代数幾何学シンポジウム記録
2011年度　pp.142-147

Moduli of oriented orthogonal sheaves on a nodal curve

阿部　健（ABE, Takeshi）

概要

This is a reproduction of my talk at Kinosaki Symposium 2011. We consider a moduli stack of oriented orthogonal sheaves on a nodal curve. We determine the local structure of the moduli stack. We then restrict our attention to a normal-crossing open substack such that its complemet is of codimension ≥ 2. We show the factorization theorem for powers of the determinat line bundle on the open substack.

§1　一般テータ関数の分解定理

C を種数 g の非特異複素射影曲線とし，C 上の階数 n 次数 d の半安定ベクトル束のモジュライ空間を $U_C(n,d)$ で表す．簡単のため普遍ベクトル束 $\mathcal{E}$ が $C \times U_C(n,d)$ 上に存在するとして，$U_C(n,d)$ 上の直線束

$$\Theta := (\det \mathbf{R}p_*\mathcal{E})^\vee \otimes \left(\det \mathcal{E}|_{\{x\}\times U_C(n,d)}\right)^{\otimes(d+n(1-g))/n}$$

を考える．ここで p は射影 $C \times U_C(n,d) \to U_C(n,d)$ で，x は C の固定された点である．階数が 1 の時の類似で，ベクトル空間 $\mathrm{H}^0(U_C(n,d), \Theta^{\otimes l})$ のことを一般テータ関数の空間と呼ぶ．この次元を曲線の退化の手法で計算しようとするときに必要になるのが分解定理と呼ばれるものである．いま C が特異点として結節点 Q を唯一つ持つ既約曲線 C_0 に退化したとする．正規化を $\mathfrak{n} : \tilde{C}_0 \to C_0$ とし，$\{P_1, P_2\} := \mathfrak{n}^{-1}(Q)$ とおく．分解定理は大雑把に言うと次のような同型である．(詳しくは [6],[8],[9] を参照．)

$$\mathrm{H}^0\left(U_{C_0}(n,d), \Theta^{\otimes l}\right) \simeq \bigoplus_{\mu} \mathrm{H}^0\left(ParU^{\mu}_{\tilde{C}_0}(n,d), \Theta^{(l,\mu)}\right) \tag{1}$$

ここで $U_{C_0}(n,d)$ は C_0 上の階数 n 次数 d の半安定捩れなし層のモジュライ空間，$ParU^{\mu}_{\tilde{C}_0}(n,d)$ は点付き曲線 $(\tilde{C}_0; P_1, P_2)$ 上の放物的ベクトル束のモジュライ空間，$\Theta^{(l,\mu)}$

は $ParU^{\mu}_{C_0}(n,d)$ 上のある直線束である．直和の index に出てくる μ は放物ベクトル束の重みに対応する．同型 (1) において，左辺は種数 g に関するのもの，右辺は種数 $g-1$ に関するものであるから，種数に関する帰納法で一般テータ関数の空間の次元を求めようとするとき，この分解定理が役立つ．

さて上では通常のベクトル束のモジュライに対する分解定理を述べたが，この講演の目的は主 SO 束のモジュライに対する類似の分解定理を紹介することである．

具体的な定式化や主定理は次節以降に回して，この節の残りで，なぜ SO 束について興味があるかを述べる．そのために一般テータ関数の空間に対するレベル・ランク双対性を思い出す．C 上の階数が l で行列式束が自明な半安定ベクトル束のモジュライ空間を $SU_C(l)$ で表す．写像

$$\tau : SU_C(l) \times U_C(n, n(g-1)) \to U_C(ln, ln(g-1))$$

をテンソル写像 $(E,F) \mapsto E \otimes F$ とする．$U_C(ln, ln(g-1))$ の因子

$$U_C(ln, ln(g-1)) \supset \Theta := \{G \mid h^0(C,G) \neq 0\}$$

に付随する直線束 $\mathcal{O}(\Theta)$ を τ で引き戻すと $\tau^*\mathcal{O}(\Theta) \simeq \mathcal{L}^{\otimes n} \boxtimes \mathcal{O}(\Theta)^{\otimes l}$ となる．ここで $\mathcal{L}$ は行列式直線束である．切断 $\tau^*\Theta$ によってベクトル空間の双対写像

$$\mathrm{H}^0(SU_C(l), \mathcal{L}^{\otimes n})^{\vee} \to \mathrm{H}^0(U_C(n,d), \mathcal{O}(\Theta)^{\otimes l}) \tag{2}$$

