代数幾何学シンポジウム記録
2011年度 pp.55-64

エンリケス曲面の自己同型について

大橋 久範[1]（名古屋大学・多元数理科学研究科）

概要

本稿では、複素数体 $\mathbb{C}$ 上のエンリケス曲面のある種の自己同型からなる有限群の構造と、それに関連して発見され重要と思われるエンリケス曲面のある部分族について、最近得られた結果を紹介する。本研究は向井茂氏（京都大学・数理解析研究所）との共同研究である。

1 導入

$\mathbb{C}$ 上非特異な射影多様体 X の自己同型群が（連結とは限らない）複素リー群の構造を持ち、その単位元における接空間が $H^0(X, T_X)$ と同一視されることはよく知られている。特に、このコホモロジー群の次元がゼロであることと、自己同型群が高々可算位数で離散的であることが同値である。代数曲線の場合にはこの条件は X の種数が 2 以上というのと同値で、この場合には自己同型群はいつも有限群となる。一方、代数曲面で考えると、自己同型群が有限ではない離散群となる場合もあり、このような群の構造論や記述は一般に難しくておもしろい。$K3$ 曲面やエンリケス曲面はまさにそのような例である。

定義 1.1. X, S は非特異射影代数曲面とする。

- X の標準束が自明で、不正則数 $q(X) := h^1(\mathcal{O}_X)$ が零のとき、X は $K3$ 曲面と呼ばれる。
- S の標準束がピカール群の中で位数 2 を持ち、不正則数が零のとき、S はエンリケス曲面と呼ばれる。

以下常に X と S はそれぞれ $K3$ 曲面、エンリケス曲面を表す。$K3$ 曲面 X 上には至る所消えない正則二形式 ω_X があり、X に複素シンプレクティック多様体の構造を与える。X の自己同型 φ がシンプレクティックであるとは、この二形式 ω_X を保つことを言う。言い換えると、自然な写像 $\mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}\, H^0(\mathcal{O}_X(K_X))$ の核がシンプレクティック自己同型の全体に他ならない。一方、この写像の像が有限群であることも知られている。したがって、シンプレクティック自己同型は $K3$ 曲面の自己同型群を理解する上での鍵となる。

[1]科研費基盤 (S) 課題番号 22224001、若手 (B) 課題番号 23740010 の援助に感謝します。

問題：$K3$ 曲面のシンプレクティックな自己同型を分類できるか？

以下で、有限群作用の場合にこの問題とそのエンリケス曲面への拡張を考えていきたい。$K3$ 曲面の理論の非常に面白い一側面は、このシンプレクティック自己同型のなす有限群の分類に散在型有限単純群であるマシュー群が現れるところである。

まずはマシュー群の定義を復習しておこう。マシュー群 M_{24} の構成は通常 binary Golay code の自己同型群として行われるが、説明のためにはそれを特徴付ける次の定理を挙げるのが見易いと思われる。

マシュー群の特徴付け (1)：24 次対称群 $\mathfrak{S}_{24}$ の非自明な（指数が 3 以上の）部分群 M_{24} で、次の性質（五重可移性）を満たすものが存在する：$\mathfrak{S}_{24}$ の作用域を $\Omega = \{1, \cdots, 24\}$ とするとき、Ω の任意の二つの五元部分集合 $\{a_1, \cdots, a_5\}, \{b_1, \cdots, b_5\}$ に対して、$g \in M_{24}$ で $ga_i = b_i$ $(i = 1, \cdots, 5)$ を満たすものが存在する。

この群 M_{24} は $\mathfrak{S}_{24}$ の内部自己同型を除いて唯一定まり、24 次のマシュー群と呼ばれる。

五重可移性から、Ω の n 点（$n = 1, \cdots, 5$）を固定する元のなす M_{24} の部分群は共役を除いて決まり、これを M_{24-n} で表す。M_{23}, M_{22} は再び散在型の有限単純群になり、これもマシュー群と呼ばれる。マシュー型の単純群には他に M_{12} と M_{11} があるが、これについては後述する。

