代数幾何学シンポジウム記録
2010年度 pp.46-56

量子コホモロジーにおける K 理論整構造とミラー対称性
(K-THEORY INTEGRAL STRUCTURE IN QUANTUM COHOMOLOGY AND MIRROR SYMMETRY)

入谷 寛
(HIROSHI IRITANI)

Abstract. 多様体 X の量子コホモロジーに対して通常の整構造 $H^*(X;\mathbb{Z})$ とは異なる整構造が多様体の K 群とガンマ類 $\widehat{\Gamma}_X$ によって定められる．本稿ではこの整構造に対する動機づけや基本的な性質，トーリック Calabi-Yau 超曲面に対する Batyrev ミラー対称性との関係，双有理幾何との関係，高種数理論との関係について述べる．

The K-group and the Gamma class define an integral structure in the quantum cohomology of X which is different from the ordinary integral structure $H^*(X;\mathbb{Z})$. We explain the motivation for this integral structure, a relation to Batyrev's mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces, a relation to birational geometry and higher genus Gromov-Witten theory.

1. Gromov-Witten 不変量と量子コホモロジー

X を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影的多様体[1]とする．Gromov-Witten 不変量とは多様体 X の中の代数曲線を数え上げる不変量であり，次の形に書かれる．

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \rangle_{g,n,d}^X \in \mathbb{Q}, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in H^*(X, \mathbb{Q})$$

これはコホモロジー類 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ についての多重線形関数であり，g は曲線の種数，$d \in H_2(X,\mathbb{Z})$ は次数である．コホモロジー類 α_i の Poincaré 双対なサイクル $A_i \subset X$ をとろう．大雑把に言って，上の不変量は X の中の種数 g，次数 d の node を許す曲線 C であってサイクル $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に交わるものの個数を数えたものである．ただし曲線のモジュライ空間が必ずしも滑らかではなく，またモジュライ空間の点が有限の自己同型を持ちうるため，$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle_{g,n,d}^X$ は α_i が整コホモロジー類である場合も整数とは限らない．Gromov-Witten 不変量は X の複素構造の変形に対して不変であり，ある種のトポロジカルな量であると考えられる．コホモロジー類 α_i や種数 g，次数 d，点の数 n を様々に変えるとき，これは X に付随する無限個の不変量を与える．そこで通常はこれらの不変量の生成関数を考えてその性質を調べる．例えばコホモロジー環上の冪級数 $F^g(t)$

$$F^g(t) = \sum_{n,d} \langle t, \ldots, t \rangle_{g,n,d} \frac{Q^d}{n!}, \quad t \in H^*(X)$$

は種数 g の Gromov-Witten ポテンシャル (または自由エネルギー) と呼ばれる．ここで Q はノビコフ変数と呼ばれる次数に付随する形式的なパラメータである．ここで定義から明らかなように $d \in H_2(X,\mathbb{Z})$ が代数曲線で代表されないとき Gromov-Witten 不変量

京都大学大学院理学研究科 数学教室．

[1]微分幾何では一般のシンプレクティック多様体に対して定義される．近年では滑らかな Deligne-Mumford stack (もしくは symplectic orbifold) についても Gromov-Witten 不変量が定義されている．

は 0 である．従って d に関する和は森錘と呼ばれる $H_2(X)$ 内の錘 (cone) に制限され，F^g は森錘に台を持つ Q の冪級数になっている．

特に種数 0 においては Gromov-Witten ポテンシャルは量子コホモロジーと呼ばれるコホモロジー環の変形族を定める．$\{\phi_i\} \subset H^*(X)$ をコホモロジー群の $\mathbb{C}$ 上の (斉次な) 基底とし，$\{t^i\}$ をそれに付随するコホモロジー群上の座標とする．また $t = \sum_i t^i \phi_i$ でコホモロジー群の一般の点を表す．基底同士の量子積 $\bullet_t$ は次の式で定義される．

$$(\phi_i \bullet_t \phi_j, \phi_k) = \frac{\partial^3 F^0}{\partial t^i \partial t^j \partial t^k}(t) = \sum_{n,d} \langle \phi_i, \phi_j, \phi_k, t, \dots, t \rangle^X_{0,n+3,d} \frac{Q^d}{n!}$$

ここで左辺のペアリング $(\cdot, \cdot)$ は Poincaré ペアリング $(\alpha, \beta) = \int_X \alpha \wedge \beta$ である．Poincaré ペアリングに関する双対基底 $\{\phi^j\}$ (つまり $\int_X \phi_i \wedge \phi^j = \delta_i^j$) をとると上の式は

$$\phi_i \bullet_t \phi_j = \sum_k \frac{\partial^3 F^0}{\partial t^i \partial t^j \partial t^k}(t) \phi^k$$

とも書かれる．この積 $\bullet_t$ は $\mathbb{C}[\![Q]\!]$ 上双線形に拡張され $H^*(X) \otimes \mathbb{C}[\![Q]\!]$ 上にコホモロジー類 t でパラメトライズされる環構造の族を定める．(正確には $t = 0$ の形式的近傍でパラメトライズされる積の族) この積 $\bullet_t$ は超可換かつ結合的であることが知られている．もう少し幾何学的な描像を得るために $t \in H^2(X, \mathbb{C})$ の場合を考えよう．この場合因子公理 (divisor axiom) と呼ばれる次の等式

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, H \rangle^X_{g,n+1,d} = \left(\int_d H \right) \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle^X_{g,n,d}, \quad H \in H^2(X)$$

を用いると $\bullet_t$ は次の形に書けることが分かる．

$$(\phi_i \bullet_t \phi_j, \phi_k) = \sum_d \langle \phi_i, \phi_j, \phi_k \rangle_{0,3,d} e^{\langle d, t \rangle} Q^d$$

