB}'_2 X...$ は安定化するか．
(3) X の全ての F 爆発 $\mathrm{FB}'_e X,\ e \geq 0$ を支配する X の爆発は存在するか．

(1) は後で見るように，一般には否定的だが，特別な場合には単に非特異となるだけでなく，最小特異点解消やクレパント特異点解消を与える．(2) については，X が正規なら常に正しいのではないかと予想している．(3) は常に正しいのではないかと予想している．もちろん (2) が正しければ，(3) も正しい．これらの問題に，以下では商特異点とトーリック特異点の場合に部分的な回答を与える．

3. G ヒルベルト・スキームとの関係

M を非特異代数多様体で有限群 G が有効に作用しているものとする．標数 p は位数 $|G|$ を割り切らないとする．

定義 3.1 ([Ito and Nakamura, 1999]). G **ヒルベルト・スキーム**$\mathrm{Hilb}^G M$ を部分集合

$$\{\,\text{自由}\ G\ \text{軌道}\,\} \subseteq \mathrm{Hilb}\, M$$

の閉包と定義する．

任意の点 $Z \in \mathrm{Hilb}^G M$ は長さ $|G|$ のクラスターで G 作用で安定なものとなる．

$X := M/G$ を商多様体とする．各 $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，自然な写像

$$\psi_e : \mathrm{Hilb}^G M \to \mathrm{FB}_e\, X$$

が次のように構成できる．$q := p^e$ とおく．$\mathcal{I}_Z \subseteq \mathcal{O}_M$ を Z の定義イデアルとしたとき，$Z^{[q]} \subseteq M$ をフロベニウス冪 $\mathcal{I}_Z^{[q]}$ で定義されるクラスターとする．これは長さが $q^{\dim M} \cdot |G|$ で，再び G 作用で安定である．そこで商スキーム $Z^{[q]}/G$ を取ることができ，これは X のクラスターとなる．簡単に $Z^{[q]}/G \in \mathrm{FB}_e\, X$ が分かる．そこで写像 ψ_e を $\psi_e(Z) := Z^{[q]}/G$ で定義する．ψ_e はスキームの射として，次のように分解する．

$$\psi_e : \mathrm{Hilb}^G M \xrightarrow{F^e} (\mathrm{Hilb}^G M)_e \xrightarrow{\phi_e} \mathrm{FB}_e\, X.$$

ここで F^e は $\mathrm{Hilb}^G M$ の相対フロベニウス射，ϕ_e は射影的双有理射．これに ϕ_e に対応して，X の爆発間の射 $\phi'_e : \mathrm{Hilb}^G M \to \mathrm{FB}'_e\, X$ がある．

系 3.2. 商多様体 X に対し問題 *2.5(3)* の答えは肯定的.

定理 3.3. G はアーベル群で $q = p^e > |G|$ と仮定する．このとき ϕ_e と ϕ'_e は同型射.

系 3.4. G はアーベル群で $\dim M = \dim X = 2$ とする．このとき，十分大きな e について，$\mathrm{FB}'_e\, X$ は X の最小特異点解消.

これは [Ito and Nakamura, 1996, Kidoh, 2001] の結果と定理 3.3 から従う．また，直接 $\mathrm{FB}_e\, X$ を計算して，これを証明することも出来る．この方法だと，２次元非正規孤立トーリック特異点で正規化しても特異なものについても，F 爆発で最小特異点解消が得られることが分かる．正規化して非特異になるものは，最小特異点解消を一点爆発したものになる．

系 3.5. G はアーベル群，$\dim M = \dim X = 3$，X はゴレンシュタインとする．このとき，十分大きな e について，$\mathrm{FB}'_e\, X$ は X のクレパント特異点解消.

これは [Nakamura, 2001] の結果と定理 3.3 から従う．

系 3.6. 一般に正規代数多様体の F 爆発は正規とは限らない．

これには次の例がある：[Craw et al., 2006, Example 5.7] k を標数 $p > 0, p \neq 5$ の代数閉体とする．$G \subseteq GL(6, k)$ を対角行列 $\mathrm{diag}(\omega, \omega, \omega, \omega, \omega, \omega)$，$\mathrm{diag}(1, \omega, 1, \omega^3, \omega^4, \omega^3)$，$\mathrm{diag}(\omega^3, \omega^2, \omega^4, \omega^2, \omega, \omega)$，$\mathrm{diag}(\omega, 1, \omega, 1, 1, 1)$ で生成される有限部分群とする．ここで $\omega \in k$ は 1 の原始 5 乗根．このとき $G \curvearrowright \mathbb{A}_k^6$ に付随する G ヒルベルト・スキームは非正規．したがって十分大きな e に対し，$\mathrm{FB}_e(\mathbb{A}_k^6/G)$ は非正規.

