代数幾何学シンポジウム記録
2009年度 pp.60-64

前射影多元環の傾理論

伊山 修

多元環の表現論とは, 環上の加群圏の構造を調べるものである. 70 年代に Auslander-Reiten によって, 整環上の Cohen-Macaulay 加群に対して, 今日 Auslander-Reiten 理論と呼ばれる理論が構成された. (原論文 [A, A2] および, 概説 [I, Section 3.1] を参照.) 特に以下の場合が良く調べられている.

- 体上の有限次元多元環上の有限次元加群 [ASS, ARS].
- 完備離散付値環上の整環上の格子 [CR1, CR2].
- 可換 Cohen-Macaulay 環上の Cohen-Macaulay 加群 [Y].

多元環の表現論において重要な例は, 幾何的な背景を持つ場合がしばしばある. 例えば, 直既約 CM 加群が同型を除いて有限個しか存在しない整環を**有限表現型**と呼ぶが, 単純特異点は有限表現型の基本的な例である.

Auslander-Reiten 理論と同様に重要な理論に, 傾理論がある. 傾対象をもつ代数的三角圏は, その自己準同型環上の導来圏として実現される. 代数多様体の導来圏が傾対象を持つ場合には, その自己準同型環が興味深い性質を持つ場合がしばしばある.

例えば射影空間 $\mathbb{P}^n$ の傾対象 $T = \mathcal{O} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(n)$ の自己準同型環は Beilinson 多元環と呼ばれるが, 中でも $n = 1$ の場合は Kronecker 多元環と呼ばれ, tame 表現型多元環の基本的な例として古くから知られている. 最近では表現次元の研究において, Beilinson 多元環が有用なサンプルを提供した.

別の例では, 商特異点 k^n/G の特異点解消 $X \to k^n/G$ に対して, X とねじれ群環 $k[x_1, \cdots, x_n] * G$ が導来圏同値となる場合があり, McKay 対応と呼ばれる. 特に $n = 2$ の場合, ねじれ群環 $k[x_1, x_2] * G$ は前射影多元環よばれる多元環と森田同値になるが, 最近では団傾理論において重要な役割を果たしている.

団傾理論は, 近年盛んに研究されているものであり, 以下の側面を持つ.

- 団代数の圏論化.
- 傾理論の 2-Calabi-Yau 類似.
- Auslander-Reiten 理論の高次元類似.

本稿では傾理論を前射影多元環の場合に解説し, 団傾理論については割愛する.

なお quiver（クイバー, 矢筒）は**箙**, cluster（クラスター）は**団**, tilting（傾斜）は**傾**との訳語を用いる.

1. 傾対象

森田理論は, アーベル圏を環上の加群圏として実現する. 一方その発展形である傾理論は, 三角圏を環上の導来圏として実現する. 傾理論では, 次の概念が基本的な役割を果たす.

定義 1.1. $\mathcal{T}$ を三角圏とする. 対象 $T \in \mathcal{T}$ が以下の条件を満たすときに**傾対象**と呼ぶ.

- 任意の $i \neq 0$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T[i]) = 0$.
- 直和因子で閉じた $\mathcal{T}$ の三角部分圏で, T を含むものは $\mathcal{T}$ のみである.

最も基本的な例をあげる. 環 R に対して, 有限生成射影 R-加群の圏 $\mathrm{proj}\, R$ 上の有界複体のホモトピー圏

$$\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$$

は, 傾対象 Λ を持つ. 傾理論の一つの基本定理は, $\mathcal{T}$ に適当な仮定をつけるとこの逆が成立するというものであり, 以下の定式化は Keller によるものである [K, '94].

定理 1.2. $\mathcal{T}$ が代数的三角圏, $T \in \mathcal{T}$ が傾対象であれば, 三角同値 $\mathcal{T} \simeq \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\mathrm{End}_{\mathcal{T}}(T))$ が存在する.

ただし三角圏 $\mathcal{T}$ が**代数的**であるとは, あるフロベニウス圏の安定圏と三角同値である事を意味する. 詳しくは [H] を参照.

$\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ の傾対象を Λ の**傾複体**とよぶ. 上の定理の応用として, 次の有名な Rickard の定理が得られる.

定理 1.3. [R, '89] 環 Λ, Γ に対して, 以下の条件は同値.

(a) $\mathsf{D}(\mathrm{Mod}\,\Lambda)$ と $\mathsf{D}(\mathrm{Mod}\,\Gamma)$ は三角同値.
(b) $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)$ と $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Gamma)$ は三角同値.
(c) Λ の傾複体 T で $\mathrm{End}_{\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}\,\Lambda)}(T) \simeq \Gamma$ となるものが存在する.

