

The abundance conjecture for slc pairs and its applications

権業善範*

東京大学大学院数理科学研究科

1 準備

この報告集では, ネフ (nef) や巨大 (big) などの基本的な用語は [KoM] または [KaMM] に従って用いる. また全て複素数体上の仕事である. 特に対数的特異点解消と対の特異点に関して, 次のような用語を用いる.

定義 1.1. 準対数的対 (X,Δ), すなわち, 正規多様体 X と $\mathbb{Q}$-ヴェイユ因子 Δ で, $K_X+\Delta$ が $\mathbb{Q}$-カルティエになる対, に対して その**対数的特異点解消** $\varphi: Y\to X$ とは, 次を満たすものである.

(1) Y は非特異多様体,
(2) φ は射影的双有理射,
(3) φ の例外集合 $\mathrm{Ex}\,\varphi$ が因子の和集合であり, $\mathrm{Ex}\,\varphi\cup\mathrm{Supp}\,\varphi_*^{-1}\Delta$ は単純正規交差, ここで $\varphi_*^{-1}\Delta$ は Δ の φ による Y 上の厳密変換である.

定義 1.2. 準対数的対 (X,Δ) で Δ の係数が全て 1 以下なものに対して, その対数的特異点解消を $\varphi: Y\to X$ とする. 対数的標準束公式を次のように書く.

$$K_Y+\varphi_*^{-1}\Delta=\varphi^*(K_X+\Delta)+\sum a_iE_i,$$

ここで E_i は Y 上の φ-例外素因子である. このとき,

(1) もし, すべての i に対して $a_i>-1$ が成り立ち, かつ Δ の係数が 1 未満のとき, 対 (X,Δ) は**準川又対数的端末 (subklt) 対**であるといい, 特に Δ が有効のとき, 単に**川又対数的端末 (klt) 対**であるという,
(2) もし, すべての i に対して $a_i>-1$ が成り立ち, かつ Δ が有効のとき, 対 (X,Δ) は**因子的対数的端末対 (dlt)** であるという,
(3) もし, すべての i に対して $a_i\geq -1$ が成り立つとき, 対 (X,Δ) は**準対数的標準 (sublc) 対**であるといい, 特に Δ が有効のとき, 単に**対数的標準 (lc) 対**であるという.

2 アバンダンス予想について

次の予想がアバンダンス予想と呼ばれる.

予想 2.1 (アバンダンス予想). 対 (X,Δ) を射影的対数的標準対とする. このとき $\nu(K_X+\Delta)=\kappa(K_X+\Delta)$ が成り立つ. さらに, もし $K_X+\Delta$ がネフの時, それは半豊富である.

ここで, $\mathbb{Q}$-カルティエ因子 D が**半豊富**とは, 十分割り切れる自然数 $m>0$ に対して完全線形系 $|mD|$ が固定

* gongyo@ms.u-tokyo.ac.jp

点自由である時を言う.

擬有効 (pseudo-effective) 因子 D と豊富因子 A に対して,

$$\nu(A, D) = \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} | \limsup_{m\to\infty} m^{-k}\dim H^0(X, \llcorner mD \lrcorner + A) > 0\},$$

$$\nu(D) = \max\{\nu(A, D) | A \text{ is ample}\}$$

と定義する. 擬有効でない因子 D に対しては $\nu(D) = -\infty$ と定義する. 注意としては, $\nu(D)$ は [N] の中では, $\kappa_\sigma(D)$ という記号が使われている.

予想 2.1 は極小モデル理論においてとても重要な予想である. 実際, 川又対数的端末対の擬有効対数的標準因子 $K_X + \Delta$ に対して, $\nu(K_X + \Delta) = \kappa(K_X + \Delta)$ が成り立つなら, (X, Δ) の極小モデルの存在が従う (cf. [GL], [DHP, Remark 2.6]).

とくに, 次元による帰納法を行っている場合では, 極小モデルの存在は, 実際は次の非消滅予想から従う (cf. [B], [G4], [DHP, Section 8]).