4. トーリック多様体のＦ爆発

トーリック多様体のＦ爆発を明示的に記述する方法について述べる．

4.1. **セッティング．** $M := \mathbb{Z}^d$ を階数 d の自由アーベル群，$A \subseteq M$ を有限生成部分モノイドで M を群として生成するものとする．このとき A に付随するトーリック多様体を $X := \operatorname{Spec} k[A]$ で定義する．代数幾何で通常考えるトーリック多様体と違い，正規であることは仮定しない．これは代数的トーラス $T := \operatorname{Spec} k[M]$ を稠密開部分多様体として含んでいる．その非常に標準的な構成から，各Ｆ爆発 $\mathrm{FB}_e X$ と $\mathrm{FB}'_e X$ は X への T 作用を受け継ぐ，従って，再びトーリック多様体となる．

$N := M^\vee$ を M の双対とする．このとき各 $w = (w_1, \dots, w_d) \in N$ に対し，１パラメタ部分群

$$\lambda_w : \mathbb{G}_m \to T,\ t \mapsto (t^{w_1}, \dots, t^{w_d})$$

が対応する [Fulton, 1993, §2.3]．$A_\mathbb{R} \subseteq M_\mathbb{R}$ を A で張られる錐，$A^\vee_\mathbb{R} \subseteq N_\mathbb{R}$ をその双対錐とする．もし $w \in \operatorname{rel.int.} A^\vee_\mathbb{R} \cap N$ なら，極限 $\lim_{t\to 0} \lambda_w(t)$ は X の中に存在する．また極限は $w \in \operatorname{rel.int.} A^\vee_\mathbb{R} \cap N$ の取り方に依存しない．

4.2. **極限クラスターとイニシャル・イデアル．** 各 e に対し，e 次Ｆ爆発 $\mathrm{FB}_e X (\cong \mathrm{FB}'_e X)$ は $N_\mathbb{R}$ 内の扇 Δ_e で $|\Delta_e| = A^\vee_\mathbb{R}$ となるものを定める．（$\mathrm{FB}_e X$ は正規とは限らないので，Δ_e は $\mathrm{FB}_e X$ を定めないことに注意.）

このとき $w \in \operatorname{rel.int.} A^\vee_\mathbb{R} \cap N$ に対し，$\mathrm{FB}_e X$ の中での極限 $Z_w := \lim_{t\to 0} \lambda_w(t)$ は $w \in \operatorname{rel.int.} \sigma$ を満たす錐 $\sigma \in \Delta_e$ と対応する．各点 $\lambda_w(t) \in T$ はクラスター $\lambda_w(t)^{[q]} \subseteq T$ に対応する．そして Z_w はクラスターの族 $\lambda_w(t)^{[q]}, t \in \mathbb{G}_m$ の極限となっている．

$\mathbf{1} \in T$ を単位元，$\mathfrak{a}_e \subseteq k[A]$ をクラスター $\mathbf{1}^{[q]} \subseteq X$ の定義イデアルとする．全ての１パラメタ部分群は $\mathbf{1}$ を通るので，$\mathfrak{a}_e$ を λ_w に沿って変形していき，Z_w の定義イデアルを求める．$w \in \operatorname{rel.int.} \sigma \cap N$ は $k[A]$ を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付き環にする．そこで各ローラン多項式 $f \in k[A]$ を

$$f = f_m + f_{m-1} + \dots + f_n,\ f_m \neq 0,\ f_i : i \text{ 次斉次式}$$

と斉次式に分解したとき，最高次の斉次式 $\mathrm{In}_w f := f_m$ を f の**イニシャル形式**という．そして $\mathfrak{a}_e$ の**イニシャル・イデアル**を次で定義する．

$$\mathrm{In}_w \mathfrak{a}_e := \langle \mathrm{In}_w f | f \in \mathfrak{a}_e \rangle \subseteq k[A].$$

