代数幾何学シンポジウム記録
2007年度　pp.42-49

Tropical Nullstellensatz and resultant*

小田切 真輔

October 23, 2007

Abstract

Tropical geometry is given as a geometry of max-plus algebra. The Nullstellensatz and the theorem of resultant holds as an analogy of classical geometry. The statement of Nullstellensatz is simplified compared to the known result.

1　序

トロピカル幾何は，区分的線形凸関数を扱う幾何であり，計算機代数・トーリック幾何・可積分系などとの関連で近年急激に発展している分野である．トロピカル幾何に対するアプローチにはいくつかあるが，ここではトロピカル幾何を max-plus 代数の幾何として “きちんと” 構成する．また，トロピカル幾何でも零点定理および終結式の定理が通常の代数幾何のアナロジーとして成り立つ (定理 16, 定理 23).

なお，トロピカル幾何の入門的な内容に関する参考文献としては梶原氏による [K], Kirillov 氏と前野氏による [KM], 古典的な入門文献である [RGST], より代数幾何的なアプローチの [G] らがある．この話の第 2 節から第 4 節までは [O1]，第 5 節は [O2] に基づいている．

2　トロピカル半体

半環および半体に関する定義や一般論はすべて [HW] に拠る．

$\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ とする．$\mathbb{T}$ には以下のように演算が入る:

$$a \oplus b = \max\{a, b\}^1, \quad a \otimes b = a + b.$$

*もともとのタイトルは Tropical functions and Nullstellensatz だったが，終結式についての結果が出たので変更した．

[1] $a \oplus b = \min\{a, b\}$ と定義する流儀もある．このとき $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ とおく．

この演算により $(\mathbb{T}, \oplus, \otimes)$ は半体[2]になる．これを トロピカル半体 と呼ぶ[3].

例 1 $(\mathbb{T}, \oplus, \otimes)$ が半体であることを見てみよう．

- $-\infty \oplus a = \max\{-\infty, a\} = a$. よって $-\infty$ が零元になっている．
- $0 \otimes a = 0 + a = a$. よって 0 が単位元になっている．
- $a \otimes (b \oplus c) = a + \max\{b, c\} = \max\{a+b, a+c\} = a \otimes b \oplus a \otimes c$. よって分配律が成り立つ．
- $a^{-1} = -a$, ${}^{\forall}a \in \mathbb{R} = \mathbb{T} \setminus \{-\infty\}$. よって，$-\infty$ 以外の元は逆元をもつ．

次は一般には半環[4]や半体で成り立たないことに注意してほしい．

- $-\infty \otimes a = -\infty$. このとき $-\infty$ は absorbing zero であるという．

以降，半環 (resp. 半体) といったとき，可換な半環 (resp. 半体) で，absorbing zero と単位元をもつものと仮定する．

3 トロピカル多項式

次の命題は，多項式半環が多項式環の場合と同様に構成できることから示される．

命題 2 S が半環ならば，$S[x]$ に演算を入れることができ，半環となる．

よって，$\mathbb{T}[x_1, \ldots, x_n]$ は半環となる．$\mathbb{T}[x_1, \ldots, x_n]$ の元をトロピカル多項式と呼ぶ．

注 3 次数の和は通常の和である．すなわち，$ax^i \otimes bx^j = (a \otimes b)x^{i+j}$.
また，通常の多項式環の場合と同様に略記する．すなわち

- 係数が $-\infty$ の項はふつう書かない．たとえば $3x = -\infty x^2 \oplus 3x \oplus -\infty$. 逆に書かれていない項はすべて係数が $-\infty$ の項と見なせる (すなわち，有限個の項を除いてすべて係数は $-\infty$ である)．
- 係数が 0 の項は定数項以外は係数を略して書く．たとえば $x = 0x$.
- トロピカル多項式同士の掛け算において，掛け算記号をしばしば省略する．$FG = F \otimes G$.

[2]体の公理系から和に関する逆元の存在の仮定を抜いたもの．
[3]$(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ をトロピカル半体と定義する流儀もある．
[4]環の公理系から和に関する逆元の存在の仮定を抜いたもの．

例 4

$$x(x \oplus 0) = 0x \otimes (0x \oplus 0) = (0 \otimes 0)x^2 \oplus (0 \otimes 0)x = x^2 \oplus x.$$

以下同様に計算すると次のようになる．

$$(x \oplus 0)(x \oplus 1) = x^2 \oplus 1x \oplus 1,$$

$$(xy \oplus x \oplus y)(x \oplus y \oplus 0) = (x \oplus y)(x \oplus 0)(y \oplus 0).$$