ここで $\langle d, t \rangle = \int_d t$ とおいた．これから変数 Q は 2 次コホモロジー類 t に対する e^t と等価であることが分かる．ここでは簡単のため $t \in H^2(X)$ の時を考えたが，一般に Gromov-Witten ポテンシャルにおける変数 Q は余分であり，$t \in H^*(X)$ の $H^2(X)$ 成分 t_2 に対して e^{t_2} と同じ役割を果たす．そこで以下では $Q = 1$ として $\circ_t := \bullet_t|_{Q=1}$ とおこう．すなわち $t \in H^2(X)$ のときは

$$(\phi_i \circ_t \phi_j, \phi_k) = \sum_d \langle \phi_i, \phi_j, \phi_k \rangle_{0,3,d} e^{\langle d, t \rangle}.$$

ここでは 3 点付きで種数 0 の Gromov-Witten 不変量 $\langle \phi_i, \phi_j, \phi_k \rangle_{0,3,d}$ のみが現れ，これは次数 d の正則な球面で ϕ_i, ϕ_j, ϕ_k の Poincaré 双対サイクルに交わるものの数え上げである．次数 $d = 0$ の正則球面は定数写像しかないので，$\langle \phi_i, \phi_j, \phi_k \rangle_{0,3,0}$ は Poincaré 双対サイクルたちの三重交わり点の数，つまり $\int_X \phi_i \wedge \phi_j \wedge \phi_k$ に等しいことが分かる．この $d = 0$ の寄与がちょうど通常のカップ積を与えている．一方 $d > 0$ の寄与はこれに対する「量子変形」と考えることができる．つまり 3 つのサイクルは古典的には交わらないが正則な球面を介して (閉じた弦を媒介して) 量子的に交わっていると思うのである．以上の議論から次の極限

$$e^{\langle d, t \rangle} \longrightarrow 0, \quad \forall d \neq 0\colon\ \text{effective class}, \quad t \in H^2(X)$$

の下で $\circ_t$ はカップ積に近づく．この極限を極大体積極限 (large volume limit) と呼ぶ．一般には量子積 $\circ_t$ は e^t の形式的冪級数であることしか分からないが，知られている多くの場合には収束する．

2. 整構造の動機付け

量子コホモロジーは複素構造の変形で不変であるという意味でトポロジカルなものであるが，通常のコホモロジーと異なり写像に対する関手性 (functoriality) が素直な形では成り立たない．しかしながら量子コホモロジーは双有理幾何または導来圏の幾何と深い関係があり，ある種の関手性が成り立つことが近年分かってきた．Yongbin Ruan によって提唱された予想によると，二つの双有理同値な多様体 (軌道体でもよい)X, Y が (K 同値，flop, crepant 解消などの) いわゆる crepant な関係 (標準類 K_X, K_Y が「等しい」) にあるとき X と Y の量子コホモロジーはパラメータの解析接続によって同型になる．

$$\Theta_t\colon (H^*(X), \circ_t) \cong (H^*(Y), \circ_{f(t)})$$

ここで量子コホモロジーのパラメータ t に関する解析性は仮定されている．$f\colon H^*(X) \to H^*(Y)$ はパラメータの間の変数変換であり，Θ_t は環同型である．ここでパラメータの間の写像 f の下で X の極大体積極限は Y のそれに写されるわけではなく，解析接続が真に必要な状況となっている．もともとの Ruan の予想では単に環同型があるというだけでその同型 Θ やパラメータの変換写像 f がどのように (関手的に) 定まるのか，という点については余り明らかではなかった．これが整構造を考える一つの動機である．我々は Tom Coates, Hsian-Hua Tseng 氏との研究 [8] において，この解析接続を環のレベルではなく量子 D 加群とよばれる微分方程式系のレベルでとらえるとより明確に理解できることを示していた[2]．我々の整構造を用いるとこの D 加群の同型が誘導する (各々の極大体積極限のまわりの) 局所解空間の間の同型が「関手的に」X と Y の間の導来同値から定まると予想される．

上の動機とも重複があるが，もう一つの動機はミラー対称性である．一般に Calabi-Yau 多様体[3]に対するミラー対称性を考えよう．X, Y を Calabi-Yau 多様体のミラー対とする．X 側では A 模型 (シンプレクティック幾何)，Y 側で B 模型 (複素幾何) を考えよう．B 模型側では Y の複素構造の変形族 Y_u (たとえば倉西族) を考える．ここで u は変形のパラメータである．この変形に付随して中間次元のコホモロジー $H^{\dim Y_u}(Y, \mathbb{C})$ 上には次の Hodge 構造の変動が定まる．

$$H^{\dim Y_u}(Y_u, \mathbb{C}) = F_{\mathrm{B}}^0 \supset F_{\mathrm{B}}^1 \supset \cdots \supset F_{\mathrm{B}}^{\dim Y_u} \supset 0, \quad F_{\mathrm{B}}^p = \bigoplus_{j \geq p} H^{j, \dim Y_u - j}(Y_u). \tag{1}$$

ここでベクトル空間 $H^{\dim Y_u}(Y_u, \mathbb{C})$ は u によらず互いに同一視されるが，減少フィルター F^p は u に依存している．$H^{\dim Y_u}(Y_u, \mathbb{C})$ が u によらない，ということを別の言い方で言うと，コホモロジー束 $\bigcup_u H^{\dim Y_u}(Y_u, \mathbb{C})$ には Gauss-Manin 接続と呼ばれる平坦接続 ∇ が与えられている．さらに減少フィルターは Griffiths 横断性 $\nabla F_{\mathrm{B}}^p \subset F_{\mathrm{B}}^{p-1}$ を満たす．一方，A 模型側では量子コホモロジーに付随する次の A 模型 Hodge 構造の変動が定まる．

$$H^{*,*}(X, \mathbb{C}) = F_{\mathrm{A}}^0 \supset F_{\mathrm{A}}^1 \supset \cdots \supset F_{\mathrm{A}}^{\dim X} \supset 0, \quad F_{\mathrm{A}}^p = \bigoplus_{j \leq \dim X - p} H^{j,j}(X). \tag{2}$$