事実 4.1. $\mathrm{In}_w \mathfrak{a}_e$ は $Z_w \subseteq k[A]$ の定義イデアル．

[Eisenbud, 1995, §15.8] にこの事実の分かりやすい説明がある．ただし，そこでは多項式環のイデアルのみを扱っているが，モノイド環のイデアルについても同様である．

$w \in \operatorname{rel.int.} \sigma \cap N$ を動かすと，イニシャル・イデアル $\mathrm{In}_w \mathfrak{a}_e$ は有限個のイデアルの中で変化する．これは $\operatorname{rel.int.} \sigma$ の分割（扇）を定める．この扇をイデアル $\mathfrak{a}_e$ の**グレブナー扇**という．話をまとめると，次のようになる．

定理 4.2. $\mathrm{FB}_e X$ の扇 Δ_e はクラスター $\mathbf{1}^{[q]} \subseteq X$ の定義イデアル $\mathfrak{a}_e \subseteq k[A]$ のグレブナー扇である．

G ヒルベルト・スキームに対する同様の事実は [Ito, 2001, Ito, 2002, Craw et al., 2006] で観察されている．

ちなみに $\mathfrak{a}_e$ は二項イデアルとなり，そのグレブナー扇の計算も比較的簡単だと思われる．

4.3. **トーリック F 爆発の列.** 上で述べたように，$\mathrm{FB}_e X$ は非正規かもしれないので，扇 Δ_e を求めるだけでは不十分だ．しかし，実際には $\mathfrak{a}_e$ のグレブナー基底を使って，$\mathrm{FB}_e X$ のアフィン・チャートの座標環を求めることができる．詳しくは [Yasuda, b] を参照．G ヒルベルト・スキームに対して，同様のことが [Craw et al., 2006] で示されている．このように，$\mathrm{FB}_e X$ は完全に明示的に記述できる．この記述を使い，問題 2.5(2),(3) に対し，次の肯定的な回答を示すことができる．

定理 4.3. X をトーリック多様体とする．

(1) X の全ての F 爆発は，ある一つの爆発に支配される．
(2) X は正規と仮定する．そのとき列 $\mathrm{FB}'_1 X, \mathrm{FB}'_2 X, \ldots$ は安定化する．

References

[Craw et al., 2006] Craw, A., Maclagan, D., and Thomas, R. R. (2006). Moduli of McKay quiver representations ii: Groebner basis techniques. math/0611840. to appear in J. Algebra.

[Eisenbud, 1995] Eisenbud, D. (1995). *Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York.

[Fulton, 1993] Fulton, W. (1993). *Introduction to toric varieties*, volume 131 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ. , The William H. Roever Lectures in Geometry.

[Ito, 2001] Ito, Y. (2001). G-Hilbert scheme and Gröbner basis. Algebraic Geometry Symposium in Kinosaki.

[Ito, 2002] Ito, Y. (2002). Minimal resolution via Gröbner basis. In *Algebraic geometry in East Asia (Kyoto, 2001)*, pages 165–174. World Sci. Publ., River Edge, NJ.

[Ito and Nakamura, 1996] Ito, Y. and Nakamura, I. (1996). McKay correspondence and Hilbert schemes. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 72(7):135–138.

[Ito and Nakamura, 1999] Ito, Y. and Nakamura, I. (1999). Hilbert schemes and simple singularities. In *New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996)*, volume 264 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 151–233. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[Kidoh, 2001] Kidoh, R. (2001). Hilbert schemes and cyclic quotient surface singularities. *Hokkaido Math. J.*, 30(1):91–103.

[Kunz, 1969] Kunz, E. (1969). Characterizations of regular local rings for characteristic p. *Amer. J. Math.*, 91:772–784.

[Nakamura, 2001] Nakamura, I. (2001). Hilbert schemes of abelian group orbits. *J. Algebraic Geom.*, 10(4):757–779.

[Yasuda, a] Yasuda, T. Higher Nash blowups. arXiv:math.AG/0512184. to appear in Compositio Mathematica.

[Yasuda, b] Yasuda, T. Universal flattening of Frobenius. arXiv:0706.2700.

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto, 606-8502, Japan

E-mail address: takehiko@kurims.kyoto-u.ac.jp, highernash@gmail.com