予想 2.2 (非消滅予想). *非特異射影多様体 X に対して, 標準因子 K_X が擬有効ならば, $\kappa(K_X) \geq 0$.*

まず, 3 次元以下の予想 2.1 は, 藤田氏, 川又氏, Kollár 氏, 森氏, 宮岡氏, Shokurov 氏らを始めとする様々な人らの貢献により肯定的に知られている. 一般次元では, $\Delta = A + B$ と書け, A が豊富かつ B が有効因子ととれる因子的対数的端末対 (X, Δ) に対しては, [BCHM] により予想 2.1 が成立することが知られている. さらに, $\nu(K_X + \Delta) = 0$ の場合も知られている. それについて少し解説する.

2.1 数値的小平次元ゼロの場合

まず次の結果を得る.

定理 2.3. 対 (X, Δ) を $\mathbb{Q}$-分解的射影 *dlt* 対とする. さらに $\nu(K_X + \Delta) = 0$ を仮定する. このとき (X, Δ) は極小モデルを持つ.

筆者が [G3] を完成させたあと, Lazić 氏に教えてもらったのだが、残念ながら定理 2.3 は klt 対の場合は既に Druel 氏により知られていた (cf. [D]). しかしこの議論は [BCHM] の議論をより精密に用いることにより, dlt 対に拡張することができる. さらに, [G3, Theorem 1.2] と合わせると次の川又氏, Campana–Koziarz–Păun 氏らによって証明された lc 対に対する数値的小平次元 0 のアバンダンス定理 ([Ka2]) の別証明を得る.

定理 2.4. 対 (X, Δ) を射影 *lc* 対とする. さらに $\nu(K_X + \Delta) = 0$ を仮定する. このとき $\kappa(K_X + \Delta) = 0$ である.

定理 2.4 は klt の場合, 中山氏によって証明された ([N, V, 4.9 Corollary]). その後この証明とは全く異なる Simpson の結果 ([Sim]) を用いた証明を川又氏 ([Ka2]), Campana–Koziarz–Păun 氏ら ([CKP]) がつけ, その結果, lc に拡張した. 今回の証明は中山氏が用いた証明の方向での lc 対への拡張である. 我々の証明には Simpson の結果は必要ない.

今から, 定理 2.3 の証明の概略を述べる. まず十分豊富な因子 H で (X, Δ) についてのスケール付き MMP(極小モデルプログラム) を動かすためのスケールになるものを取ってくる. それを用いてスケール付きの MMP$(X, \Delta) \dashrightarrow (X_i, \Delta_i)$ を走らせる. このとき, 定義により, λ_i という非負な広義単調減少な数列が $K_{X_i} + \Delta_i + \lambda_i H_i$ がネフとなるように現れる. 今, λ_i の極限を λ とする. 極限 λ が 0 でない場合, 列 $(X, \Delta) \dashrightarrow (X_i, \Delta_i)$ は $(K_X + \Delta + \frac{1}{2}\lambda H)$-MMP となり, [BCHM] により停止する. したがって, $\lambda = 0$ としてよい. 今, 列 $(X, \Delta) \dashrightarrow (X_i, \Delta_i)$ が停止しないとする. このとき X を十分先の X_i に取り替えることで, 列

$(X,\Delta) \dashrightarrow (X_i,\Delta_i)$ をフリップの無限列としてよい. さらに, $K_{X_i}+\Delta_i+\lambda_i H_i$ がネフなので, $\lambda=0$ に注意すると $K_X+\Delta$ は数値的に固定因子を持たない因子の極限と同値になる. これは $K_X+\Delta$ の因子的ザリスキー分解の負部分が 0 であることを導く. また, 今 $\nu(K_X+\Delta)=0$ なので, $K_X+\Delta$ の因子的ザリスキー分解の正部分も数値的に 0 である (cf. [N, V, 2.7 Proposition (8)]). この結果, $K_X+\Delta\equiv 0$ となり, 列が停止しないことに矛盾する.

次に半対数的標準対に対する予想 2.1 を考える. ここで**半対数的標準対**は次のような定義である.