が作れる．次の定理は Belkale[4], Marian-Oprea[7] による．

定理 ((SL_l, GL_n) レベル・ランク双対性)．写像 (2) は同型．

これが最も典型的なレベル・ランク双対性で，これの類似がいくつかある．そのひとつが Beauville[3] による次の定理である．

定理 ((SO_r, SO_2) レベル・ランク双対性)．次の自然な同型がある．

$$\mathrm{H}^0(M_{SO_r}, \mathcal{L})^{\vee} \to \mathrm{H}^0(\mathrm{Jac}^{g-1}(C), \mathcal{O}(\Theta)^{\otimes r}) \tag{3}$$

ここで M_{SO_r} は C 上の半安定主 SO_r 束のモジュライ空間で，$\mathcal{L}$ は行列式直線束．一般テータ関数の空間 $\mathrm{H}^0(M_{SO_r}, \mathcal{L}^{\otimes a})$ の次元は [2] によってシンプレクティックな手法で計算されている．

これらのことより次の疑問が生じる．

- (SO_r, SO_n) レベル・ランク双対性があるか？

- $\mathrm{H}^0(M_{SO_r}, \mathcal{L}^{\otimes a})$ の次元を曲線の退化の手法で証明できないか？

これらの疑問の解決への第一歩としてまず、分解定理を SO 束の場合に作っておくことが必要に思われる．こういうわけで SO 束を考えることになった.

§2 向き付き直交層のモジュライ

C_0 上の直交層とは，C_0 上の捩れなし層 E と非退化対称双線形形式 $\gamma : E \otimes E \to \mathcal{O}_{C_0}$ の組 (E, γ) のこと．ここで「非退化」とは γ が誘導する写像 $E^\vee \to E$ が同型なこと．直交層 (E, γ) の「向き」とは射 $\delta : \wedge^n E \to \mathcal{O}_{C_0}$ で図式

$$\begin{tikzcd}
\wedge^n E \otimes \wedge^n E \arrow[r, "\delta\otimes\delta"] \arrow[d, "\overline{\wedge}^n\gamma"'] & \mathcal{O}_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{C_0} \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathcal{O}_{C_0} \arrow[r, equal] & \mathcal{O}_{C_0}
\end{tikzcd}$$

を可換にするもの．ここで $n = \operatorname{rank} E$ で，$\overline{\wedge}^n\gamma$ は

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \otimes f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \mapsto \det(\gamma(e_i, f_j)).$$

で与えられる.

C_0 上の階数 n の向き付き直交層のモジュライスタックを $M(C_0)$ で表す．$[E] \in M(C_0)$ とする．E の結節点 Q における茎を考えると $E_Q \simeq \mathcal{O}_Q^{\oplus(n-k)} \oplus m_Q^{\oplus k}$ となる．ここで，m_Q は $\mathcal{O}_Q$ の極大イデアル.

命題. (1) k は偶数.

(2) $V \to M(C_0)$ をアトラスとして，$[E]$ 上の点 $e \in V$ をとる．すると同型

$$\hat{\mathcal{O}}_{V,e} \simeq \mathbb{C}[[p_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq k]]/I \hat{\otimes} \mathbb{C}[[z_1, z_2, \ldots]] \tag{4}$$

がある．ここでイデアル I は次の関係式で生成されるもの．P を $k \times k$ 行列 (p_{ij}) とする.