ただし $\mathsf{D}(\mathrm{Mod}\,\Lambda)$ は Λ-加群の圏 $\mathrm{Mod}\,\Lambda$ の導来圏を表す.

傾対象を用いて三角圏の構造を分析する事ができる. 実は, 傾対象は組み合わせ的観点からはあまり良いものではない事が, 変異と呼ばれる操作を考えることにより分かる. 改良としては以下の二つの方向がある.

- 傾対象を一般化した**準傾対象**を扱う. [AI] 参照.
- 傾対象の特別なクラスである傾加群を扱う.

本稿では傾加群を扱う. これは箙の表現の**鏡映関手**を公理化したものであり, 以下で定義される.

定義 1.4. [BB, '80] 環 Λ 上の加群 T が以下の条件が満たすときに**傾加群**とよぶ.
(i) 完全列 $0 \to P_1 \to P_0 \to T \to 0$ $(P_0, P_1 \in \mathrm{proj}\,\Lambda)$ が存在する.
(ii) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,T) = 0$.
(iii) 完全列 $0 \to \Lambda \to T_0 \to T_1 \to 0$ $(T_0, T_1 \in \mathrm{add}\,T)$ が存在する.

ここで $\mathrm{add}\,T$ は, T の 有限直和 $T \oplus \cdots \oplus T$ の直和因子全体を表す. 傾加群とは, 射影次元が 1 以下の加群で, 導来圏で傾複体と同型となるものに他ならない事が分かる.

2. 傾変異

Λ-加群 T が**基本的**であるとは, 直既約加群への直和分解 $T \simeq T_1 \oplus \cdots \oplus T_m$ で, T_1 から T_m が互いに非同型となるものが存在する事を意味する.

基本的傾 Λ-加群の同型類のなす集合を

$$\mathrm{tilt}\,\Lambda$$

と表す. Riedtmann-Schofield [RS, '91] 以降, Happel-Unger をはじめ多くの研究者によって $\mathrm{tilt}\,\Lambda$ の持つ組み合わせ的構造が調べられてきた. 中でも重要な要素として

- 半順序
- 変異

の二つがあげられる. 半順序の定義は極めて簡単である.

定義 2.1. $T, U \in \mathrm{tilt}\,\Lambda$ に対し $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,U) = 0$ である時に $T \geq U$ と定める.

定義からは明らかではないが, 以下が成立する.

命題 2.2. [RS, '91] $(\mathrm{tilt}\,\Lambda, \geq)$ は半順序集合をなす.

$\geq$ を傾複体 T, U からそれぞれ生じる導来圏の t-構造の間の包含関係と捉える事が, 大雑把な証明のアイデアである.

一方の変異を定義するには若干の準備が必要である.

一般に Λ-加群 U, V が与えられたとき, 射 $f : U' \to V$ で以下の条件を満たすものが存在する.

- $U' \in \mathrm{add}\,U$,
- $\mathrm{Hom}_\Lambda(U,U') \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}_\Lambda(U,V)$ は全射.

この時, f を V の**右 U-近似**とよぶ.

V の右 U-近似の中には, 次の条件を満たすものがただ一つ存在し, それを**最小右 U-近似**とよぶ.

- $g \in \mathrm{End}_\Lambda(U')$ が $f = fg$ を満たせば, g は同型である.

双対的に**(最小)左 U-近似**も定義する.

定義 2.3. $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ を基本的傾 Λ-加群とする. $k = 1, \cdots, n$ を固定し $U = \bigoplus_{i \neq k} T_i$ とおく. 最小右 U-近似 $f : U' \to T_k$ および最小左 U-近似 $f : T_k \to U''$ をとる.
(a) f が全射のときに $\mu_k^-(T) := (\mathrm{Ker}\,f) \oplus U$ とおき, T の**右変異**とよぶ.
(b) f が単射で $\mathrm{Cok}\,f$ の射影次元が 1 以下のときに $\mu_k^+(T) := (\mathrm{Cok}\,f) \oplus U$ とおき, T の**右変異**とよぶ.
(c) 右変異と左変異を合わせて**変異**とよぶ.

(b) の「射影次元 1 以下」の条件に右と左で若干の非対称が見られるが, 次節で扱う前射影多元環などの良い多元環の場合には, 自動的に満たされる事を注意しておく.

さて変異の重要性は次の結果にある.

