代数幾何学シンポジウム記録
2009年度　pp.89-96

On O'Grady's 10 dimensional example

永井　保成[*]

O'Grady が 10 年ほど前に論文 [OG] で構成した既約シンプレクティック多様体は，Beauville の論文 [B] に書かれている既約シンプレクティック多様体の例以来，初めて与えられた本質的に新しい例であった．しかし，O'Grady の 10 次元の例については，例えば K3 曲面の上のコンパクトな安定層のモジュライ空間の場合と比べるとまだまだ十分な理解がなされているとはいい難い．O'Grady の 10 次元の例について知られている結果をまとめた後，最近得た局所自由でない半安定層のなす軌跡の記述について報告する．

1　O'Grady の例

S を射影的 K3 曲面であって，ピカール数が 1 であるものとし，H を $\mathrm{Pic}(S)$ の豊富な生成元とする．M を階数 2，$c_1 = 0$，$c_2 = 4$ の S 上の H-Gieseker 半安定層のモジュライ空間とする．M は 10 次元の射影代数多様体であり，安定層に対応する点全体 M^s のなす開集合は滑らかであり，M^s 上には自然な正則シンプレクティック形式 σ_{M^s} がある [Mu]．変形理論によれば M は M^s の補集合 $\Sigma = M \backslash M^s$ に沿って特異点を持つことがわかる．Σ は非交和分解 $\Sigma = \Sigma^0 \amalg \Sigma^1$,

$$\begin{aligned}\Sigma^0 &= \{[I_Z \oplus I_W] \mid Z, W \in \mathrm{Hilb}^2(S), \quad Z \neq W\}\\ \Sigma^1 &= \{[I_Z^{\oplus 2}] \mid Z \in \mathrm{Hilb}^2(S)\}\end{aligned}$$

をもつ．O'Grady が論文 [OG] で証明したことをまとめるとおおよそ次の定理となる．

定理 1 (O'Grady '99 [OG])**.** (1) シンプレクティックな解消 $\pi : \widetilde{M} \to M$ が存在する，すなわち，非特異射影代数多様体 $\widetilde{M}$ からの固有双有理射 π であって $\pi^*\sigma_{M^s}$ が $\widetilde{M}$ 上の正則シンプレクティック形式 $\sigma_{\widetilde{M}}$ に拡張されるものが存在する．
(2) $\widetilde{M}$ は既約シンプレクティック多様体である，すなわち，$\widetilde{M}$ は単連結であ

[*]東大数理，nagai@ms.u-tokyo.ac.jp

り，正則 2 形式の空間 $H^0(\Omega^2_{\widetilde{M}})$ はシンプレクティック形式 $\sigma_{\widetilde{M}}$ で張られる．
(3) $\widetilde{M}$ の第 2 ベッチ数 $b_2(\widetilde{M})$ は 24 以上である．

O'Grady の証明では (1) の部分は GIT 商の特異点解消についての Kirwan の方法 [K] を用いている．すなわち，M に現れる特異点の解析を迂回して，Quot スキームのブローアップの GIT 商として $\widetilde{M}$ は構成されている．従って特異点解消 π が具体的にどういう形をしているのかは O'Grady の議論からは理解することが難しい．この点については，次の定理によって完全な理解が与えられたと言ってよい．

定理 2 (Lehn–Sorger '06 [L-S])**.** (1) M の特異点 $x \in \Sigma^1$ の近傍 $(x \in M)$ はベキ零軌道閉包 $Z = \{A \in \mathfrak{sp}_4 \mid A^2 = 0\}$ と滑らかな 4 次元の空間の直積と局所解析的に同形である:

$$(x \in M) \cong (0 \in Z) \times \mathbb{C}^4.$$

(2) O'Grady の解消 $\pi : \widetilde{M} \to M$ は，Σ_{red} での M のブローアップと同形である．

$\widetilde{M}$ のトポロジーを調べるのも基本的な問題である．O'Grady はすでに $\widetilde{M}$ が "新しい" 既約シンプレクティック多様体の例であることを主張するために，$\widetilde{M}$ のトポロジーについて考えなければならなかった（定理 1 の (2) および (3)）．Rapagnetta は定理 1 (3) の精密化を与えた．