さて、$K3$ 曲面のシンプレクティック自己同型のなす有限群は次のように分類される。

定理 1.2. [2] 有限群 G に対して次の条件は同値である。

1. G はある $K3$ 曲面 X に効果的かつシンプレクティックな作用を持つ。
2. G は以下の 11 個の極大群どれかの部分群に同型である：
   $G \subset L_2(7), \mathfrak{A}_6, \mathfrak{S}_5, M_{20}, F_{384}, \mathfrak{A}_{4,4}, T_{192}, H_{192}, N_{72}, M_9, T_{48}$.
3. G は 23 次マシュー群 M_{23} への埋め込みを持ち、自然な 24 次の置換作用を考えた時の軌道の数が 5 つ以上である。

この定理を原型として、エンリケス曲面の有限自己同型群に関してもマシュー群と関連させた面白い研究ができないかというのがアイデアである。

2 エンリケス曲面の半シンプレクティック自己同型

エンリケス曲面の自己同型については、特徴的な面白い例について詳しく調べられてきた歴史があるものの、有限自己同型の一般論は抜け落ちていた。ここではエンリケス曲面の半シンプレクティック自己同型を定義し、特に有限位数のものについて詳しく見ていくことにする。まずは基本事項から始める。

命題 2.1. エンリケス曲面 S に対して、その普遍被覆空間 $\pi\colon X \to S$ は S の二重被覆で X は $K3$ 曲面である。逆に、$K3$ 曲面 X 上に自由に作用する位数 2 の自己同型 ε が存在するとき、商曲面 $S = X/\varepsilon$ はエンリケス曲面である。

定義 2.2. エンリケス曲面 S の自己同型 σ が S 上の至る所消えない大域二重二形式 Ω_S に自明に作用するとき、σ は半シンプレクティックであるという。

命題 2.1 において、大域二重二形式 Ω_S は被覆 $K3$ 曲面 X 上の二重二形式 $\omega_X^{\otimes 2}$ と対応している。従って Ω_S を保つという条件は「ω_X を保つかあるいは (-1) 倍する」という条件と同値であり、シンプレクティック性を半分程度に緩めたものになる。これが用語の由来である。ここから想像できるように、S 上の半シンプレクティック自己同型は、$K3$ 曲面 X 上のシンプレクティック自己同型と反シンプレクティック自己同型の性質を併せ持つ。特に、反シンプレクティック自己同型の多様性をそのまま受け継ぐため、少々広すぎるクラスを与えると考えられる。

例 2.3. 楕円曲面の自己同型を考えよう。

1. 楕円 $K3$ 曲面 $X \to \mathbb{P}^1$ を考える。このとき、切断から誘導される平行移動の自己同型 T は X のシンプレクティック自己同型である。一方、相対的群構造における逆元を与える写像 I は、X の反シンプレクティック自己同型である。これらの違いは次のように直感的に説明できる：$\mathrm{Fix}(T)$ は束に横断的な成分をもたないが、$\mathrm{Fix}(I)$ は常に横断的な（$\mathbb{P}^1$ 上次数 4 の）成分を持つ。

2. 楕円エンリケス曲面 $S \to \mathbb{P}^1$ を考える。このとき、上記の二種類の写像 T, I はどちらも半シンプレクティック自己同型となる。

命題 2.4. エンリケス曲面の有限位数の自己同型 σ を考える。σ の位数が 2 または奇数のとき、σ は自動的に半シンプレクティックである。

Proof. 位数が 2 の S の自己同型を考えると、その X への持ち上げも位数 2 であり、ω_X には ± 1 で作用する可能性しかない。従って自動的に $\omega_X^{\otimes 2}$ には自明に作用する。奇数位数の場合は省略する。 □

このように、半シンプレクティック自己同型は実際にかなり広いクラスを与えていて、一様な振る舞いがなかなか期待できない。ここで、有限位数の半シンプレクティック自己同型の固定点集合の分類結果をまとめておく。比較のためにまず $K3$ 曲面のシンプレクティック自己同型に関する結果をまず述べる。