定義 2.5. 純 d 次元被約 S_2-スキーム X と, その上の $\mathbb{Q}$-係数有効ヴェイユ因子 Δ について, $\mathbb{Q}$-係数ヴェイユ因子 $K_X+\Delta$ が $\mathbb{Q}$-カルティエ因子であるとする. さらに X が余次元 1 で正規交叉を仮定する. 既約分解を $X=\bigcup X_i$ とする. 正規化を $\nu: X' := \coprod X_i' \to X=\bigcup X_i$ とする. ここでいう正規化とは各既約成分を正規化をして非交和をとったものをさす. スキーム X' 上の $\mathbb{Q}$-因子 Θ を $K_{X'}+\Theta := \nu^*(K_X+\Delta)$ を満たす因子として定義する, そして $\Theta_i := \Theta|_{X_i'}$ をおく. この対 (X,Δ) が**半対数的標準対** (略して, **slc 対**) とは, (X_i',Θ_i) は *lc* を満たすときをいう.

さらに, 我々は slc 対に対する予想 2.1 は, 対数的標準因子がネフである場合のみを考えるのが妥当である. なぜなら, Kollár 氏による標準環が有限生成でない極小でない半対数的標準曲面の例 [Ko, Proposition 1] が存在する. 実は, この例は slc 対に対する極小モデルの存在は通常の意味では期待できないことを示唆している. したがって slc 対に対するアバンダンスはネフを仮定する. 以下が [G2] の主定理である:

定理 2.6. 対 (X,Δ) を射影的半対数的標準対とする. さらに $K_X+\Delta\equiv 0$ を仮定する. このとき $K_X+\Delta\sim_{\mathbb{Q}} 0$ が成り立つ.

この定理は藤野の貼合わせ理論 [F1] と [BCHM] を組み合わせて得られるが, その後, 藤野氏と筆者は共同研究 [FG] で定理 2.6 を完全に一般化した. 次にその解説を行う.

3 Slc アバンダンス

次が [FG] の主結果である:

定理 3.1. 対 (X,Δ) を射影的半対数的標準対とする. $\nu:(X'\Theta)\to(X,\Delta)$ を定義 *2.5* に現れる正規化とする. このとき, もし $K_{X'}+\Theta$ が半豊富なら, $K_X+\Delta$ も半豊富である.

先行研究を少し説明する. [F1] 以前の説明は [藤野] を見てほしい. 2010 年に筆者が [G2] で $\nu(K_X+\Delta)=0$ の場合に定理 3.1 を証明した. その後, 2011 年, [FG] で藤野氏と筆者は定理 3.1 を一般の場合に証明した. 最近では, 定理 3.1 の相対版が [HX] で証明されたようである. 彼らの証明は後に説明する定理 4.1 とコラーの貼合わせ理論を用いる.

定理 3.1 は, 一般型多様体のモジュライのコンパクト化の話でも登場する大切な定理である. しかしながら我々の主な興味は予想 2.1 にある. 予想 2.1 を証明するために次の 3 つが鍵と思わている.

1. lc center の構成法,
2. 拡張定理の一般化, そして,
3. 既約の場合のアバンダンス予想から可約の場合のアバンダンス予想を導くこと.

定理 3.1 はこの 3. が完全に解決したことになる.

具体的に, 今, $n-1$ 次元までの予想 2.1 と予想 2.2 を認めて n 次元非特異多様体 X に対して予想 2.1 の証明を試みよう. 実はこの予想 2.2 が最も難しいところであると思われている.