定理 3 (Rapagnetta '08 [R])**.** $\widetilde{\Sigma}$ を O'Grady の特異点解消 $\pi : \widetilde{M} \to M$ の例外因子，$B \subset M$ を局所自由でない半安定層のなす閉部分集合，$\widetilde{B}$ をその $\widetilde{M}$ での狭義変換とする．このとき，$\widetilde{\Sigma}, \widetilde{B}$ は $\widetilde{M}$ の既約な因子であり，

$$H^2(\widetilde{M}, \mathbb{Z}) \cong H^2(S, \mathbb{Z}) \overset{\perp}{\oplus} \left(\mathbb{Z}[\widetilde{\Sigma}] \oplus \mathbb{Z}[\widetilde{B}]\right),$$

ただし，直交記号は Beauville–Bogomolov 形式 ([B]) についてのものである．さらに，Beauville–Bogomolov 形式の第 2 成分への制限は

	$\widetilde{\Sigma}$	$\widetilde{B}$
$\widetilde{\Sigma}$	-6	3
$\widetilde{B}$	3	-2

であたえられる．

この定理によって $\widetilde{M}$ の第 2 ベッチ数は 24 であることがわかる．著者の知る限りでは，より高次のベッチ数はまだ知られていない．位相的オイラー数は Mozgovoy [Mo] によって計算されており，それによれば $e(\widetilde{M}) = 176,904$ である．

2　非局所自由層の軌跡

前節の Rapagnetta の定理に既に現れたが，局所自由でない半安定層の軌跡

$$B = \{[E] \in M \mid E \text{ は局所自由でない}\},$$

は，半安定だが安定でない層の軌跡 Σ や Brill–Noether 軌跡と並んで，モジュライ論的に自然に現れる非常に重要な M の部分多様体である．この B については次の結果が知られている．

定理 4 (Perego '09 [P])**.** B はカルティエ因子でないが，$2B$ はカルティエ因子になる．$WDiv(M)$ を M 上のヴェイユ因子のなすアーベル群，$CDiv(M)$ をカルティエ因子のなすアーベル群とすると $WDiv(M)/CDiv(M) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[B]$ となる．

非局所自由層の軌跡 B は Donaldoson-Uhlenbeck コンパクト化 M^{DU} への自然な射影的双有理射 $\varphi : M \to M^{DU}$ の例外集合としてとらえられる（[H-L], 第 8 章）．一般に，滑らかな射影曲面 S 上の局所自由でない半安定層 E に対して二重双対 E^{**} への埋め込みから得られる

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow E^{**} \longrightarrow Q(E) \longrightarrow 0 \tag{1}$$

なる単完全列を考えると，E^{**} は μ-半安定になり，$Q(E)$ はアルティン的である．アルティン的連接層 Q に対しては 0 次元の付随サイクル

$$\gamma(Q) = \sum_{x \in S} \text{length}\,(Q_x) \cdot x \in \mathrm{Sym}^l(S) \quad (l = \text{length}\,(Q))$$

を考えられる．φ の B への制限は対応

$$E \mapsto (E^{**}, \gamma(Q(E)))$$

で与えられる．いま，$[E] \in B \subset M$ を O'Grady の 10 次元の例を与えるモジュライ空間 M の非局所自由な半安定層とすれば，$E^{**} \cong \mathcal{O}_S^{\oplus 2}$, length $(Q(E)) = 4$ がわかる（[OG], Proposition 3.1.1）ので上記対応の第 1 成分は自明であるから，O'Grady の場合には φ の B への制限は

$$\varphi_{|B} : B \to \mathrm{Sym}^4(S); \quad E \mapsto \gamma(Q(E))$$

となる．このことから，B の GIT 商による記述

$$B \cong \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_S^{\oplus 2}, 4) /\!/ SL(2) \tag{2}$$

が得られる．O'Grady はこの記述を用いて $\varphi_{|B}$ の一般ファイバーが $\mathbb{P}^1$ であることを示した（さらに，この事実は，Rapagnetta や Perego の定理の証明

でも用いられている）．ここで安直に，しかし自然に出てくる問いは，$\varphi_{|B}$ の特殊な点の上のファイバーはどうなっているのかという問題である．

$\eta = [1^{\eta_1}, 2^{\eta_2}, 3^{\eta_3}, 4^{\eta_4}]$ を 4 の分割とする，すなわち，$\eta_j\,(j = 1, 2, 3, 4)$ は非負整数で $\eta_1 \cdot 1 + \eta_2 \cdot 2 + \eta_3 \cdot 3 + \eta_4 \cdot 4 = 4$ を満たすものとすると，自然な非交和分解

$$\mathrm{Sym}^4(S) = \coprod_{\eta} S^{(\eta)}$$

が得られる．0-サイクル $\gamma \in \mathrm{Sym}^4(S)$ に対して，$\gamma \in S^{(\eta)}$ となるとき，γ の型は η であるということにする（例えば，$\gamma = p_1 + p_2 + 2p_3$ なら γ は $[1^2, 2]$-型）．