命題 2.5. [3] φ を $K3$ 曲面 X の有限位数 n のシンプレクティック自己同型とする。このとき、$n \leq 8$ であり、位数 n と固定点の個数 $\#\,\mathrm{Fix}(\varphi)$ の関係は以下の通りである。

$n = \mathrm{ord}\,\varphi$	2	3	4	5	6	7	8
$\#\,\mathrm{Fix}(\varphi)$	8	6	4	4	2	3	2

特に、固定点の数は常に有限であり、位数 n の関数として定まる。

命題 2.6. σ をエンリケス曲面 S の有限位数 n の半シンプレクティック自己同型とする。このとき $n \leq 6$ であり、位数 n と固定点の個数 $\#\,\mathrm{Fix}(\varphi)$ の関係は以下の通りである。

$n = \mathrm{ord}\,\varphi$	2	3	4	5	6
$\#\,\mathrm{Fix}(\varphi)$	(−)	3	2 or 4	2	1 or 3

ここで、位数 2 の場合には固定点集合が曲線を含むことがある（含まないこともある）。このように、固定点の数は n の関数にはならず、自己同型 σ そのものに依存する。

エンリケス曲面の自己同型を定理 1.2 の立場から見なおそうとした場合、自然に適していると思われてくるのが次節で扱う「マシュー型」の自己同型である。

3 マシュー型の自己同型と主定理

レフシェッツの固定点公式は、自己同型に対し、その固定点集合の位相的オイラー数とコホモロジー作用のトレースを関係させるものであった。$K3$ 曲面とエンリケス曲面の場合には奇数次の項が消えて次のようになる。

$$\begin{aligned} \chi_{\mathrm{top}}(\mathrm{Fix}(\varphi)) &= \mathrm{tr}(\varphi^* \curvearrowright H^*(X,\mathbb{Q})) \\ \chi_{\mathrm{top}}(\mathrm{Fix}(\sigma)) &= \mathrm{tr}(\sigma^* \curvearrowright H^*(S,\mathbb{Q})) \end{aligned} \tag{3.1}$$

自己同型が有限個の固定点しか持たない場合には、オイラー数は固定点の個数そのものとなることに注意しておく。

(3.1) により、命題 2.5 は $K3$ 曲面のシンプレクティック自己同型群 G を考えた時のコホモロジーへの表現の指標を計算しているとみなされる。実は、この指標がマシュー群 M_{23} の自然な 24 次元置換表現の指標と一致している。これが定理 1.2 における極めて重要な観察であった。つまり、$K3$ 曲面において 24 次のマシュー群が現れる一つの理由は $K3$ 曲面の位相的オイラー数が 24 だからである。ここで、エンリケス曲面の位相的オイラー数が 12 であることを思い出す。はじめに述べたように、マシュー群の系列には次数 24 から始まる三つの他に次数 12 から始まる M_{12} と M_{11} があり、これらは次のように特徴付けられる。

マシュー群の特徴付け (2)：M_{24} の作用域 $\Omega = \{1, \cdots, 24\}$ の分割 $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$ で $\#\Omega_+ = \#\Omega_- = 12$ なるもののうち、次を満たすものが存在する：安定化部分群

$$M_{12} = \{g \in M_{24} \mid g(\Omega_+) = \Omega_+\}$$

が散在型有限単純群になる。

この群 M_{12} もマシュー群と呼ばれる。さらに、M_{12} は Ω_+ への作用に関して五重可移性を持つ。

M_{23} 等と同じように、Ω_+ の一点の固定化部分群として M_{11} が定義され、これで 5 つのマシュー系列の散在型単純群の定義がそろった。エンリケス曲面の自己同型の一つのクラスとして、次を定義しよう。

定義 3.1. $G \curvearrowright S$ をエンリケス曲面の半シンプレクティック自己同型からなる有限群とする。この作用が**マシュー型**というのは、次の条件を満たすときにいう：

- 任意の位数 2 または 4 の元 $\sigma \in G$ に対し、固定点のオイラー数 $\chi_{\mathrm{top}}(\mathrm{Fix}(\sigma))$ が 4 に等しい。