例 3.2. まず, n 次元非特異射影多様体 X に対して, 予想 *2.2* からある有効因子 D が存在して, $D \sim_{\mathbb{Q}} K_X$ がわかる. また *[Ka1, Theorem 7.3]* より, $\kappa(K_X) = 0$ としてよい. さらに対数的特異点解消をとることで, $\mathrm{Supp}\, D$ は単純正規交差であるとしてよい. 今 $D = \sum_i a_i D_i \,(a_i > 0)$ と書く. さらに $\Delta = \sum_i D_i$ とする. このとき, (X, Δ) は因子的対数的端末対であり, $\kappa(K_X + \Delta) = 0$ はすぐにわかる. 実は,

$$0 \leq \nu(K_X) \leq \nu(K_X + \Delta)$$

より, この $\nu(K_X + \Delta) = 0$ がチェック出来れば十分である. ここがいわゆる, *1.* のステップである. *[B]* より今の仮定の下では極小モデルの存在が自由に使える *(cf. [G4], [DHP, Section 8])*. 従って, 対 (X, Δ) の極小モデル $f : X \dashrightarrow Y$ が存在する. 今, $f_*(K_X + \Delta) \sim_{\mathbb{Q}} 0$ が成り立つとする. このとき $\nu(K_X + \Delta) = 0$ は直ちに従う. 従って, $f_* D \neq 0$ としてよい. 今 Δ の構成から, $\mathrm{Supp}\, \Delta = \mathrm{Supp}\, D$ である. 記号を $S = f_* \Delta$ と置くと, $S \neq 0$ かつ, $K_Y + S$ がネフとなる. 随伴公式より, $(K_Y + S)|_S = K_S + \Delta_S$ が成り立つ Δ_S が構成できる. ここで現れる (S, Δ_S) が, *slc* 対である. ここを直接既約にする程の自由度は, 今, この X は持っていない. ステップ *2* のセクションの拡張, すなわち十分割り切れる大きな整数 m に対して,

$$H^0(Y, m(K_Y + S)) \to H^0(S, m(K_S + \Delta_S))$$

が全射であることが期待できる *(実際, (S, Δ_S) が既約 klt 対の場合は大沢・竹腰の拡張定理の応用により証明できる cf. [DHP])*. 今, $n-1$ 次元までの予想 *2.1* の仮定から, (S, Δ_S) の各成分上では, $K_S + \Delta_S$ は半豊富はわかる. ここでステップ *3.* の $K_S + \Delta_S$ は S 上半豊富か？という問題になる. しかし, ここは定理 *3.1* により, $K_S + \Delta_S$ は半豊富. 従って, $\kappa(K_Y + S) = 0$ かつ

$$\mathrm{Supp}\, S = \mathrm{Supp}\, f_* D = \mathrm{Supp}\, f_*(D + S)$$

なので,

$$H^0(Y, m(K_Y + S)) \to H^0(S, m(K_S + \Delta_S))$$

はゼロ射のはずである. これは矛盾であり, $f_* D = 0$ であることがわかる. 注意としては, 川又の固定点自由化定理や *[BCHM]* のような設定の元で S の作り方に自由度があったので, (S, Δ_S) が *klt* にとれた. 従って, 定理 *3.1* のような定理が必要なかった.

4 藤野の貼合わせ理論

ここで [F1] の貼合わせ理論を説明する. この理論は最近, Kollár 氏がさらに発展させた. 藤野の貼合わせ理論は切断の貼合わせを行う. 基本的に大域的な場合にのみ有効である. それを発展させたコラーの貼合わせ理論は, 多様体を貼合わせるので局所的状況においても応用できる. 定理 3.1 の証明において, 鍵となるのは, $s' \in H^0(X', m(K_{X'} + \Theta))$ を X 上にデサントさせる条件を見つけて構成することである. 記号を $S = \llcorner \Theta \lrcorner$ とする. ここで B-**多重標準表現** を導入する. 定義は次で定められる. Slc 対 (X, Δ) に対して, まず $\varphi : X \dashrightarrow X$ が B-双有理写像とは共通の対数的特異点解消 $\alpha, \beta : W \to X$ が $\varphi \circ \alpha = \beta$ と $\alpha^*(K_X + \Delta) = \beta^*(K_X + \Delta)$ を満たすように存在する固有的双有理写像のことである. さらに,

$$\rho_m : \mathrm{Bir}(X, \Delta) := \{\varphi : X \dashrightarrow X | \varphi \text{ は } B\text{-双有理写像 } \} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(H^0(X, m(K_X + \Delta)))$$

は引き戻しで定義される自然な群準同型写像である. これを B-**多重標準表現** または**対数的多重標準表現**と呼ぶ.