定理 5. $\gamma \in \mathrm{Sym}^4(S)$ に対して $B_\gamma = \varphi_{|B}^{-1}(\gamma)_{red}$ とおく．

(i) γ が $[1^4]$-型のとき． $B_\gamma \cong \mathbb{P}^1$ で，$(B_\gamma \cap \Sigma)_{red}$ は 3 点．

(ii) γ が $[1^2, 2]$-型のとき． $B_\gamma \cong \mathbb{P}^2$ で，$(B_\gamma \cap \Sigma)_{red}$ は直線 l と一点 P の交わりのない和集合．より詳しく，$\gamma = p_1 + p_2 + 2q$ のとき，

$$l = \{[I_{p_1+p_2} \oplus I_Z] \mid Z \in \mathrm{Hilb}^2(S), \mathrm{Supp}\, Z = \{q\}\},$$
$$P = \{[I_{p_1+q} \oplus I_{p_2+q}]\}.$$

(iii) γ が $[2^2]$-型のとき． B_γ は 2 次曲面の錐（$\subset \mathbb{P}^4$）．$(B_\gamma \cap \Sigma)_{red}$ は 2 次曲面 T と B_γ の頂点 P の交わりのない和集合．より詳しく，$\gamma = 2p_1 + 2p_2$ のとき，

$$T = \{[I_Z \oplus I_W] \mid Z, W \in \mathrm{Hilb}^2(S), \mathrm{Supp}\, Z = \{p_1\}, \mathrm{Supp}\, W = \{p_2\}\},$$
$$P = \{[I_{p_1+p_2}^{\oplus 2}\}.$$

(iv) γ が $[1, 3]$-型のとき． B_γ は $\mathbb{P}^4$ 内の階数 2 の 2 次超曲面，すなわち $\mathbb{P}^2$-束 $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{O}^{\oplus 2} \oplus \mathscr{O}(2))$ の $\mathbb{P}^4$ への双有理射の像として得られるスクロールになる．また，$(B_\gamma \cap \Sigma)_{red}$ は B_γ の頂点のなす直線で，$\gamma = p + 3q$ のとき，

$$l = \{[I_{p+q} \oplus I_Z] \mid Z \in \mathrm{Hilb}^2(S), \mathrm{Supp}\, Z = \{q\}\}.$$

(v) γ が $[4]$-型のとき． B_γ はスクロール $\overline{\mathbb{P}}_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{O}^{\oplus 3} \oplus \mathscr{O}(1) \oplus \mathscr{O}(4)) \subset \mathbb{P}^9$ の既約因子．$B'_\gamma \subset \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{O}^{\oplus 3} \oplus \mathscr{O}(1) \oplus \mathscr{O}(4))$ をその狭義変換とすると，B'_γ は $\mathbb{P}^4$ 内の階数 2 の 2 次超曲面の局所自明な族である．また，$(B_\gamma \cap \Sigma)_{red}$ は $\Pi = \overline{\mathbb{P}}_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{O}^{\oplus 3}) \cong \mathbb{P}^2$ であり，$\gamma = 4p$ とすると

$$\Pi = \{[I_{Z_1} \oplus I_{Z_2} \mid Z_i \in \mathrm{Hilb}^2(S), \mathrm{Supp}(Z_i) = \{p\}\ (i = 1, 2)\}.$$

さらに，B'_γ の各ファイバーの 2 次超曲面の頂点のなす直線の族の B_γ への像は Π の直線族をなすが，その包絡線 Δ は Π 上の非特異 2 次曲線であり，

$$\Delta = (B_\gamma \cap \Sigma^1)_{red} = \{[I_Z^{\oplus 2}] \mid Z \in \mathrm{Hilb}^2(S), \mathrm{Supp}(Z) = \{p\}\}.$$

3　定理5の証明の概略

Quot スキームを用いた B の記述 (2) は直ちに B の既約性や B_γ の既約性を与えるが（Ellingsrud–Lehn [E-L] 参照），B の具体的な記述を得るには不向きである．なぜなら Quot スキーム自体が既に十分複雑である（特異点を持つかもしれない，Mumford 正則性および Plücker 埋め込みで得られる射影方程式系が複雑になる，等々）からである．定理 5 は B_γ の quiver 多様体的な GIT 商による記述を用いて証明される．このアプローチでは具体的な方程式まで求めることができるという利点がある一方で，B 全体の様子については何も得られないのが難点である．以下，γ が $[1^2, 2]$-型の場合に議論の概略を述べる．γ がより深いストレータムに属する場合も方針は全く同じである．