位数 2 と 4 における指標を固定することで、実は位数 6 の元に対する指標も自動的に定まることがわかり、次が導かれる。

命題 3.2. エンリケス曲面のマシュー型の有限自己同型群 G が持つコホモロジー表現 $G \curvearrowright H^*(S, \mathbb{Q})$ の指標は、マシュー群 M_{11} の 12 次の置換表現の指標と同じである。

本稿の主定理はマシュー型の有限群の分類である。

定理 3.3 (Mukai, O-). 有限群 G に対して、次は同値である。

1. G はあるエンリケス曲面 S にマシュー型自己同型群として作用する。

2. Gは次の5つの極大群いずれかの部分群である：$G \subset \mathfrak{A}_6, \mathfrak{S}_5, C_3^2.D_8, C_2 \times \mathfrak{A}_4, C_2 \times C_4$

3. Gは対称群$\mathfrak{S}_6$の部分群で、その位数が$2^4 = 16$では割り切れない。

注意 3.4. 有限群の記号は以下の通りである。$\mathfrak{S}_n$と$\mathfrak{A}_n$はそれぞれ対称群と交代群。D_8は位数8の二面体群。C_nは位数nの巡回群。$G.H$は群の半直積を表し、$C_3^2.D_8$は$\mathfrak{S}_6$における3-シロー群の正規化部分群をさす。

G	$\#G$	モジュライ数	群の特徴
$C_2 \times C_4$	8	1	(アーベル群)
$C_2 \times \mathfrak{A}_4$	24	1	
$C_3^2.D_8$	72	0	3-Sylow normalizer in $\mathfrak{S}_6$
$\mathfrak{S}_5$	120	0	5次対称群
$\mathfrak{A}_6$	360	0	6次交代群

証明のアイデア：
(2) ⇒ (1) : 実際にそのようなエンリケス曲面の自己同型の例を構成して示せばよい。モジュライ数0の群に対しては$K3$曲面のトレリ型定理を用いた格子論的構成によりエンリケス曲面が構成される。モジュライ数1の群に対してはエンリケス曲面の6次超曲面モデルの上にそのような例が構成できる。次の節でこの部分を詳しく記す。
(1) ⇒ (2) : 命題2.6をもう少し精密に述べることで、群Gの元に対して可能な位数とその固定点集合に加えその局所的な作用の仕方までが分類できる。ここから、コホモロジー表現の指標に関する代数的な条件と、固定点における局所的な群作用の形に関する幾何的な条件が得られる。例えば、Gの位数が16で割り切れないことは指標をみることですぐに従う。一般にも、群Gが$K3$曲面のシンプレクティック自己同型群への持ち上げを持つことから、定理1.2を用いるとGの可能性が上から押さえられ、これらの群が既知の群作用の部分群になっているか、代数または幾何の条件から排除できるかどちらかであることを示していけばよい。
(2) ⇔ (3) : 極大群の全体がわかれば、それが実は6次対称群に含まれていて(3)のような特徴付けを持つということは直接わかる。

マシュー型作用を持つ有限群が6次対称群に含まれることを直接示すことはできるのだろうか。定理1.2にはニーマイヤー格子を用いた非常に美しい別証明があった[1]。

これを念頭に置くと、次の問題は興味深い。

問題：(1) と (3) の同値性をより目に見える方法で示せ。

4 例

エンリケス曲面が最初に認識されたのは次のモデルによってであった。

定理 4.1. $\overline{S} \subset \mathbb{P}^3$ を六次超曲面で、座標四面体の 6 つの辺に沿って二重直線の特異点を持ち、他に悪い特異点を持たないものとする。このとき、正規化 S はエンリケス曲面になる。

（1）まずは小さい群 $C_2 \times C_4$ の場合を考えよう。$\overline{S}$ を

$$(x^2+y^2+z^2+t^2)xyzt + \sqrt{-1}\Big(\frac{a^2}{x^2} + \frac{a^2}{y^2} + \frac{1}{a^2z^2} + \frac{1}{a^2t^2}\Big)x^2y^2z^2t^2 \tag{4.1}$$