命題 2.4. [RS, '91]

(a) T の変異も基本的傾 Λ-加群である.
(b) $\mu_k^-(T) > T$ および $T > \mu_k^+(T)$ が成立する.

さらに変異と半順序の間には, 次の定理で与えられる関係がある.

定理 2.5. [HU, '05] $T, T' \in \operatorname{tilt}\Lambda$ に対して以下の条件は同値.

(a) $T > T'$ かつ, $T > T'' > T'$ となる $T'' \in \operatorname{tilt}\Lambda$ は存在しない.
(b) T' は T の左変異.
(c) T は T' の右変異.
(d) $T > T'$ かつ, T と T' の直和因子は一つを除いて一致する.

簡単な例を一つ与えておく.

例 2.6. $\Lambda = \begin{bmatrix} k & k & \cdots & k \\ 0 & k & \cdots & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$ を体 k 上の n 次の三角行列環とする. A_n 型箙の道多元環とみなす事もできる.

$\operatorname{tilt}\Lambda$ には, 以下で与えられる簡単な記述がある. まず, $0, 1, \cdots, n+1, n+2$ を時計回りに頂点とする凸 $(n+3)$ 角形を考える. 頂点 i と j を結ぶ対角線を (i, j) で表す.

対角線の集合 S が**非交叉分割**であるとは, 以下の条件が満たされる事である.

- S に含まれるどの 2 本の対角線も, 端点以外で交叉しない.
- S に含まれる対角線によって, 正 $(n+3)$ 角形が三角形に分割されている.

このとき全単射

$$\{S \mid S \text{ は非交叉分割で}, (0, n+1) \notin S\} \to \operatorname{tilt}\Lambda$$

が, 対応

$$S \mapsto \bigoplus_{(i,j)\in S} {}^t[0 \cdots \overset{i}{0} \overset{i+1}{k} \cdots \overset{j-1}{k} \overset{j}{0} \cdots 0]$$

により与えられる.

3. 前射影多元環上の傾加群

この節は [IR, BIRS] に従う. $Q = (Q_0, Q_1)$ を箙とする. Q_0 で頂点の集合, Q_1 で矢印の集合を表す. 以下では Q がループ（始点と終点の一致する矢印）を持たないと仮定する.

定義 3.1. 新しい箙 $\overline{Q}$ を, Q の各矢印 $a : i \to j$ に対して逆向きの矢印 $a^* : j \to i$ を加える事によって定める. $\overline{Q}$ の道多元環 $k\overline{Q}$ の元

$$m := \sum_{a \in Q_1} (aa^* - a^*a)$$

によって生成されるイデアルによる剰余多元環

$$\Pi_Q := k\overline{Q}/\langle m \rangle$$

を**前射影多元環**と呼ぶ. これは自然に次数つき多元環の構造を持ち, その完備化を $\widehat{\Pi}_Q$ で表す.

命題 3.2. π が有限次元である必要十分条件は, Q がディンキン図形である事.

$\Lambda = \widehat{\Pi}_Q$ を完備前射影多元環とする. この時, 単位元の冪等元分解

$$1 = \sum_{i \in Q_0} e_i$$

が生じる. 各 $i \in Q_0$ に対して Λ のイデアル I_i を

$$I_i := \langle 1 - e_i \rangle$$

により定める.

命題 3.3. (a) $\mu_k^+(\Lambda) = I_k$.
(b) I_k は傾 Λ-加群.

補題 3.4. 任意の Q の頂点の列 $i_1, \cdots, i_\ell$ に対して, イデアルの積 $I_{i_1} \cdots I_{i_\ell}$ は傾 Λ-加群.

頂点 i と j の間の Q の矢印の本数を m_{ij} で表す. この時, イデアル I_i の間に次の関係式が存在する事が, 簡単な計算によって確かめられる.

補題 3.5. $i, j \in Q_0$ に対して以下が成立する.
- $I_i^2 = I_i$.
- $m_{ij} = 0$ ならば $I_i I_j = I_j I_i$.
- $m_{ij} = 1$ ならば $I_i I_j I_i = I_j I_i I_j$.

これらの関係式から, 前射影多元環とコクセター群の関係が明らかになる. ただし, Q の**コクセター群** W とは, 生成元 s_i $(i \in Q_0)$ と関係式
- $s_i^2 = 1$.
- $m_{ij} = 0$ ならば $s_i s_j = s_j s_i$.
- $m_{ij} = 1$ ならば $s_i s_j s_i = s_j s_i s_j$.