[2]このこと自体はミラー対称性の観点や物理の人たちにとっては当然明らかなことであった．我々はパラメータの変換写像 f が非線形になり Θ_t が t に依存する例を見出した．

[3]ここで Calabi-Yau 多様体とは滑らかな射影代数多様体であって K_X が自明であるものを指す．

A 模型におけるパラメータは複素化された Kähler パラメータ $t \in H^{1,1}(X)$ であるが，上に現れる $H^{*,*}(X,\mathbb{C})$ およびフィルター F_{A}^p は t に依存していないように見える．実は A 模型 Hodge 構造の変動においては，平坦接続 ∇ が t に非自明に依存する．

$$\nabla^{\mathrm{A}} = d + \sum_{\phi_i \in H^{1,1}(X)} (\phi_i \circ_t) dt^i \tag{3}$$

ここで $(\phi_i \circ_t)$ は ϕ_i と量子積をとる線形写像である．この接続 ∇^{A} は Dubrovin 接続と呼ばれる．ミラー対称性によれば，あるミラー写像 $u \mapsto t = t(u)$ が存在して上の二つの Hodge 構造の変動 (1), (2) は同型になると予想されている．Hodge 構造の変動の観点からは A 模型側には実は構造として一つ欠けているものがある．B 模型においては Gauss-Manin 接続に関して平坦な整数上の局所系 $H^{\dim Y_u}(Y_u,\mathbb{Z})$ が存在する．一方で A 模型において対応する整数上の局所系 (整構造) は自明には存在していない．実はホモロジカルミラー

	A 模型	B 模型
空間	X	Y
モジュライ	複素化された Kähler モジュライ	複素構造のモジュライ
Hodge 構造	$F_{\mathrm{A}}^p = \bigoplus_{j \le \dim X - p} H^{j,j}(X)$	$F_{\mathrm{B}}^p = \bigoplus_{j \ge p} H^{j,\dim Y_u - j}(Y_u)$
平坦接続	Dubrovin 接続	Gauss-Manin 接続
$\mathbb{Z}$ 上の局所系	$(D\,\mathrm{Coh}(X) \rightsquigarrow)\ K(X)$?	$(D\,\mathrm{Fuk}(Y) \rightsquigarrow)\ H^{\dim Y_u}(Y_u,\mathbb{Z})$

対称性に基づいた次の議論によって A 模型における整構造が導来圏あるいは K 群から来ることが予想できる．ここでは A 模型と B 模型の役割を逆にして X に対して B 側，Y に対して A 側を考える．ホモロジカルミラー対称性によると，X 上の連接層の導来圏 $D\,\mathrm{Coh}(X)$ (B-brane の圏) と Y の導来深谷圏 $D\,\mathrm{Fuk}(Y)$ (A-brane の圏) が三角圏として同値であると予想される．深谷圏は Lagrange 部分多様体を対象とし，その間の Floer コホモロジーを射とする圏である．その対象である Lagrange 部分多様体のホモロジー類は $H_{\dim Y_u}(Y_u,\mathbb{Z})$ の局所定数な切断を与える．その上で正則体積形式 ($F^{\dim Y_u} = H^{\dim Y_u,0}(Y_u)$ の切断) を積分したものが周期であり，これは Hodge 構造の変動を測っている．この事実のミラーを考えれば X の導来圏の対象である連接層が Dubrovin 接続に関して平坦な切断を与え，さらに A 模型における「周期」を定めることが予想される．

ここで A と B を逆にした理由は，例えば B-brane(連接層) であればそれは Kähler 構造の取り方によらず，A 模型のモジュライ (Kähler モジュライ) の上で「定数」なもの (平坦切断) を与えると考えられるからである．一方 B-brane の圏 (導来圏) の言葉では A 模型のモジュライは B-brane に対する安定性条件 (stability condition) のなす空間と解釈することもできる．導来圏に対する安定性条件のなす空間は Bridgeland [5] により定義され，数値的 K 群と同じ次元の有限次元の複素多様体になる．そこで量子コホモロジーが解析接続される空間はこの Bridgeland の安定性条件の空間と同一視できるのではないか，という期待がある．Bridgeland の空間は最初から大域的なものであり，上に述べた Ruan の予想とかかわっている．また量子コホモロジーにおける整構造 ($\mathbb{Z}$ 上の局所系) の存在はモノドロミーが $\mathbb{Z}$ 上定義されていることを意味する．これはミラーの存在を認めれば自明であるが，Gromov-Witten 理論の立場からは全く非自明なことである．導来圏の言葉では量子コホモロジーにおけるモノドロミーは導来圏の自己同値群 $\mathrm{Auteq}(D\,\mathrm{Coh}(X))$ から引き起こされていると予想される．

また我々が次節で導入する整構造は Borisov-Horja [4] および細野 [13] により超幾何関数の言葉ではすでに得られていたものである．Borisov-Horja はトーリック Calabi-Yau$X$

に付随する GKZ 系の解空間を $K(X)$ と同一視し，さらに GKZ 系の解析接続が K 群のフーリエ向井変換と同一視されることを示した．また細野は超幾何関数を用いて A 模型における周期の予想を与えた．