最後の例は $\mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]$ において $n \geq 2$ のとき既約分解の一意性が成り立たないことを示している (これは後述する $\mathrm{Poly}(\mathbb{T}^n)$ でもこの例より同様である．ただし，$n = 1$ のときはどちらでも一意である．系 18 参照)．

注 5 点 $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{T}^n$ に対し，写像

$$\mathbb{T}[x_1, \dots, x_n] \ni F \mapsto F(p) \in \mathbb{T}$$

は (半環としての) 準同型である．ただし，

$$F = \sum_I a_I \underline{x}^I = \sum_{I=(i_1,\dots,i_n)} a_I x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

に対し，$F(p) := \sum_I a_I p^I = \sum_{I=(i_1,\dots,i_n)} a_I p_1^{i_1} \dots p_n^{i_n}$ である．

定義 6 $F = \sum_I a_I \underline{x}^I \in \mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]$ に対し，<u>トロピカル超曲面</u> $V(F)$ を以下のように定義する:

$$V(F) := \{p \in \mathbb{T}^n \mid F(p) = a_{J_1} p^{J_1} = a_{J_2} p^{J_2},\ {}^\exists J_1, J_2,\ J_1 \neq J_2\}.$$

注 7 トロピカル和の定義より，$F(p) = a_{J_1} p^{J_1}$ となる J_1 が常に存在する．

注 8 $F = a_I \underline{x}^I$ を単項式とする．このとき I 次の項以外はすべて係数が $-\infty$ と見なせるので，もし点 p が $V(F)$ の元ならば $F(p) = a_I p^I = -\infty p^J$ となる $J \in \mathbb{N}^n$ が存在する．しかしどのような J および p に対しても，$-\infty p^J = -\infty$ なので，結局単項式に対しては $V(F) = \{p \in \mathbb{T}^n \mid F(p) = -\infty\}$ となる．

例 9 $V(-\infty) = \mathbb{T}^n,\quad V(0) = \emptyset,\quad V(x^2 \oplus 1x \oplus 1) = \{0, 1\}.$

なお，一般に $V(FG) = V(F) \cup V(G)$ が成り立つ．

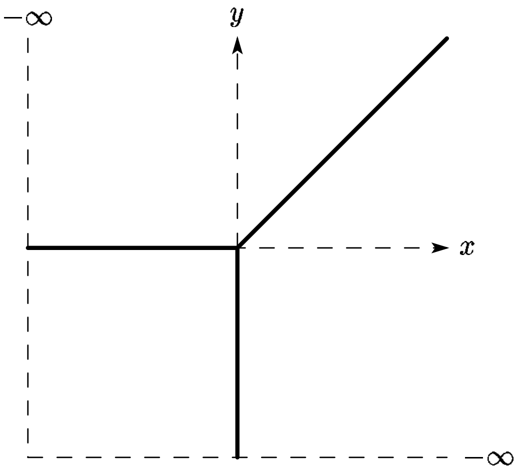

Figure 1: $V(x \oplus y \oplus 0)$

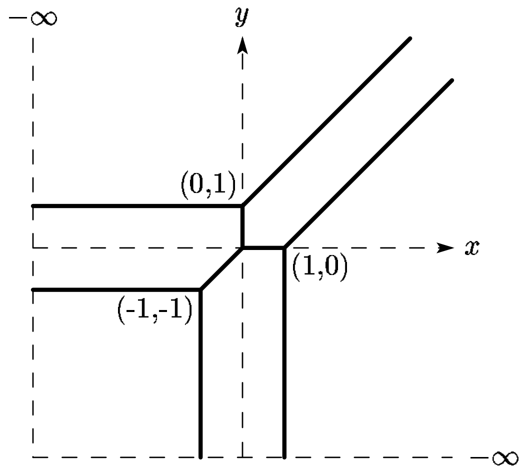

Figure 2: $V(x^2 \oplus 1xy \oplus y^2 \oplus 1x \oplus 1y \oplus 0)$

4 零点定理

一般にトロピカル多項式全体よりもトロピカル多項式関数全体の方が性質がいい.

定義 10 半環 S の元 a が multiplicatively cancellative element であるとは,任意の元 b, c に対し,$ab = ac$ ならば $b = c$ が成り立つことである.S の零元でないすべての元が multiplicatively cancellative element であるとき,S は multiplicatively cancellative であるという.

注 11 これは,環における整域に対応する条件である.なお,トロピカルの場合,零元が $-\infty$ となっていることに注意せよ.