$\gamma = p_1 + p_2 + 2q$ とする．このとき $E \in B_\gamma$ に対して，短完全列 (1) は

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathscr{O}_S^{\oplus 2} \xrightarrow{\Psi} \mathscr{O}_{p_1} \oplus \mathscr{O}_{p_2} \oplus Q \longrightarrow 0$$

になる．ここに，Q は点 q のみに台を持つ長さが 2 の $\mathscr{O}_S$-加群であり，Quot_γ を自然な射 $\mathrm{Quot}(\mathscr{O}_S^{\oplus 2}, 4) \to \mathrm{Sym}^4(S)$ の γ 上のファイバーとすると $\Psi \in \mathrm{Quot}_\gamma$ である．Ψ は $\mathbb{C}$-線形写像 $V = \mathbb{C}^2 \to \mathscr{O}_{p_i}$ $(i = 1, 2)$，$V \to Q$ および，Q の $\mathscr{O}_S$-加群の構造から定まる．そこで，

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{C}^2, \quad Q = \mathbb{C}^2 \\ N_2 &= \{(A_x, A_y) \in \mathfrak{sl}(Q)^{\oplus 2} \mid [A_x, A_y] = O,\ A_x^2 = A_xA_y = A_y^2 = O\} \\ Y_\gamma &= \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}) \times \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}) \times \mathrm{Hom}(V, Q) \times N_2 \end{aligned}$$

とおく．N_2 は Q に入る $\mathbb{C}[\![x, y]\!]$-加群の構造をパラメトライズする空間である．ここに作用する対称性の群は

$$G_\gamma = GL(V) \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times GL(Q)$$

である．ここで，G_γ は N_2 に $GL(Q)$-成分の随伴作用で作用する．モジュライ空間の GIT による構成法の一般的なレシピに従えば，適当な指標 $\chi : G_\gamma \to \mathbb{C}^*$ を選べば

$$B_\gamma \cong Y_\gamma /\!\!/_{\chi} G_\gamma$$

と記述される．この場合には自然な指標の取り方は一通りで，それは Y_γ 上の普遍族の行列式直線束から得られ，$\chi = (\det_V)^{-2} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}^*} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}^*} \cdot (\det Q)$ になる．

このような記述が得られればあとは，座標環 $A(Y_\gamma)$ の G_γ, χ-半不変式環 $A(Y_\gamma)^{G_\gamma, \chi}$ の計算に問題は帰着される．この半不変式環は $SL(V) \times SL(Q)$-不変式のうち，指標が χ のベキ乗になるもの全体であり，Y_γ はアフィン代数多様体だから，半不変式の計算は古典的不変式論の範疇で完結している．

Y_γ の元を座標を用いて

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \hline b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, (A, B) \right), \quad ((A, B) \in N_2)$$

と書く．$SL(V)$ は最初の行列に右からの逆行列の乗法で作用し，この作用に関する不変式は A, B の座標と最初の行列の 2×2-小行列式

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\ f_2 &= b_1c_2 - b_2c_1, \\ v_1 &= \begin{pmatrix} a_{11}b_2 - a_{12}b_1 \\ a_{21}b_2 - a_{22}b_1 \end{pmatrix}, \\ v_2 &= \begin{pmatrix} a_{11}c_2 - a_{12}c_1 \\ a_{21}c_2 - a_{22}c_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

の多項式である．$SL(Q)$ は (A, B) に共役で，v_1, v_2 には左からの乗法で，f_1, f_2 には自明に作用する．この $SL(Q)$-不変式は古典不変式論の **symbolic method** で計算できる:

> いま，一般に Q をベクトル空間とするとき，$Q^{\oplus 2} \oplus \mathrm{End}(Q)^{\oplus 2}$ への $SL(Q)$ の自然な作用に関する不変式環は，$(v_1, v_2; A, B) \in Q^{\oplus 2} \oplus \mathrm{End}(Q)^{\oplus 2}$ に関して，基本不変式
>
> - $\mathrm{trace}(W_1(A, B))$,
> - $\det(W_1(A, B)v_i \mid W_2(A, B)v_j) \quad (i, j \in \{1, 2\})$,
>
> で生成される，ただし，$W_k(A, B)$ は A, B に関する任意の語 (word) を表す．

この symbolic method の与える基本不変式系はアプリオリには無限個の不変式からなる不変式環の生成系である．もちろん，$SL(Q)$ は簡約群であるので，Hilbert の定理によればこのなかの高々有限個で求める不変式環は生成されているが，symbolic method は基本不変式の有限集合をどのぐらい大きくとれば不変式環が既に生成されるかについての上界を与えない（この生成系のエフェクティブな上界を与える問題は古典不変式論において難しい問題であるらしい）．