3. 量子 D 加群の整構造

本稿では簡単のため，X が Calabi-Yau 多様体の場合に議論を限ることにする．さらに量子積のパラメータ t は $H^{1,1}(X)$ に制限する．(従って本節での量子 D 加群は小量子 D 加群と呼ぶべきものである．) 本節の内容は一般の滑らかな Deligne-Mumford stack X に対しても定式化することができる [15, 18]．量子積 $\circ_t$ が極大体積極限のある近傍 $U \subset H^{1,1}(X)$ で収束し解析的であると仮定する．自明なベクトル束 $\mathscr{H} = H^{*,*}(X) \times U \to U$ に平坦接続 (3) を入れたものを量子 D 加群と呼ぶ．自明束 $\mathscr{H}$ には次のペアリングが定まり ∇^{A} に関して平坦である．

$$Q(\alpha, \beta) = (2\pi\mathbf{i})^{\dim X} \int_X ((-1)^{\frac{\deg}{2}} \alpha) \wedge \beta.$$

ここで $(-1)^{\frac{\dim}{2}}$ は $H^{p,p}(X)$ に $(-1)^p$ で作用するコホモロジー群の自己準同型である．このペアリングは $\dim_{\mathbb{C}} X$ の偶数・奇数に応じて対称あるいは反対称になる．これに式 (2) の Hodge フィルトレーション $F_{\mathrm{A}}^{\bullet}$ を加えた 4 つ組 $(\mathscr{H}, \nabla^{\mathrm{A}}, F_{\mathrm{A}}^{\bullet}, Q)$ は次の Griffiths 横断性と Riemann 双線形関形式を満たす．

$$\nabla^{\mathrm{A}} F_{\mathrm{A}}^p \subset F_{\mathrm{A}}^{p-1} \quad Q(F_{\mathrm{A}}^p, F_{\mathrm{A}}^{\dim X - p + 1}) = 0.$$

この段階では $\mathscr{H}$ の実構造を指定していないので Hodge 分解と Riemann 双線形不等式についてはまだ述べられない．この平坦ベクトル束の平坦切断からなる $\mathbb{Z}$ 上の局所系を定めたい．∇^{A} の任意の平坦切断 $s(t)$ は極大体積近傍の近くで次の漸近的振る舞いをもつ．

$$s(t) \sim e^{-t}\phi \qquad \text{as } e^{\langle d, t\rangle} \to 0 \text{ for all nonzero effective classes } d.$$

ここで $\phi \in H^{*,*}(X)$ はある定数コホモロジー類で e^{-t} はカップ積による t 作用の指数関数である．$e^{-t}\phi$ は Dubrovin 接続 ∇^{A} において量子積 $\circ_t$ をカップ積 $\cup$ に置き換えた接続に関する平坦切断であることに注意しよう．ここでガンマ類と呼ばれる特性類 $\widehat{\Gamma}_X$ を導入する．$\delta_1, \dots, \delta_{\dim X}$ を接束 TX の Chern 根 ($c(TX) = \prod_i (1 + \delta_i)$) とするとき，

$$\widehat{\Gamma}_X := \prod_{i=1}^{\dim X} \Gamma(1 + \delta_i)$$

と定める．右辺の $\Gamma(z)$ はガンマ関数であるが，$z = 1$ で正則なので δ_i で Taylor 展開することができる．また右辺は $\delta_1, \dots, \delta_{\dim X}$ に関して対称なので X のコホモロジー類を定める．実際 Taylor 展開を行うと

$$\widehat{\Gamma}_X = \exp\left(-\gamma c_1(X) + \sum_{k \geq 2} (-1)^k (k-1)! \zeta(k) \operatorname{ch}_k(TX) \right).$$

ここで γ はオイラーの定数，$\zeta(k)$ はリーマンゼータ関数の値である．この式から $\widehat{\Gamma}_X$ は超越的な実コホモロジー類であることが分かる．このガンマ類は軌道体 (orbifold) に対しても拡張され，その場合は twisted sector にも成分をもつ ([15] 参照)．さて以上の議論

から K 群の元 $E \in K(X)$ で $\mathrm{ch}(E) \in H^{*,*}(X)$ となるものに対して ∇ に関する平坦切断 $s_E(t)$ であって，極大体積極限において

$$s_E(t) \sim (2\pi\mathtt{i})^{-\dim X} e^{-t} \left(\widehat{\Gamma}_X \cup (2\pi\mathtt{i})^{\frac{\deg}{2}} \mathrm{ch}(E) \right)$$

となるものが一意に存在する．K 群でパラメトライズされる平坦切断の族 $\{s_E(t) \mid E \in K(X),\ \mathrm{ch}(E) \in H^{*,*}(X)\}$ により $\mathbb{Z}$ 上の局所系 $H_{\mathbb{Z}} \subset \mathrm{Ker}\,\nabla^{\mathrm{A}}$ が定まる．これが我々の考えたい整構造である．この整構造は筆者 [15] と Katzarkov-Kontsevich-Pantev[19] によって独立に導入された．(正確には Katzarkov らは有理数上の構造を考えた．)

この整構造の性質をいくつか述べる．まずこの整構造は極大体積極限のまわりの局所モノドロミーを与える変換 $t \to t + 2\pi\mathtt{i}\xi$, $\xi \in H^2(X,\mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X)$ の下で不変である．(量子積は $e^{\langle d,t \rangle}$ の関数であるのでこの変換の下で ∇^{A} は不変である．) 実際，$\xi = -c_1(L)$ となる直線束 L をとるとき

$$s_E(t + 2\pi\mathtt{i}\xi) = s_{E\otimes L}(t)$$

が成立する．つまり極大体積極限のまわりのモノドロミーは直線束のテンソル積に対応する．次にペアリングに関しては次が成立する．

$$Q(s_{E_1}(t), s_{E_2}(t)) = \chi(E_1, E_2)$$

ここで左辺は平坦切断同士のペアリングであるため t によらない．右辺はオイラーペアリング (向井ペアリング) であり $\sum_i (-1)^i \dim \mathrm{Ext}^i(E_1, E_2)$ で与えられる．この等式は Hirzeburch-Riemann-Roch から従う．要点は $\widehat{\Gamma}_X$ がほぼ Todd 類の 2 乗根になっていることであり，次の関数等式である．

$$\Gamma(1+z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi z}{\sin \pi z} = e^{-\pi\mathtt{i}z} \frac{2\pi\mathtt{i}z}{1 - e^{-2\pi\mathtt{i}z}}.$$

さらに整構造 $H_{\mathbb{Z}}$ は有理構造 $H_{\mathbb{Q}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ および実構造 $H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ を誘導する．実構造に関してはつぎの Hodge 分解および Riemann 双線形不等式が成り立つと予想される．

$$\mathscr{H} = F^p \oplus \overline{F^{\dim X - p + 1}}, \quad \mathtt{i}^{p-q} Q(\phi, \phi) > 0$$

ここで $\phi \in H^{p,q} = (F^p \cap \overline{F^q}) \setminus \{0\}$ であり $q = \dim X - p$ である．これらは極大体積極限の近傍において成立することが知られている [17].