- ${}^tPP = P\,{}^tP = 0$
- $\operatorname{sgn}\binom{J \cup J^c}{[1,k]} \det P_{K \times J} = \operatorname{sgn}\binom{K \cup K^c}{[1,n]} \det P_{K^c \times J^c}$

ここで J, K は集合 $[1, k] := \{1, 2, \ldots, k\}$ の濃度 $k/2$ の部分集合で，$P_{K \times J}$ は成分が p_{ij} $(i \in K,\ j \in J)$ の $k/2 \times k/2$ 行列.

この命題によりモジュライの局所的な構造はわかったことになる．結節点を持つ曲線上の（向き付けのない）直交層のモジュライスタックの局所構造は Faltings[5] によって計算されている．上の命題はそれを向き付きの場合に少し変えたものである．

この命題より，$M(C_0)$ の開部分スタック $M(C_0)^{\leq 1} := \{E \mid k/2 \leq 1\}$ は正規交差スタックになることが分かる[*1]．そこで，$M(C_0)^{\leq 1}$ をその正規化と貼り合わせデータで記述してみる．

$\tilde{C}_0$ 上の階数 n の向き付き直交ベクトル束のモジュライスタックを $M(\tilde{C}_0)$ で表す．$M(\tilde{C}_0)$ 上の直交グラスマン束 $OG \to M(\tilde{C}_0)$ を $[E] \in M(\tilde{C}_0)$ のファイバーが

$$\mathrm{OG}_n(E|_{P_1} \oplus E|_{P_2}) := \{U \subset E|_{P_1} \oplus E|_{P_2} \mid \dim U = n, \text{ isotropic}\}$$

となるものとする．ただし，$E|_{P_1} \oplus E|_{P_2}$ には $((e_1, e_2), (e_1', e_2')) := \gamma(e_1, e_1') - \gamma(e_2, e_2')$ で対称形式を入れておく．直交グラスマンは 2 つの連結成分からなる．$OG_{(+)} \to M(\tilde{C}_0)$ を，ファイバーがその一方の連結成分になるようなものとする．（二つの連結成分のうちどちらを選ぶかはきちんと決めなくてはいけないがここでは詳しく述べない．[1] を参照．）$[(E, U \subset E|_{P_1} \oplus E|_{P_2})] \in OG_{(+)}$ に対して

$$\mathrm{Ker}\,(\mathfrak{n}_* E \to \mathfrak{n}_* E|_Q = E|_{P_1} \oplus E|_{P_2} \to (E|_{P_1} \oplus E|_{P_2})/U)$$

を対応させることにより射 $\rho : OG_{(+)} \to M(C_0)$ が出来る．

$$\rho^{-1}\left(M(C_0)^{\leq 1}\right) = OG_{(+)}^{\leq 1} := \{(E, U \subset E|_{P_1} \oplus E|_{P_2}) \mid \dim U \cap (E|_{P_1} \oplus \{0\}) \leq 1\}$$

となっている．ρ の制限 $\rho^{\leq 1} : OG_{(+)}^{\leq 1} \to M(C_0)^{\leq 1}$ が $M(C_0)^{\leq 1}$ の正規化となっている．

次に貼り合わせデータを見てみる．$OG_{(+)}^{\leq 1}$ の閉部分スタック

$$OG_{(+)}^{=1} := \{(E, U \subset E|_{P_1} \oplus E|_{P_2}) \mid \dim U \cap (E|_{P_1} \oplus \{0\}) = 1\}$$

が $M(C_0)^{\leq 1}$ の特異点集合の $\rho^{\leq 1}$ による逆像である．$[(E, U \subset E|_{P_1} \oplus E|_{P_2})] \in OG_{(+)}^{=1}$ をとり，これが $OG_{(+)}^{\leq 1}$ のどの点と貼り合わせられるか見てみる．$V_1 := U \cap (E|_{P_1} \oplus \{0\})$，$V_2 := U \cap (\{0\} \oplus E|_{P_2})$ とおく．仮定より $\dim V_1 = \dim V_2 = 1$ である．