で決まる六次超曲面とする（a はパラメータ）。局所座標を用いた計算により、この曲面は上の特異点の条件を満たすことがわかる。従って正規化 S はエンリケス曲面である。二つの自己同型を

$$g\colon (x,y,z,t) \mapsto \Big(\frac{a}{y}, \frac{a}{x}, \frac{1}{at}, -\frac{1}{az}\Big)$$
$$h\colon (x,y,z,t) \mapsto \Big(\frac{a}{y}, -\frac{a}{x}, \frac{1}{at}, \frac{1}{az}\Big)$$

で定義すると、これらは S のマシュー型自己同型を与えていて、有限群 $C_2 \times C_4$ を生成する。

（2）次に群 $C_2 \times \mathfrak{A}_4$ を考えよう。$\overline{S}$ を

$$(x^2+y^2+z^2+t^2)xyzt + \Big(\frac{b^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{b^2}{z^2} + \frac{1}{b^6t^2}\Big)x^2y^2z^2t^2 \tag{4.2}$$

で決まる六次超曲面とする。b はパラメータである。再び局所座標を用いた計算から、その正規化 S がエンリケス曲面の一次元の族を与えることがわかる。自己同型を次のように定義する。

$$\varphi\colon (x,y,z,t) \mapsto (z,x,y,t)$$
$$s_{12}\colon (x,y,z,t) \mapsto (-x,-y,z,t)$$
$$s_{13}\colon (x,y,z,t) \mapsto (-x,y,-z,t)$$
$$s_{14}\colon (x,y,z,t) \mapsto (-x,y,z,-t)$$
$$\sigma\colon (x,y,z,t) \mapsto \Big(\frac{b}{x}, \frac{b}{y}, \frac{b}{z}, \frac{1}{b^3t}\Big).$$

s_{12}, s_{13}, s_{14} は恒等写像とともに位数 4 の初等アーベル群を構成し、位数 3 の φ を加えるとこれで交代群 $\mathfrak{A}_4$ が生成される。σ はこれと可換な対合となっていて、全体として $C_2 \times \mathfrak{A}_4$ による群作用が得られる。固定点集合を計算することにより、この作用がマシューであることがわかる。

注意 4.2. 実は、群 $C_2 \times \mathfrak{A}_4$ のマシュー作用を実現する一次元族がもう一つ知られている。

（3）六次式 f_i を

$$f_1 = (xy + yz + zx + xt + yt + zt)xyzt = s_2 s_4,$$

$$f_2 = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)xyzt + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2}\right)x^2y^2z^2t^2 = s_1^2 s_4 + s_3^2 - 4 s_2 s_4$$

で定義する。ここで s_i は i 次の基本対称式である。一次元線形系

$$\{a_1 f_1 + a_2 f_2 \mid (a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^1\}$$

の一般元に対応する曲面 $\overline{S}$ を考えると、その正規化 S が上と同様にエンリケス曲面になり、その上に座標の置換による対称群 $\mathfrak{S}_4$ の作用と標準クレモナ変換 σ の作用が構成される。つまり群 $C_2 \times \mathfrak{S}_4$ が S に作用する。その自然な部分群 $C_2 \times \mathfrak{A}_4$ の作用がマシュー型になっているのである。

上の（2）で構成した例との関係はどうなっているだろうか。$C_2 \times \mathfrak{A}_4$ の 2-シロー群の非自明な 7 個の対合の固定点を比較してみよう。一般に、代数曲面の自己同型 σ が孤立固定点しか持たないとき、σ は小さな自己同型と呼ばれる。

• （2）においては、7 個のうち 4 つが小さな対合で、残りの対合は固定曲線として二つの楕円曲線をそれぞれ含む。これらの小さくない対合と恒等写像が位数 4 の初等アーベル群を構成している。