注意 3.1. 論文 [15] では $H^{*,*}(X)$ ではなく $H^{2*}(X)$ をファイバーとする自明束上の Dubrovin 接続を取ったので，位相的 K 群全体により整構造が定まった．一方，代数的量子コホモロジー (Chow 群の量子変形) を考える際には代数的ベクトル束の K 群をとるのが自然であろう．

どうしてこのような整構造が存在するのかという真の理由はまだ分かっていない．筆者はミラー対称性を手掛かりとして上のガンマ類を現象論的に発見したのであるが，ループ空間を使った次の様な説明も与えられる．ここでは Givental の Homological Geometry [9] のアイデアを使う．X のループ空間 $\mathcal{L}X = \mathrm{Map}(S^1, X)$ の普遍被覆 $\widetilde{\mathcal{L}X}$ を考え，部分集合 $\Delta \subset \widetilde{\mathcal{L}X}$ をある正則な円盤の境界値となっているループ全体とする．Givental に従い量子コホモロジーの平坦切断 (の成分) は Δ 上での無限次元の積分で与えられると考えよう．ループを回転させる S^1 作用を $\widetilde{\mathcal{L}X}$ に導入したとき，定数ループたちの集合 X

は Δ の S^1 で固定される部分集合となる．固定集合 X の Δ における法束 $N_{X/\Delta}$ は Fourier 展開により

$$N_{X/\Delta} = \bigoplus_{k>0} TX\, q^k$$

と書けるであろう．ここで q はループのパラメータである．この S^1 同変オイラー類の逆数を考えるとちょうど

$$\frac{1}{e_{S^1}(N_{X/\Delta})} = \frac{1}{\prod_{k>0}\prod_i(\delta_i + kz)} \sim z^{-\frac{\deg}{2}} z^{c_1(X)} \widehat{\Gamma}_X$$

を得る．ここで $\sim$ は無限積の ζ 正則化を表し，z は 1 点の S^1 同変コホモロジーの生成元である．従ってガンマ類は Δ 上の積分における定数ループの寄与と考えることができる．この定数ループの寄与は [9] では無視されていた部分である．また Coates-Givental による量子 Lefschetz 定理 [6] にもガンマ類の片鱗が現れている．これは X 内の完全交差 $Y \subset X$ に対して X の量子コホモロジーと Y のそれとを比較する定理であるが，その 2 つを関係づけるシンプレクティック作用素はちょうど X と Y のガンマ類の商 $\widehat{\Gamma}_X/\widehat{\Gamma}_Y$ に対応するものになっている．

4. ミラー対称性との整合性

前節で述べた整構造が正しいものであることの一つの検証はミラー対称性との整合性である．2 節で述べたようにミラー対称性は Hodge 構造の変動の間の同型を予言するが，この同型の下で K 群から定まる $\mathbb{Z}$ 上の局所系とミラー側の自然な $\mathbb{Z}$ 上の局所系が対応するかどうかが問題となる．$E \in K(X)$ に対応する平坦切断 $s_E(t)$ は A 模型における「A 周期」を次の式で定める．

$$\Pi^X(\phi, E) = Q(\phi(t), s_E(t)), \qquad E \in K(X).$$

ここで $\phi(t)$ は量子 D 加群 $\mathscr{H}$ の切断である．ミラー対称性との整合性はこの A 周期が B 模型における通常の整サイクル上での周期 (Calabi-Yau でないときは振動積分) と一致することから確かめられる．ここで上の A 周期は平坦切断 s_E と切断 ϕ とのペアリングである．ミラーに移ると s_E に対応するものが整サイクルであり，ϕ に対応するものがミラー族の相対 de Rham 形式である．特に $\phi = \mathbf{1}$ の場合，そのミラーは正則体積形式 (あるいは正則な振動形式) である．

以下では X を弱 Fano($c_1(Z) \geq 0$) なトーリック多様体 Z の中の滑らかな Calabi-Yau 超曲面とする．(トーリック軌道体の場合については [18] を見よ．) よく知られているようにトーリック多様体 Z は扇 (fan) の言葉で記述される．$\mathbf{N}_\mathbb{R} = \mathbf{N} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ を扇の入っているベクトル空間とする．$b_1, \dots, b_N$ を扇の一次元錐の原始的な生成元の全体とする．$\Delta \subset \mathbf{N}_\mathbb{R}$ を $b_1, \dots, b_N$ の凸包とする．Batyrev によると X のミラー Y はトーラス $\mathbb{T} = \mathrm{Hom}(\mathbf{N}, \mathbb{C}^\times)$ の中の超曲面

$$Y_u = \left\{ x \in \mathbb{T} \,\middle|\, W_u(x) := \sum_{i=1}^N u_i x^{b_i} = 1 \right\}$$