しかし，我々の場合には，行列 (A, B) は関係式 $[A, B] = O, A^2 = AB = B^2 = O$ を満たしているので，そこから誘導される基本不変式の間の関係式（ほ

とんどの場合は 0 になってしまう）のおかげで，symbolic method が与える $SL(Q)$-不変式の生成系はもともと有界である．すなわち，$SL(Q)$-不変式は

$$z_1 = f_1,\ z_2 = f_2$$
$$z_3, z_7 = \det(Av_i \mid v_i) \quad (i = 1, 2)$$
$$z_4, z_8 = \det(Bv_i \mid v_i) \quad (i = 1, 2)$$
$$z_5 = \det(Av_1 \mid v_2),\ z_6 = \det(Bv_2 \mid v_2)$$

の多項式として書けることが確かめられる．これらの不変式の指標に関するウエイトを計算すれば

	$\det_V$	$\mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}(b)$	$\mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}(c)$	$\det_Q$
z_1	-1	0	0	1
z_2	-1	1	1	0
z_3	-2	2	0	1
z_4	-2	2	0	1
z_5	-2	1	1	1
z_6	-2	1	1	1
z_7	-2	0	2	1
z_8	-2	0	2	1

従って，G_γ,χ-半不変式環 $A(Y_\gamma)^{G_\gamma,\chi}$ は

$$u_0 = z_1 z_2,\ u_1 = z_5,\ u_2 = z_6 \tag{3}$$
$$z_3 z_7,\ z_3 z_8,\ z_4 z_7,\ z_4 z_8$$

で生成されることがわかった．

最後にこれらの間の関係式を求める．不変式の間の関係式は，準同形の合成

$$\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_8] \twoheadrightarrow A(Y_\gamma)^{SL(V)\times SL(Q)} \hookrightarrow A(Y_\gamma)$$

の核で与えられる．準同形の核，より一般に準同形によるイデアルの逆像を求める問題は古典代数学の消去法の問題であり，Gröbner 基底の辞書式順序に関する消去の性質を用いることで，コンピューターに計算させることができるが，それによれば，関係式は

$$z_4 z_5 - z_3 z_6,\ z_6 z_7 - z_5 z_8,$$
$$z_5 z_6 - z_3 z_8,\ z_4 z_7 - z_3 z_8,$$
$$z_5^2 - z_3 z_7,\ z_6^2 - z_4 z_8$$

の 6 つで生成される．この関係式が生成系 (3) に誘導する関係式をみれば，結局次数環としての同形

$$A(Y_\gamma)^{G_\gamma,\chi} \cong \mathbb{C}[u_0, u_1, u_2]$$

が得られて，$B_\gamma \cong \mathbb{P}^2$ が結論される．

なお，定理 5 は $\widetilde{M}$ の M^{DU} 上の双有理幾何への応用が強く期待され，これが定理 5 の主な動機付けの一つになっているのだがこの部分はまだ研究が進行中であるのでここに多くを記すことは差し控えたい．

参考文献

[B] Beauville, A., *Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle*, J. Diff. Geom. **18** (1983), No.4, 775-782.

[E-L] Ellingsrud, G., Lehn, M., *Irreducibility of the punctual quotient scheme of a surface*, Ark. Mat. **37** (1999), 245–254.

[H-L] Huybrechts, D., Lehn, M., *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*, Aspects of Mathematics, E31. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig (1997).

[K] Kirwan, F., *Partial desingularizations of quotients of nonsingular varieties and their Betti numbers*, Ann. Math. **122** (1985), 41-85.

[L-S] Lehn, M., Sorger, C., *La singularité de O'Grady*, J. Alg. Geom., **15** (2006), 753-770.

[Mu] Mukai, S., *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surface*, Invent. Math. **77** (1984), 101-116.

[Mo] Mozgovoy, S., *The Euler number of O'Grady's 10-dimensional symplectic manifold*, Ph.D. thesis, University of Mainz (2006)

[OG] O'Grady, K.G., *Desingularized moduli spaces of sheaves on a K3*, J. Reine Angew. Math. **512** (1999), 49-117.

[P] Perego, A., *The 2-Factoriality of the O'Grady Moduli Spaces*, preprint `arXiv:0903.3211` (2009).

[R] Rapagnetta, A., *On the Beauville form of the known irreducible symplectic varieties*, Math. Ann. **340** (2008), 77-95.