$E^\flat := \mathrm{Ker}\left(E \to E|_{P_1}/V_1^\perp \oplus E|_{P_2}/V_2^\perp\right)$ とおく．$E^\flat \subset E \simeq E^\vee \subset (E^\flat)^\vee$ という包含関係がある．E の対称双線形形式を $(E^\flat)^\vee$ に拡張すると $\mathcal{O}_{\tilde{C}_0}(P_1 + P_2)$ に値を持つ

[*1] 向き付き直交層のモジュライだから正規交差になる．向きの付いていない直交層の場合は正規交差にならない．

双線形形式 $(E^\flat)^\vee \otimes (E^\flat)^\vee \to \mathcal{O}_{\tilde{C}_0}(P_1+P_2)$ が出来る．点 P_i における茎を考えると，$(E^\flat)^\vee_{P_i}/E^\flat_{P_i}$ は 2 次元ベクトル空間で $\mathcal{O}_{\tilde{C}_0}(P_i)|_{P_i}$ に値を持つ非退化対称双線形形式を持つ．作り方より $E_{P_i}/E^\flat_{P_i}$ は 1 次元 isotropic な部分空間である．2 次元の非退化対称双線形形式は 2 つの isotropic な 1 次元部分空間を持つ．$\tilde{C}_0$ 上のベクトル束 E^ι を $E^\flat \subset E^\iota \subset (E^\flat)^\vee$ で $E^\iota_{P_i}/E^\flat_{P_i}$ が $(E^\flat)^\vee_{P_i}/E^\flat_{P_i}$ の $E_{P_i}/E^\flat_{P_i}$ とは異なる 1 次元 isotropic 部分空間になるようなものとする．すると，$(E^\flat)^\vee$ の双線形形式を E^ι に制限することにより $\gamma^\iota : E^\iota \otimes E^\iota \to \mathcal{O}_{\tilde{C}_0}$ が得られ，(E^ι, γ^ι) は直交ベクトル束になる．また自然な同型 $\det E \simeq \det E^\iota$ があるので，E^ι には E の向きから自然に向きが定まる．さらに，$V_i^\iota = \mathrm{Ker}(E^\iota|_{P_i} \to (E^\flat)^\vee|_{P_i})$ とおくと，自然な同型

$$\frac{V_1^\perp}{V_1} \oplus \frac{V_2^\perp}{V_2} \simeq \frac{V_1^{\iota\perp}}{V_1^\iota} \oplus \frac{V_2^{\iota\perp}}{V_2^\iota}$$

があり，この同型の元，$U/(V_1 \oplus V_2) \simeq U^\iota/(V_1^\iota \oplus V_2^\iota)$ となるように $U^\iota \subset E^\iota|_{P_1} \oplus E^\iota|_{P_2}$ を定める．

対応 $(E, U \subset E|_{P_1} \oplus E|_{P_2}) \mapsto (E^\iota, U^\iota \subset E^\iota|_{P_1} \oplus E^\iota|_{P_2})$ は $OG^{-1}_{(+)}$ に対合を定める．これが貼り合わせデータになる．

§3 SO 版の分解定理

分解定理の SO 版を述べる．簡単のため階数 n が奇数の場合に限る．$n = 2r+1 \geq 3$ とし，自然数 l を固定する．$[E] \in M(\tilde{C}_0)$ に対し

$$Fl(E|_{P_i}) := \{0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_r \subset E|_{P_i} | \dim F_j = j, \text{ isotropic}\}$$

とおく．$\mathbf{Fl} \to M(\tilde{C}_0)$ を $[E] \in M(\tilde{C}_0)$ のファイバーが $Fl(E|_{P_1}) \times Fl(E|_{P_2})$ になるような旗多様体の直積束とする．前節で $OG^{-1}_{(+)}$ の対合を定めたが，その時の作り方を良く見ると，E と $E|_{P_i}$ の 1 次元 isotropic 部分空間から対合を作っていた．点 P_i におけるフィルトレーションの 1 次元フィルターを使うことにより，$\mathbf{Fl}$ にも対合 ι を定められることが分かる．