で与えられる．ここで $x^{b_i}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}^\times$ は b_i の与える $\mathbb{T}$ の指標であり，$u = (u_1, \dots, u_N)$ は複素パラメータ．$\mathbb{T} \cong (\mathbb{C}^\times)^n$ の $\mathbb{C}^\times$ 座標 $(x_1, \dots, x_n)$ を取ると $W_u(x)$ は $x_1, \dots, x_n$ の Laurent 多項式として書ける．ここで $n = \dim \mathbb{T} = \dim Z$ である．(さらに Batyrev は Δ に双対な多面体を使って Y_u の Calabi-Yau コンパクト化も考えた．ただしコンパクト化は一般に商特異点を持つ軌道体になる．) ミラー対称性の下で u は X の Kähler パラメー

タ ($H^{1,1}(X)$ の元) と対応する．これらの場合に Hodge 構造の変動のレベルでミラー対称性が成立することは Givental のミラー定理からほぼ従う [10]．整構造に関しては次が言える．

定理 4.1 ([18])**.** トーリック多様体 Z の K 群の元 $E \in K(Z)$ の X への引きもどし i^*E に関する X の A 周期はミラー Y の対応する整サイクル C_E 上の周期で与えられる．ここで C_E は $W_u(t)$ の消滅サイクルとして得られる．

$$\Pi^X(\mathbf{1}, i^*E)(t(u)) = \frac{1}{F(u)} \int_{C_E \subset Y_u} \Omega_u, \qquad \Omega_u := \frac{\frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_n}{x_n}}{dW_u}. \tag{4}$$

ここで $i\colon Y \to X$ は包含写像で $t = t(u)$ はミラー写像．また $F(u)$ は正則 $n-1$ 形式 Ω_u の規格化因子であり，$(2\pi\mathbf{i})^{\dim Y} F(u)$ は Ω_u のある（モノドロミー不変な）整サイクルの周期として与えられる．

論文 [15] ではトーリック軌道体 Z(Calabi-Yau ではない) に対して同様の結果を得たが，この場合は Z の A 周期が振動積分として書き表される．つまり

$$\Pi^Z(\mathbf{1}, E)(t(u), z) = \int_{G_E} e^{-W_u(x)/z} \frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_n}{x_n}. \tag{5}$$

本稿では説明を省略したが，Calabi-Yau でない場合，A 周期は付加的な変数 z にも依存する．式 (4) は式 (5) のラプラス変換から得られ，G_E は消滅サイクル C_E に対応する Lefschetz の指貫 (Lefschetz thimble) である．先に述べたように超曲面 $X \subset Z$ の量子コホモロジーは量子 Lefschetz 定理で Z の量子コホモロジーから計算できるが，以上の結果は我々の整構造が量子 Lefschetz と整合的であることを示している．

上の結果を整構造付きの Hodge 構造の変動のレベルで定式化することもできる．Y の量子コホモロジーのうち X のコホモロジー類から来る部分 $H^*_{\mathrm{amb}}(Y) = i^*H^*(X)$ は Y の量子積に関して閉じていることが分かり，その部分の定める Hodge 構造の変動を**囲繞 A 模型 VHS** (ambient A-model VHS) と呼ぶことにする．一方，$\mathbb{T}$ 内のアファイン超曲面 Y_u のコホモロジーは Deligne の混合 Hodge 構造を持つが，とくに中間次元のコホモロジーの中で重みが最低の部分 $W_{n-1}(H^{n-1}(Y_u))$ は重みが $n-1 = \dim Y_u$ の Hodge 構造の変動を定める．この部分のコホモロジー類は全て $\mathbb{T}$ 内の Y_u に沿って極を持つ有理微分型式の留数類 (residue class) として得られるので，この Hodge 構造の変動を**留数 B 模型 VHS**(residual B-model VHS) と呼ぶことにする．囲繞 A 模型 VHS には制限写像 $i^*\colon K(Z) \to K(X)$ の像により整構造が導入され，留数 B 模型 VHS には消滅サイクルのなす格子 $\mathrm{Im}(\partial\colon H_n(\mathbb{T}, Y_u; \mathbb{Z}) \to H_{n-1}(Y_u; \mathbb{Z}))$ の Poincaré 双対により整構造が定められる．

定理 4.2 ([18])**.** *囲繞 A 模型 VHS と留数 B 模型 VHS はミラー写像 $t = t(u)$ の下で同型であり，上に述べた整構造はその同型の下で一致する．*

この定理で考えている整構造は本来の整構造とはやや異なり，この結果は完全に満足いくものとは言えない．例えば A 側においては制限で得られる K 群格子 $i^*K(Z)$ は一般には $i^*K(Z) \otimes \mathbb{Q} \cap K(X)$ 内の有限指数の格子になっている．(例えば，X 内の 1 点の構造層 $\mathcal{O}_{\mathrm{pt}}$ は通常 $i^*K(Z)$ に属さない．) 同様に消滅サイクルのなす格子 $\partial H_n(\mathbb{T}, Y_u; \mathbb{Z})$ は $\partial(H_n(\mathbb{T}, Y_u; \mathbb{Z})) \otimes \mathbb{Q} \cap H_{n-1}(Y_u; \mathbb{Z})$ 内の有限指数の格子である．これらのより大きな整格子の一致については今後の課題である．

例 4.3. X が $Z = \mathbb{P}^2$ 内の楕円曲線である場合，ミラーは

$$W_u(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + \frac{u}{x_1 x_2}$$

なる Laurent 多項式を用いて $Y_u = W_u^{-1}(1)$ で与えられる．Y_u は楕円曲線から 3 点を除いたものである．ミラー写像は $u \mapsto (\log u)p$ である．(ここで p は $\mathbb{P}^2$ 上の $O(1)$ の第一 Chern 類．) パラメータを $u > 0$ と取る．このとき $W_u(x)$ の臨界点は $\mathrm{cr}_i = \omega^{-i}(u^{1/3}, u^{1/3})$ $(i \in \mathbb{Z} \mod 3)$ の 3 個である．ここで $\omega = \exp(2\pi \mathbf{i}/3)$．対応する臨界値は $3\omega^{-i}u^{1/3}$ で与えられる．十分小さな正の u に対して図 1 に与えられた消滅路をとる．実の臨界点 cr_0 に