により与えられる群である.
イデアル I_i $(i \in Q_0)$ の積として表されるイデアル全体を $\langle I_i \rangle_{i \in Q_0}$ で表す.

定理 3.6. [IR, BIRS]
(a) 全単射 $W \to \langle I_i \rangle_{i \in Q_0}$, $w \mapsto I_w$ が存在する. それは $w \in W$ の最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ に対し, $I_w := I_{i_1} \cdots I_{i_\ell}$ とおいて得られる.
(b) $W \to \operatorname{tilt} \Lambda$, $w \mapsto I_w$ は単射であり, さらに Q が拡大ディンキン箙ならば全単射である.

最後に $\operatorname{tilt} \Lambda$ の半順序が, コクセター群の半順序として自然に与えられる事を示す.

定義 3.7. $w, w' \in W$ に対して
(i) $w' = ww''$ に対して $\ell(w') = \ell(w) + \ell(w'')$ が成立するとき $w \leq_R w'$ と表す.
(ii) $w' = w'''w$ に対して $\ell(w') = \ell(w''') + \ell(w)$ が成立するとき $w \leq_L w'$ と表す.
$\leq_R$ により与えられる W の半順序を**右順序**, $\leq_L$ により与えられる W の半順序を**左順序**と呼ぶ.

このとき以下が成立する.

命題 3.8. (1) I_w の変異は I_{ws_i} $(i \in Q_0)$ で与えられる.
- $\ell(w) < \ell(ws_i)$ ならば I_{ws_i} は I_w の左変異.
- $\ell(w) > \ell(ws_i)$ ならば I_{ws_i} は I_w の右変異.

(2)
- $<_R$ は $\operatorname{tilt} \Lambda$ の半順序を制限したもの.
- $<_L$ は $\operatorname{tilt} \Lambda^{\mathrm{op}}$ の半順序を制限したもの.

References

[AI] T. Aihara, O. Iyama *Silting mutation in triangulated categories*, in preparation.

[ASS] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory*, London Mathematical Society Student Texts, 65. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[A] M. Auslander, *Functors and morphisms determined by objects*, Representation theory of algebras (Proc. Conf., Temple Univ., Philadelphia, Pa., 1976), pp. 1–244. Lecture Notes in Pure Appl. Math., Vol. 37, Dekker, New York, 1978.

[A2] M. Auslander, *Isolated singularities and existence of almost split sequences*, Representation theory, II (Ottawa, Ont., 1984), 194–242, Lecture Notes in Math., 1178, Springer, Berlin, 1986.

[A3] M. Auslander, *Rational singularities and almost split sequences*, Trans. Amer. Math. Soc. **293** (1986), no. 2, 511–531.

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalo, *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **36**. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[BB] S. Brenner, M. C. R. Butler, *Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors*, Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979), pp. 103–169, Lecture Notes in Math., 832, Springer, Berlin-New York, 1980.

[BIRS] Buan A., Iyama O., Reiten I., Scott J. *Cluster structures for 2-Calabi-Yau categories and unipotent groups*, Compos. Math. 145 (2009), no. 4, 1035–1079.

[CR1] C. W. Curtis and I. Reiner, *Methods of Representation Theory. I. With Applications to Finite Groups and Orders*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1981. C. W. Curtis and I. Reiner,

[CR2] C. W. Curtis and I. Reiner, *Methods of Representation Theory. II. With Applications to Finite Groups and Orders*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1987.

[H] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 119. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[HU] D. Happel, L. Unger, *On a partial order of tilting modules*, Algebr. Represent. Theory 8 (2005), no. 2, 147–156.

[I] O. Iyama, *Auslander-Reiten theory revisited*, Trends in representation theory of algebras and related topics, 349–397, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2008.

[IR] O. Iyama, I. Reiten, *Fomin-Zelevinsky mutation and tilting modules over Calabi-Yau algebras*, Amer. J. Math. 130 (2008), no. 4, 1087–1149.

[K] B. Keller, *Deriving DG categories*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 27 (1994), no. 1, 63–102.

[R] J. Rickard, *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc. (2) 39 (1989), no. 3, 436–456.

[RS] C. Riedtmann, A. Schofield, *On a simplicial complex associated with tilting modules*, Comment. Math. Helv. 66 (1991), no. 1, 70–78.

[Y] Y. Yoshino, *Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 146. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

O. Iyama: Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Chikusa-ku, Nagoya, 464-8602 Japan
E-mail address: iyama@math.nagoya-u.ac.jp