• （3）においても 4 つ小さな対合が現れるが、このうち 3 つを選ぶと恒等写像とともに位数 4 の初等アーベル群を生成させることができる。

結論：（2）と（3）の例は本質的に異なる。

（3）においては曲面の族が線形系をなしていたり群の作用がより見易い形になっている等の利点がある。一方、（2）の族には次の節で説明するような背景が広がっている。

5 Hutchinson-Göpel 型のエンリケス曲面

前節の例（1）、（2）で現れた曲面の方程式は似た形をしている。これらは **Hutchinson-Göpel 型**と呼ばれる族に所属している。まずは、次の定理を思い出す。

定理 5.1. [4] 種数 2 の非特異射影曲線 C に付随したヤコビアンクンマー曲面を $X = Km(C)$ で表すことにする。曲線 C が十分に一般のとき、$K3$ 曲面 X は同型を除きちょうど 31 個のエンリケス曲面の二重被覆になっていて、それらを与える自由対合が次のように分類できる。

- 偶テータ指標に付随した 10 個のスイッチ。
- 共役を除き 15 個存在する Hutchinson-Göpel 対合。
- 共役を除き 6 個存在する Hutchinson-Weber 対合。

定義 5.2. エンリケス曲面 S が Hutchinson-Göpel 型であるとは、S が（一般とは必ずしも限らない）種数 2 の曲線のヤコビアンクンマー曲面の Hutchinson-Göpel 対合から得られるエンリケス曲面と同型なときをいう。

定義によりこれらのエンリケス曲面の周期はわかりやすい位置にあり、しかも次のような六次曲面表示を持つことがわかる：

$$(x^2+y^2+z^2+t^2)xyzt+\Big(\frac{A}{x^2}+\frac{B}{y^2}+\frac{C}{z^2}+\frac{D}{z^2}\Big)x^2y^2z^2t^2, \tag{5.1}$$

ここで $A,\cdots,D$ は $ABCD=1$ を満たすパラメータである。

前節で与えた例（1）、（2）がどちらもこの族から来ていることは容易にわかる。さらに、方程式をよく見ると、実は二つの族は $a^2=1, b^2=\sqrt{-1}$ なる点で共通部分を持つ。これは興味深いエンリケス曲面の存在を示唆する。

定義 5.3. 六次式

$$(x^2+y^2+z^2+t^2)xyzt+\sqrt{-1}\Big(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2}\Big)x^2y^2z^2t^2$$

の特異点解消として得られる曲面を octahedral エンリケス曲面という。

名前の由来は、ヤコビアンクンマー曲面のもとになる曲線 C が球面 $(\simeq \mathbb{P}^1)$ に内接する正八面体の 6 つの頂点で分岐する二重被覆になっているところからである。

この octahedral エンリケス曲面には座標の置換による $\mathfrak{S}_4$ と、次の形の対合の族が作用している。$\varepsilon=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_4)\in\{\pm1\}^4$ に対して

$$\sigma_\varepsilon\colon (x,y,z,t)\mapsto(\varepsilon_1x^\eta,\varepsilon_2y^\eta,\varepsilon_3z^\eta,\varepsilon_4t^\eta),$$

ここで $\eta=\varepsilon_1\cdots\varepsilon_4$ とおいた。射影座標なので $\varepsilon=(-1,-1,-1,-1)$ は作用の核に入っていることを考えると、S には位数 $2^6\cdot 3$ の群 $C_2^3.\mathfrak{S}_4$ が作用していることがわかり、この中に二つのマシュー型極大群作用 $C_2\times C_4$ と $C_2\times\mathfrak{A}_4$ が隠れていることになる。

参考文献

[1] S. Kondo, Niemeier lattices, Mathieu groups, and finite groups of symplectic automorphisms of $K3$ surfaces, Duke Math. J., **92** (1998), 593-598.

[2] S. Mukai, Finite groups of automorphisms of K3 surfaces and the Mathieu group, Invent. Math., **94** (1988), 183-221.

[3] V. V. Nikulin, Finite automorphism groups of Kähler $K3$ surfaces (English translation). Trans. Moscow Math. Soc., Issue **2** (1980), 75-137.

[4] H. Ohashi, Enriques surfaces covered by Jacobian Kummer surfaces, Nagoya Math. J., **195** (2009), 165-186.