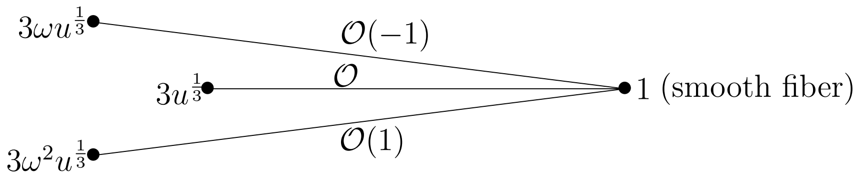

Figure 1. Vanishing Paths

対応する消滅サイクル C_0 は構造層 $i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} = \mathcal{O}_X$ に対応し，それ以外の臨界点 $\mathrm{cr}_{\pm 1}$ からの消滅サイクル $C_{\pm 1}$ は $i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\pm 1)$ に対応する．簡単な計算により，楕円曲線の上の 1-サイクルのなす群の適当な整シンプレクティック基底 A, B に対して次が成立することが分かる．

$$C_0 = A, \quad C_{\pm 1} = A \pm 3B.$$

一方，楕円曲線 X の位相的 K 群においても同様の関係

$$i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} = \mathcal{O}_X, \quad i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\pm 1) = \mathcal{O}_X \pm 3\mathcal{O}_{\mathrm{pt}}$$

が成立しているので，この場合はより大きな格子の間の一致

$$K(X) \cong H_1(\overline{Y_u}; \mathbb{Z})$$

が得られる．ここで $\overline{Y_u}$ は Y_u のコンパクト化として得られる楕円曲線である．

5. 双有理幾何との関係

我々の整構造を使うと，Ruan の予想は次の様な関手的な形で定式化できる．ここでは Calabi-Yau 多様体 (または軌道体) に考察を限定する．(より一般の場合は [16] を見よ)

予想 5.1. [16] 空間 X と Y が導来同値 $(D\,\mathrm{Coh}(X) \cong D\,\mathrm{Coh}(Y))$ であるとする．このときある複素多様体 $\mathcal{M}$ とその上の大域的な量子 D 加群 (A 模型 VHS)$(\mathscr{H}, \nabla^{\mathrm{A}}, F_{\mathrm{A}}^{\bullet}, Q)$ が存在して次が成立する．

- ある開集合 $U_X \subset \mathcal{M}$, $U_Y \subset \mathcal{M}$ が存在して，それら各々の上では $(\mathscr{H}, \nabla^{\mathrm{A}}, F_{\mathrm{A}}^{\bullet}, Q)$ は X または Y の量子 D 加群と同型になる．
- 局所系 $\mathrm{Ker}\,\nabla^{\mathrm{A}}$ の部分 $\mathbb{Z}$ 局所系 $H_{\mathbb{Z}} \subset \mathrm{Ker}\,\nabla^{\mathrm{A}}$ が $\mathcal{M}$ 上大域的に存在して，U_X, U_Y 上では 3 節で述べた K 群から定まる整構造と一致する．
- U_X の点と U_Y の点を結ぶ道 c をとるとき，道 c に沿っての解析接続が K 群に誘導する写像 $\Phi_c \colon K(X) \to K(Y)$ は X と Y の (道 c に応じた) ある導来同値から導かれる．

この予想における $\mathcal{M}$ はミラー対称性が知られているときはミラー側の複素モジュライ空間として得ることができる．ミラー対称性を使わずに $\mathcal{M}$ を得る方法としては前に述べたように導来圏の安定性条件の空間を使う方法が考えられるが，筆者には安定性条件の空間の上にどのように大域的量子 D 加群を構成したらよいかわからない．

また X, Y がトーリック Calabi-Yau であって扇の三角形分割の仕方だけを変更したものであるとき，Borisov-Horja[4] はトーリック Calabi-Yau に付随する GKZ 系の解析接続が K 群の間の Fourier-Mukai 変換によって誘導されることを示していた．トーリック Calabi-Yau に付随する GKZ 系は扇の三角形分割の取り方によらず大域的な D 加群を与えるが，GKZ 系の底空間は X および Y に対応する極限点を持っており，それらの近傍では GKZ 系は X または Y の量子 D 加群に同型になる．従って上の予想はトーリック Calabi-Yau に対しては Borisov-Horja の計算から正しいことが分かる．

またこの予想から $\mathcal{M}$ の基本群と $\mathrm{Auteq}(D\,\mathrm{Coh}(X))$ の間に関係があることが予想される．例えば X が A_n 特異点のクレパント解消である場合，通常の Hori-Vafa ミラーにより与えられる $\mathcal{M}$ の基本群は $\tilde{A}_{n-1} \rtimes \mathbb{Z}_n$ でありこれは $\mathrm{Auteq}(D\,\mathrm{Coh}(X))$ の部分群になっている [7, 14]．($\tilde{A}_{n-1}$ は affine braid 群)

6. 高種数理論における保型性

上の予想は高種数の Gromov-Witten 理論に対しても拡張することができる．ここでは Givental による量子化の形式 [11] を用いて，高種数の理論を種数 0 の理論 (量子コホモロジー) の幾何学的量子化と見なすことにする．一言で言えば，種数 0 の理論 (量子 D 加群) における対称性やモノドロミーが高種数の理論に対して量子化された形で持ち上がると予想される．それから Gromov-Witten ポテンシャルのある種の保型性が従うと考えられる．