$\tilde{C}_0 \times \mathbf{Fl}$ 上にはの普遍直交ベクトル束 $\mathcal{E}$ と普遍フィルトレーション

$$\mathcal{E}|_{\{P_i\}\times\mathbf{Fl}} \supset \mathcal{F}_r^{(i)} \supset \cdots \supset \mathcal{F}_1^{(i)} \supset 0$$

がある．射影を $p : \tilde{C}_0 \times \mathbf{Fl} \to \mathbf{Fl}$ とし，$\overrightarrow{q} = (q_1, \ldots, q_r) \in \mathbb{Z}^r$ に対し $\mathbf{Fl}$ 上の直線束 $\mathcal{A}_{\overrightarrow{q}}$ を

$$\mathcal{A}_{\overrightarrow{q}} := (\det \mathbf{R}p_*\mathcal{E})^{\otimes(-l)} \otimes \bigotimes_{i=1,2} \bigotimes_{j=1}^{r} \left(\mathcal{F}_{j-1}^{(i)\perp}/\mathcal{F}_j^{(i)\perp}\right)^{\otimes q_j}$$

と定める．$q_1 = l$ のとき $\mathbf{Fl}$ の対合 ι は直線束 $\mathcal{A}_{\vec{q}}$ への作用に自然に持ち上がることが分かる．よって $q_1 = l$ のときはベクトル空間 $\mathrm{H}^0\left(\mathbf{Fl}, \mathcal{A}_{\vec{q}}\right)$ には ι の作用がある．定理を簡潔に述べるため $q_1 \neq l$ の時はベクトル空間 $\mathrm{H}^0\left(\mathbf{Fl}, \mathcal{A}_{\vec{q}}\right)$ には ι が自明に作用すると約束する．次が SO 版の分解定理である．

定理. $\mathcal{D}$ を $M(C_0)$ 上の行列式直線束とする．次の自然な同型がある．

$$\mathrm{H}^0\left(M(C_0)^{\leq 1}, \mathcal{D}^{\otimes l}\right) \simeq \bigoplus_{l \geq q_1 \geq \cdots \geq q_r \geq 0} \mathrm{H}^0\left(\mathbf{Fl}, \mathcal{A}_{\vec{q}}\right)^{\iota-\mathrm{inv}}$$

参考文献

[1] T. Abe: *Moduli of Oriented Orthogonal sheaves on a nodal curve*, in preparation.

[2] A. Alekseev, E. Minrenken, C. Woodward: *Formulas of Verlinde type for non-symply connected groups*, arXiv:math/0005047

[3] A.Beauville: *Orthogonal bundles on curves and theta functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 56 (2006), no. 5, 1405-1418.

[4] P. Belkale: *The strange duality conjecture for generic curves*, J. Amer. Math. Soc. 21 (2008), no. 1, 235-258.

[5] G. Faltings: *Moduli-stacks for bundles on semistable curves*, Math. Ann. 304 (1996), no. 3, 489-515.

[6] I. Kausz: *A canonical decomposition of generalized theta functions on the moduli stack of Gieseker vector bundles*, J. Algebraic Geom. 14 (2005), no. 3, 439-480.

[7] A. Marian, D. Oprea: *The level-rank duality for non-abelian theta functions*, Invent. Math. 168 (2007), no. 2, 225-247.

[8] M. S. Narasimhan, T. R. Ramadas: *Factorisation of generalised theta functions. I*, Invent. Math. 114 (1993), no. 3, 565-623.

[9] X. Sun: *Degeneration of moduli spaces and generalized theta functions*, J. Algebraic Geom. 9 (2000), no. 3, 459-527.

Graduate School of Science and Technology
Kumamoto University
2-39-1 Kurokami, Kumamoto 860-8555, Japan
e-mail address : abeken@sci.kumamoto-u.ac.jp