今, $\rho_m(\mathrm{Bir}(S, \Theta_S))$ が有限群だとする, ここで Θ_S は $(K_{X'} + \Theta)|_S = K_S + \Theta_S$ で定まる $\mathbb{Q}$-因子である. このとき十分大きく割り切れる自然数 m' に m を取り替えることで, $H^0(S, m'(K_S + \Theta_S))$ の中では $\mathrm{Bir}(S, \Theta_S)$-

不変切断 t が存在する．この t が X' 上の切断 $s \in H^0(X', m'(K_{X'} + \Theta))$ として持ち上がれば (拡張定理), マイヤー・ヴィートリス系列を用いた議論により，s は X 上にデサントする．さらに実際，ここで用いる拡張定理は $K_{X'} + \Theta$ が仮定より半豊富なので，コラーの単射性定理と [BCHM] レベルの MMP を用いたファイバー空間の幾何学的考察により証明できる (cf. [F1, Proposition 4.5])．従って定理 3.1 は以下の定理に帰着される:

定理 4.1. 対 (X, Δ) を射影的対数的標準対とする．さらに $K_X + \Delta$ が半豊富を仮定する．このとき十分大きく割り切れる自然数 m に対して $\rho_m(\mathrm{Bir}(X, \Delta))$ は有限群である．

この定理の我々の証明は [F1] と [G2] の議論を素朴に一般化したものである．定理 4.1 は [HX] で別証明が与えられたようである．彼らの証明も [F1] と [G2] の結果に依存している．定理 3.1 の相対版を証明する場合でも必要な有限性定理は絶対版でよい．

次のセクションで詳しくこの定理の説明を行う．実際 [FG] はこの定理を主に扱い証明をしている．

5 対数的多重標準表現の有限性

定理 4.1 の証明のために，$m(K_X + \Delta)$ がカルティエ因子となる自然数 m に対して，$\mathrm{Bir}(X, \Delta)$ よりも大きな群である $\widetilde{\mathrm{Bir}}_m(X, \Delta)$ を考える必要がある．定義は次のようである:

$$\widetilde{\mathrm{Bir}}_m(X, \Delta) = \left\{ g \in \mathrm{Bir}(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} g^*\omega \in H^0(X, m(K_X + \Delta)) \text{ for} \\ \text{every } \omega \in H^0(X, m(K_X + \Delta)) \end{array} \right\},$$

ここで g^* は有理型関数係数の m 重 n 形式としての引き戻しである．この $\widetilde{\mathrm{Bir}}_m(X, \Delta)$ に対して，表現

$$\widetilde{\rho}_m : \widetilde{\mathrm{Bir}}_m(X, \Delta) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(H^0(X, m(K_X + \Delta))).$$

を考える．実際，この表現に対する有限性も成り立つ:

定理 5.1. 対 (X, Δ) を射影的 *subklt* 対とする．さらに $m(K_X + \Delta)$ がカルティエ因子であると仮定する．このとき $\widetilde{\rho}_m(\widetilde{\mathrm{Bir}}_m(X, \Delta))$ は有限群である．

定理 5.1 の主張は中村氏–上野氏, Deligne 氏らによるコンパクトモイシェゾン多様体上の多重標準表現の有限性 (cf. [NU]) の対数版となっている．この証明は酒井氏の [S] と同様な手法の開多様体のコンパクト化と有理型関数係数の多重 n 形式の可積分条件を考察することで得られる．注意としては，定理 5.1 の主張の中には $K_X + \Delta$ が半豊富である必要すらない．対数的標準対でも $K_X + \Delta$ が巨大な場合も半豊富性は必要ない．

定理 5.2. 対 (X, Δ) を射影的対数的標準対とする．さらに $m(K_X + \Delta)$ が巨大なカルティエ因子と仮定する．このとき $\rho_m(\mathrm{Bir}(X, \Delta))$ は有限群である．