予想 5.1 によれば X と Y の量子 D 加群は互いに同型になるが，ある付加的な情報が異なっている．その情報とは opposite subspace と呼ばれる Hodge 構造の分解を与えるデータであり，その変化は K 群の間の写像 Φ_c から読み取ることができる．この opposite subspace は幾何学的量子化において偏極 (polarization) と呼ばれるデータに対応し，それは Heisenberg 代数の既約表現である Fock 空間を定義する．Von-Neumann–Stone の定理により異なる偏極に対応する Fock 空間は射影的に同一視される．大域的量子 D 加群のモノドロミーは opposite subspace すなわち偏極を一般には保たないため，高種数の Gromov-Witten ポテンシャルは関数としてはモノドロミー不変とは言えない．そこで偏極の変化を考えに入れ，異なる偏極に対応する Fock 空間同士を張り合わせたとき，Gromov-Witten ポテンシャルはモノドロミー不変となり Fock 空間を張り合わせた「Fock 層」の一価な切断と見なせると予想される．一方で，整構造の誘導する実構造を考えると，偏極 (opposite subspace) として Hodge 構造の複素共役をとることができる．複素共役から定まる偏極 (holomorphic polarization) は明らかにモノドロミー不変であるため，Gromov-Witten ポテンシャルをこの偏極の下でのポテンシャルに変換したものは関数としてモノドロミー不変になるであろう．ただしこの場合ポテンシャルは正則ではなくなる．以上は物理学者たちのアイデアである [2, 20, 1].

最近筆者は Tom Coates 氏との共同研究においてこのアイデアを数学的に正確にし，局所射影平面 ($K_{\mathbb{P}^2}$ の全空間：非コンパクト Calabi-Yau 多様体) の Gromov-Witten ポテンシャルが quasi-modular function になることを Givental の量子化の形式 (と Teleman による Givental 公式の証明) から導いた．これは Aganagic-Bouchard-Klemm[1] によって予言されていたことである．ここでの保型性は $K_{\mathbb{P}^2}$ のミラーが 3 レベル構造を持つ楕円曲線の族であることから来ている．また modular ではなく quasi-modular になる理由は

先ほど述べたように通常の偏極はモノドロミー不変ではないが，複素共役で定まる偏極がモノドロミー不変になるということからきている．

参考文献

1. M. Aganagic, V. Bouchard, A. Klemm, *Topological Strings and (almost) modular forms.* Comm. Math. Phys., 237 (2003), pp.533–556.
2. M. Bershadsky S. Cecotti, H. Ooguri, C. Vafa *Kodaira-Spence theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes.* Commun. Math. Phys., 165 (1994) pp.311–427.
3. Aaron Bertram, Ionut Ciocan-Fontatnin, Bumsig Kim, *Gromov-Witten invariants for abelian and nonabelian quotients.* J. Algebraic Geom. 17 (2008), no. 2, pp.275–294.
4. L. A. Borisov, R. P. Horja, *Mellin-Barnes integrals as Fourier-Mukai transforms.* Adv. Math. 207 (2006), pp.876–927.
5. Tom Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories* Ann. of Maths. (2), 166 (2007), pp.317–345.
6. Tom Coates, A. B. Givental, *Quantum Riemann-Roch, Lefschetz and Serre.* Ann. of Math. (2), 165 (2007), pp.15–53.
7. Tom Coates, Alessio Corti, Hiroshi Iritani, Hsian-Hua Tseng, *Computing genus zero twisted Gromov-Witten invariants.* Duke Math. J. 147 (2009), no. 3, pp.377–438.
8. Tom Coates, Hiroshi Iritani, Hsian-Hua Tseng, *Wall-Crossings in Toric Gromov-Witten Theory I: crepant examples.* Geom. Topol. 13, 2009, pp.2675–2744.
9. A. B. Givental, *Homological geometry I. Projective hypersurfaces.* Selecta Math. (N.S.) 1 (1995), no. 2, pp.325–345.
10. Givental, Alexander B. *A mirror theorem for toric complete intersections.* Topological field theory, primitive forms and related topics (Kyoto, 1996), pp.141–175, Progr. Math., 160, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998.
11. A. B. Givental, *Gromov-Witten invariants and quantization of quadratic hamiltonians.* Dedicated to the memory of I. G. Petrovskii on the occasion of his 100 anniversary. Mosc. Math. J. 1 (2001), no.4, pp.551–568, 645.
12. Kentaro Hori, Cumrum Vafa *Mirror Symmetry.* arXiv:hep-th/0002222.
13. Shinobu Hosono, *Central charges, symplectic forms, and hypergeometric series in local mirror symmetry.* In: Mirror Symmetry V, AMS/IP Stud. Adv. Math. Phys., 13 (2009), pp.463–495.
14. Akira Ishii, Kazushi Ueda, Hokuto Uehara, *Stability conditions on A_n singularities*, J. Differential Geom. 84 (2010), no. 1, pp.87–126.
15. Hiroshi Iritani, *An integral structure in quantum cohomology and mirror symmetry for toric orbifolds.* Adv. Math., 222 (2009), pp.1016–1079.
16. Hiroshi Iritani, *Ruan's conjecture and integral sturctures in quantum cohomology.* New Developments in Algebraic Geometry, Integrable Systems and Mirror Symmetry (Kyoto 2008), Adv. Stud. Pure. Math. 59, 2010.
17. Hiroshi Iritani, *tt^*-geometry in quantum cohomology.* preprint, arXiv:0906.1367.
18. Hiroshi Iritani *Quantum cohomology and periods.* preprint.
19. Ludmil Katzarkov, Maxim Kontsevich, Tony Pantev *Hodge theoretic aspects of mirror symmetry.* From Hodge theory to integrability and TQFT tt^*-geometry, pp. 87–174, Proc. Sympos. Pure Math., 78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
20. E. Witten, *Quantum background independence in string theory.* Nucl. Phys. B 373, 187 (1992) hep-th.9306122.

〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町
E-mail address: `iritani@math.kyoto-u.ac.jp`