次の例が示すように,$\mathbb{T}[x_1, \ldots, x_n]$ は (どんな $n \geq 1$ に対しても) multiplicatively cancellative ではない.

例 12

$$(x \oplus 0)(x^2 \oplus x \oplus 0) = (x \oplus 0)(x^2 \oplus 0)$$

定義 13 $\mathbb{T}[x_1, \ldots, x_n]$ に次のように同値関係を入れる[5]:

$$F \sim G \Leftrightarrow F(p) = G(p),\ {}^{\forall}p \in \mathbb{T}^n.$$

このとき,$\mathrm{Poly}(\mathbb{T}^n) := \mathbb{T}[x_1, \ldots, x_n]/\sim$ と定義する.

[5] これは F, G の extended polyhedral domain が等しいことと同値である.[M] および [GKZ] 参照.

命題 14 $\mathrm{Poly}(\mathbb{T}^n)$ は *multiplicatively cancellative* な半環である.

定義 15 $f \in \mathrm{Poly}(\mathbb{T}^n)$ に対し，$F \in \mathbb{T}[x_1, \ldots, x_n]$ を代表元とする．すると $V(f) := V(F)$ は代表元のとり方に拠らず定まる.

次の定理は [SI] にもあるが，我々は $\mathbb{T}$ 上考えることにより，すっきりした形で定理が述べられている[6].

定理 16 (Nullstellensatz) $f, g \in \mathrm{Poly}(\mathbb{T}^n)$ が $V(f) \supset V(g)$ を満たしているとする．すると自然数 k とトロピカル多項式関数 $h \in \mathrm{Poly}(\mathbb{T}^n)$ が存在して，$f^k = gh$ をみたす.

証明. $\mathrm{Poly}(\mathbb{T}^n)$ は multiplicatively cancellative なので，その商半体を $\mathrm{Rat}(\mathbb{T}^n)$ とおく．$f, g \neq -\infty$ として，$h_i := f^i/g \in \mathrm{Rat}(\mathbb{T}^n)$ とする.

Step 1 g が x_j で割り切れる[7]ならば，f も x_j で割り切れる．よって i を十分大きくとれば h_i の分母がすべての x_j で割り切れないようにできる.

Step 2 $\mathrm{Im}\, h_i|_{\mathbb{R}^n} \subset \mathbb{R}$ であり，上を満たす十分大きい i に対し，

$$h_i \in \mathrm{Poly}(\mathbb{T}^n) \Leftrightarrow h_i|_{\mathbb{R}^n} \text{が (通常の意味で) 凸関数}$$

である．よって必要ならさらに十分大きく i をとると $h_i \in \mathrm{Poly}(\mathbb{T}^n)$ となる.

□

注 17 たとえ f, g のすべての代表元が被約で $V(f) = V(g)$ を満たしていたとしても，単元倍を除いて $f = g$ となるとは限らない．たとえば，

$$f = (x \oplus y \oplus 0)(x^{15}y^{21} \oplus y^{16} \oplus x^8)$$
$$g = (xy^3 \oplus y^4 \oplus 0)(x^3y^3 \oplus x^2 \oplus y^2 \oplus x)$$

とすると，$V(f) = V(g)$ だが，f, g の次数が違う．しかし，$f^4 = gh,\ g^8 = fh'$ となる h, h' が存在する.

系 18 任意の $\mathrm{Poly}(\mathbb{T})$ の定数でない元は一次式の積に単元倍を除いて一意に分解できる.

特に $\mathbb{T}$ は “代数閉体” である.

[6] [SI] ではイデアルに対する零点定理が示されている．しかし，$\mathrm{Poly}(\mathbb{T}^n)$ のイデアルは tropical basis の微妙な問題があり，イデアルの定義が妥当であるかもよくわかっていない．なお，我々の証明は [SI] よりも，max-plus 代数を意識した証明となっている.

[7] $g = x_j g'$ となる $g' \in \mathrm{Poly}(\mathbb{T}^n)$ が存在するということ.