証明のアウトライン. Dlt 爆発 (cf. [KoKov, Theorem 3.1], [F2, Section 4]) を用いることで，(X, Δ) を dlt と仮定してよい．さらに定理 5.1 より，$S := \llcorner \Delta \lrcorner \neq 0$ としてよい．小平の補題より，十分割り切れる自然数 $m' >> 0$ をとり，$m'(K_X + \Delta) \sim S + D_{m'}$ となるような有効因子 $D_{m'}$ をとる．任意の $g \in \mathrm{Bir}(X, \Delta)$ に対して,$\mathrm{Supp}\, g^*S = \mathrm{Supp}\, S$ が成り立つ．その結果，

$$g^*S \geq S$$

である．したがって，

$$\mathrm{Bir}(X, \Delta) \subset \widetilde{\mathrm{Bir}}_{m'}\left(X, \Delta - \frac{1}{m'}S\right).$$

となる．対 $(X, \Delta - 1/m'S)$ は subklt なので，定理 5.1 より，$\widetilde{\rho}_{m'}(\mathrm{Bir}(X, \Delta))$ は有限群．その位数を a とする．

このとき, $\mathrm{Bir}(X,\Delta)$-不変でゼロでない切断 $s \in H^0(X, a(m'(K_X+\Delta)-S))$ が得られる. 切断 s を用いて, 埋め込み

$$H^0(X, m'm(K_X+\Delta)) \subseteq H^0(X,(m+m'a)(K_X+\Delta)-aS).$$

が得られる. 対 $(X, \Delta - a/(m+m'a)S)$ は subklt だから,

$$\widetilde{\rho}_{m+m'a}\left(\widetilde{\mathrm{Bir}}_{m+m'a}\left(X, \Delta - \frac{a}{m+m'a}\Delta^{=1}\right)\right)$$

は, 定理 5.1 より, 有限群. 特に, $\widetilde{\rho}_{m+m'a}(\mathrm{Bir}(X,\Delta))$ もまた有限群. したがって, $\rho_m(\mathrm{Bir}(X,\Delta))$ が有限群であることがわかる.

□

実際, 定理 4.1 は次の形で証明される.

定理 5.3. 対 (X,Δ) を n 次元射影的対数的標準対とする. さらに $m(K_X+\Delta)$ が半豊富なカルティエ因子であると仮定する. このとき $\rho_m(\mathrm{Bir}(X,\Delta))$ は有限群である.

証明のアウトライン. 次元 n による数学的帰納法で証明する. 定理 5.2 と同様. Dlt 爆発を用いることで, (X,Δ) を dlt と仮定してよい. さらに定理 5.1 より, $S := \llcorner \Delta \lrcorner \neq 0$ としてよい. 射 $f: X \to Y$ を十分大きくて割り切れる自然数 k に対して $|k(K_X+\Delta)|$ で定まるものとする. Δ の f についての水平方向を Δ^h と書く. 水平方向の切り下げ部分 $\llcorner \Delta^h \lrcorner$ が 0 であるか否かで場合分けを行い証明する.

ケース 1. $\llcorner \Delta^h \lrcorner \neq 0$.

この場合,

$$H^0(X, m(K_X+\Delta)-S) = 0$$

となる. したがって

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(m(K_X+\Delta))) \to H^0(T, \mathcal{O}_S(m(K_S+\Delta_S)))$$

は単射, ここで Δ_S は $K_S+\Delta_S = (K_X+\Delta)|_S$ で定められる因子である. 今, 双有理写像 $g \in \mathrm{Bir}(X,\Delta)$ を固定する. この場合は lc センターの幾何学的考察 (cf. [FG, Lemma 2.16]) を行うことにより, 特にある lc センターたちの非交和 $T = \sqcup_j T_j$ が存在して, 双有理写像 g は T 上の双有理写像 $g_T : T \dashrightarrow T$ を誘導し, さらに

$$H^0(X, m(K_X+\Delta)) \subseteq \bigoplus_j H^0(T_j, m(K_{T_j}+\Delta_{T_j}))$$

が成り立つ, ここで Δ_{T_j} は $K_{T_j}+\Delta_{T_j} = (K_X+\Delta)|_{T_j}$ で定められる因子である. したがって lc センターの有限性と帰納法の仮定から g には依存しない正の整数 l が取れて, g^l は $H^0(X, m(K_X+\Delta))$ 上自明に作用する. よってバーンサイドの定理より, $\widetilde{\rho}_m(\widetilde{\mathrm{Bir}}_m(X,\Delta))$ は有限群である.

ケース 2. $\llcorner \Delta^h \lrcorner = 0$.

この場合は標準因子公式を用いる. つまり, 次の公式が成り立つ:

$$K_X + \Delta_X = f'^*(K_Y + \Delta_Y + M),$$

ここで

$$\Delta_Y = \sum (1-c_Q)Q,$$

因子 Q は Y 上の素因子で

$$c_Q = \sup\{t \in \mathbb{Q} \mid K_{X'} + \Delta_{X'} + tf'^*Q \text{ is sublc over the generic point of } Q\}.$$

であり, M はモジュライ部分と呼ばれる $\mathbb{Q}$-カルティエ類である. 多様体 X 上で十分爆発を行うことにより, $\operatorname{Supp}\Delta_X^{=1} \subset \operatorname{Supp} f'^{*}\Delta_Y^{=1}$ を満たし, かつ M が双有理変換により関手的であるとしてよい (cf. [A1, Theorem 0.2]). したがって, 定理 5.2 の証明と同じアイデアで証明が完成する.

□

6 応用

応用として, 次が証明できる.

定理 6.1 ([G1, Theorem 1.7]). 対数的対 (X, Δ) を対数的標準弱対数的ファノ対とする. このとき, (X, Δ) の任意の *lc* センターが高々 1 次元ならば $-(K_X + \Delta)$ は半豊富である.

実際, lc センターの次元が 2 以上では反例がある ([G1, Section 5]). これは [S, 2.6. Remark-Corollary], [P, 11.1] の問題の反例でもある.
また同様な手法で次も得られる.

定理 6.2. 対数的対 (X, Δ) を射影的対数的標準対とする. さらに $K_X + \Delta$ がネフかつ巨大であると仮定する. このとき, (X, Δ) の任意の *lc* センターが高々 1 次元ならば $(K_X + \Delta)$ は半豊富である.

また一般型多様体の自己同型群の有限性との関連で次のようなことが証明できる.

系 6.3. 対数的対 (X, Δ) を射影的対数的標準対とする. さらに $K_X + \Delta$ が巨大であると仮定する. このとき, $\operatorname{Bir}(X, \Delta)$ は有限群.

証明. 因子 $K_X + \Delta$ が巨大だから, 十分大きな自然数 $m >> 0$ に対して, $m(K_X + \Delta)$ は双有理写像 $X \dashrightarrow Y \subseteq \mathbb{P}(H^0(X, m(K_X + \Delta)))$ を定める. X 上の B-双有理写像は $\mathbb{P}(H^0(X, m(K_X + \Delta)))$ 上の自己同型射で, Y 上で自己双有理写像となるものを誘導する. このことから, 定理 4.1 より系 6.3 は従う. □

同様な証明により, 次もわかる.

系 6.4. 対数的対 (X, Δ) を射影的 *subklt* 対とする. さらに $K_X + \Delta$ が巨大であると仮定する. このとき, 十分大きく割り切れる自然数 m' が存在して, $\widetilde{\operatorname{Bir}}_{m'}(X, \Delta)$ は有限群.

7 謝辞

今回, この盛大なる代数幾何学城崎シンポジウムでの講演の機会をくださったオーガナイザーの入谷寛さん, 川口周さん, 中岡宏行さんに感謝しています. 筆者は JSPS の特別研究員で, 科学研究補助金, 特別研究員奨励費 ♯22·7399 の補助を受けています.