5 終結式

定義 19 ([DSS]) $F \in \mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]$ (resp. $f \in \mathrm{Poly}(\mathbb{T}^n)$), $p \in \mathbb{T}^n$ に対し，F が (resp. f が) p において tropically singular であるとは，$p \in V(F)$ (resp. $p \in V(f)$) であることとする．

すなわち，点 p が F の零点であるとき，F は p において tropically singular であるという．

例 20 $F = x \oplus y$, $p = (0, 0)$ とする．このとき $x \oplus y$ は $(0, 0)$ において tropically singular である．これを，単に $0 \oplus 0$ は tropically singular であると書く．

また，トロピカルな行列式を次のように定義する．

定義 21 ([DSS]) $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{T})$ に対し，

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

と定義する[8]．ただし，$\sum, \prod$ はトロピカルな和，積とする．

定義 22 トロピカル多項式 $F = a_0 x^n \oplus \cdots \oplus a_n$, $G = b_0 x^m \oplus \cdots \oplus b_m$ $(a_0, b_0 \neq -\infty)$ に対し，終結式 $R(F, G)$ を Sylvester 行列の行列式として定義する:

$$R(F,G) := \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & & & -\infty \\ & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ -\infty & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & & & -\infty \\ & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ -\infty & & & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \mathrm{m} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \mathrm{n} \end{array}$$

定理 23 トロピカル多項式 F, G を

$$F \sim a_0(x \oplus \alpha_1) \dots (x \oplus \alpha_n), \ G \sim b_0(x \oplus \beta_1) \dots (x \oplus \beta_m) \in \mathbb{T}[x]$$

と因数分解したとき，$R(F, G) = a_0^m b_0^n \prod_{i,j} (\alpha_i \oplus \beta_j)$ であり，

$$R(F,G) \text{ が } \textit{tropically singular} \Leftrightarrow a_0^m b_0^n \prod_{i,j} (\alpha_i \oplus \beta_j) \text{ が } \textit{tropically singular}$$

である．

[8]すなわち，permanent として定義する．

証明の基本方針は一列目に関して余因子展開して帰納法に持ち込む．具体的には煩雑なので省略する ([O2] 参照).

注 24

$$a_0^m b_0^n \prod_{i,j} (\alpha_i \oplus \beta_j) \text{ が tropically singular} \Leftrightarrow \alpha_p = \beta_q \text{ となる } p, q \text{ が存在する．}$$

定義 25 Poly($\mathbb{T}$) の元 f, g に対し，代表元をそれぞれ $F, G \in \mathbb{T}[x]$ とする．このとき，$R(F, G)$ は代表元の取り方によらないので，$R(f, g) = R(F, G)$ と定義する．

系 26 トロピカル多項式関数 f, g を

$$f = a_0(x \oplus \alpha_1) \dots (x \oplus \alpha_n),\ \ g = b_0(x \oplus \beta_1) \dots (x \oplus \beta_m) \in \mathrm{Poly}(\mathbb{T})$$

と因数分解したとき，$R(f, g) = a_0^m b_0^n \prod_{i,j} (\alpha_i \oplus \beta_j)$ であり，また，

$$R(f, g) \text{ が } \textit{tropically singular} \Leftrightarrow a_0^m b_0^n \prod_{i,j} (\alpha_i \oplus \beta_j) \text{ が } \textit{tropically singular}$$

である．

すなわち $R(f, g)$ と $a_0^m b_0^n \prod_{i,j} (\alpha_i \oplus \beta_j)$ は tropical singularness も含めて等しい．特に，$R(f, g)$ が tropically singular であれば f と g は共通因子を持つ．

References

[DSS] M. Develin, F. Santos, and B. Sturmfels, On the rank of a tropical matrix, Combinatorial and computational geometry, MSRI Publications **52** (2005), 213–242.

[G] A. Gathmann, Tropical algebraic geometry, Jahresbericht der DMV **108** (2006) no. 1, 3–32.

[GKZ] I. Gelfand, M. Kapranov, and A. Zelevinsky, Discriminants, resultants and multidimensional determinants, Birkhäuser, 1994.

[HW] U. Hebisch and H. J. Weinert, Semirings — Algebraic Theory and Applications in Computer Science, World Scientific, Singapore, 1998.

[K] 梶原健, トロピカル幾何入門, 代数幾何学勉強会 講義録, 多元数理講義録 **6** (2006), 5–20.

[KM] A. Kirillov, 前野俊昭, 素晴らしきアメーバたち, 数学 **58** (2006), 39–52.

[M] G. Mikhalkin, Enumerative tropical geometry in $\mathbb{R}^2$, J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), 313–377.

[O1] S. Odagiri, Tropical algebraic geometry, preprint.

[O2] S. Odagiri, Tropical resultant, in preparation.

[RGST] J. Richter-Gebert, B. Strumfels, and T. Theobald, First steps in tropical geometry, in: Idempotent mathematics and mathematical physics, 289–317, Contemp. Math. **377** (2005), Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[SI] E. Shustin and Z. Izhakian, A tropical nullstellensatz, arXiv:math.AC/0508413

東京都立大学大学院理学研究科
ODAGIRI-SHINSUKE@ED.TMU.AC.JP