参考文献

[A1] F. Ambro, Shokurov's boundary property, J. Differential Geom. **67** (2004), no. 2, 229–255.

[A2] F. Ambro, The moduli *b*-divisor of an lc-trivial fibration, Compositio. Math. 141 (2005), no. 2, 385–403.

[B] C. Birkar, On existence of minimal models II, preprint, arXiv:0907.4170, to appear in J. Reine Angew Math.

[BCHM] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon and J. M^{c}Kernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, J. Amer. Math. Soc. 23 (2010), 405-468.

[CKP] F.Campana, V. Koziarz and M. Păun, Numerical character of the effectivity of adjoint line bundles, preprint, arXiv:1004.0584.

[DHP] J-P. Demailly, C. Hacon, and M. Păun, Extension theorems, Non-vanishing and the existence of good minimal models, 2010, arXiv:1012.0493v2.

[D] S. Druel, Quelques remarques sur la décomposition de Zariski divisorielle sur les variétés dont la premiére classe de Chern est nulle, Math. Z., 267, 1-2 (2011), p. 413-423.

[F1] O. Fujino, Abundance Theorem for semi log canonical threefolds, Duke Math. J. **102** (2000), no. 3, 513–532.

[藤野] 3 次元半ログ標準多様体のアバンダンス定理, 代数幾何学城崎シンポジューム報告集 p1–p7 (1999), http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/253/

[F2] O. Fujino, Semi-stable minimal model program for varieties with trivial canonical divisor, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **87** (2011), no. 3, 25–30.

[FG] O. Fujino and Y. Gongyo, Log pluricanonical representation and abundance conjecture, preprint.

[G1] Y. Gongyo, On weak Fano varieties with log canonical singularities, to appear in J. Reine Angew. Math..

[G2] Y. Gongyo, Abundance theorem for numerically trivial log canonical divisors of semi-log canonical pairs, to appear in J. Algebraic Geom..

[G3] Y. Gongyo, On the minimal model theory for dlt pairs of numerical log Kodaira dimension zero, to appear in Math. Res. Lett.

[G4] Y. Gongyo, Remarks on the non-vanishing conjecture, preprint.

[GL] Y. Gongyo, and B. Lehmann, Reduction maps and minimal model theory, preprint.

[HX] C. Hacon, C. Xu, On Finiteness of B-represention and Semi-log Canonical Abundance, arXiv: 1107.4149.

[Ka1] Y. Kawamata, Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties. Invent. Math. 79 (1985), no. 3, 567—588.

[Ka2] Y. Kawamata, On the abundance theorem in the case of $\nu = 0$, preprint, arXiv:1002.2682.

[KaMM] Y. Kawamata, K, Matsuda and K, Matsuki, *Introduction to the minimal model problem*, Algebraic geometry, Sendai, 1985, 283–360, Adv. Stud. Pure Math., 10, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[Ko] J. Kollár, Two examples of surfaces with normal crossing singularities, arXiv:0705.0926.

[KoKov] J. Kollár and S. J. Kovács, Log canonical singularities are Du Bois, J. Amer. Math. Soc. **23**, no. 3, 791–813.

[KoM] J. Kollár and S. Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math. 134 (1998).

[NU] I. Nakamura and K. Ueno, An addition formula for Kodaira dimensions of analytic fibre bundles whose fibre are Moišezon manifolds, J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 363–371.

[N] N. Nakayama, *Zarisiki decomposition and abundance*, MSJ Memoirs, 14. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.

[P] Y. G. Prokhorov, *Lectures on complements on log surfaces*, MSJ Memoirs 10 (2001).

[S] F. Sakai, *Kodaira dimensions of complements of divisors, Complex analysis and algebraic geometry*, pp. 239–257. Iwanami Shoten, Tokyo, 1977.

[Sim] C. Simpson, Subspaces of moduli spaces of rank one local systems, Ann. Sci. École Norm. Sup.

(4) 26 (1993), no. 3, 361–401.

[S] V. V. Shokurov, *Complements on surfaces*, J. Math. Sci. **107** (2000), no. 2, 3876–3932.