対数的標準特異点の F 純性について

高木 俊輔 (東京大学大学院数理科学研究科)*

Fedder, 原, Mehta–Srinivas, Schwede, Smith, 渡辺等によって，極小モデル理論に現れる特異点とフロベニウス写像を用いて定義される正標数の特異点 (F 特異点) の間に密接な関係があることが分かってきた．この小文では，対数的標準特異点と F 純特異点の対応に関する最近の進展について解説する．

1 特異点の定義

最初に対数的標準特異点と F 純特異点の定義を復習する．

1.1 対数的標準特異点

X を標数 0 の体上定義された $\mathbb{Q}$-Gorenstein 正規代数多様体とする．$\pi : \widetilde{X} \to X$ を $\mathrm{Exc}(\pi)$ が単純正規交差因子になるような X の特異点解消とする．このとき

$$K_{\widetilde{X}} = \pi^* K_X + \sum_i a_i E_i$$

と書ける．ただし 各 E_i は $\widetilde{X}$ 上の π 例外素因子，各 a_i は有理数である．全ての i に対して $a_i \geq -1$ (resp. $a_i > -1$) が成り立つとき， X は高々**対数的標準特異点** (resp. **対数的端末特異点**) しか持たないと言う．この定義は特異点解消 π の取り方に依らない．

例 1.1. $X = (x^a + y^b + z^c = 0) \subseteq \mathbb{C}^3$ とする．このとき，X が高々対数的標準特異点しか持たないことと $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 1$ が成り立つことは同値である．

1.2 F 純特異点

標数 $p > 0$ のスキーム X が F **有限**とは，(絶対) フロベニウス射 $F : X \to X$ が有限射になることである．完全体上有限型なスキームは F 有限である．

*E-mail: stakagi@ms.u-tokyo.ac.jp

定義 1.2. X を F 有限なスキームとする．X の任意の点 x に対しフロベニウス写像 $\mathcal{O}_{X,x} \to F_*\mathcal{O}_{X,x}$ が $\mathcal{O}_{X,x}$ 加群準同型として分裂するとき，X は高々 F **純特異点**しか持たないと言う．

例 1.3. $X = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[x,y,z]/(x^2+y^3+z^6)$ とする．X が高々 F 純特異点しか持たないことと $p \equiv 1 \bmod 6$ は同値である．

2 一般の多様体の場合

この節ではまず標数 0 から標数 $p>0$ への還元について簡単に説明する．詳細は [6], [9, Section 2] を参照されたい．

X を標数 0 の体 k 上有限型なスキームとする．$\mathbb{Z}$ 上，X の各アフィンチャートの定義多項式の係数で生成された有限生成 $\mathbb{Z}$ 部分代数 $A \subseteq k$ を考えると，A 上有限型なスキーム X_A で

$$X \cong X_A \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} k$$

となるものが構成できる．ここで generic freeness を適用すると，A を 適当な一元局所化 A_a と取り替えることにより，X_A は A 上平坦と仮定して良い．このような X_A を X の A 上の**モデル** (model) と言う．μ を $\operatorname{Spec} A$ を閉点としたとき，X_A の μ 上のファイバーを X_μ と書く．X_μ は標数 $p(\mu)$ の有限体 A/μ 上定義されたスキームであることに注意する．

X が 正則 (resp. $\mathbb{Q}$-Gorenstein, 正規) ならば，必要ならば A をさらに拡大することによって，X_A は正則 (resp. $\mathbb{Q}$-Gorenstein, 正規) となるようにとれる．特に全ての閉点 $\mu \in \operatorname{Spec} A$ に対して，X_μ は正則 (resp. $\mathbb{Q}$-Gorenstein, 正規) になる．

定義 2.1. X を標数 0 の体 k 上定義された代数多様体とする．X が**稠密 F 純型**とは，k の有限生成 $\mathbb{Z}$ 部分代数 A 上のモデル X_A が与えられたとき，$\operatorname{Spec} A$ の閉点の稠密部分集合 S が存在し，任意の $\mu \in S$ に対して X_μ は高々 F 純特異点しか持たない．この定義はモデル X_A の取り方によらない．

例 2.2. $X = (x^2+y^3+z^6=0) \subseteq \mathbb{C}^3$ とすると，例 1.3 より，X は稠密 F 純型になる．

F 純特異点は対数的標準特異点と対応することが予想されている．

予想 2.3. X を標数 0 の代数的閉体上定義された $\mathbb{Q}$-Gorenstein 正規代数多様体とする．このとき，X が高々対数的標準特異点しか持たないことと X が稠密 F 純型であることは同値である．

注意 2.4 ([4, Theorem 3.9])**.** X が稠密 F 純型ならば，X は高々対数的標準特異点しか持たないことは知られている．

注意 2.5. 次の場合に予想 2.3 が正しいことが知られている.

(1) ([8]) X が正規曲面の場合

(2) ([5]) $X=\mathbb{C}^n$ で, Δ が原点を通る非常に一般な超曲面の場合

この節の主結果を述べるには, 次の予想が必要になる.

予想 2.6 ([9, Conjecture 1.1]). V を標数 0 の代数的閉体 k 上定義された滑らかな n 次元射影代数多様体とする. k の有限生成 $\mathbb{Z}$-部分代数 A 上のモデル V_A が与えられたとき, 閉点の稠密な部分集合 $S\subseteq \operatorname{Spec} A$ が存在し, 任意の $\mu\in S$ に対して $H^n(V_\mu,\mathcal{O}_{V_\mu})$ へのフロベニウスの作用は全単射になる.

注意 2.7. 有限体上定義された滑らかな n 次元射影多様体 V_μ が Bloch–Kato の意味で通常 (ordinary) ならば, $H^n(V_\mu,\mathcal{O}_{V_\mu})$ へのフロベニウスの作用は全単射になる. V_μ が曲線もしくはアーベル多様体ならば, 逆も正しい.

注意 2.8. 予想 2.6 は V が種数 3 の曲線の場合ですら未解決である（種数が 2 以下の曲線の場合は正しいことが知られている）.

命題 2.9 (cf. [12, Theorem 2.10]). 予想 2.6 が正しければ, 予想 2.3 も正しい.

証明の方針. X を高々対数的標準特異点しか持たない正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 代数多様体とする. $\pi:\widetilde{X}\to X$ を $\mathrm{Exc}(\pi)$ が単純正規交差因子になるような X の特異点解消とする. このとき $\mathrm{Exc}(\pi)$ の全ての階層 (階層の定義は次節を参照せよ）に予想 2.6 を適用することにより, X が稠密 F 純型であることを導く. □

3 孤立特異点の場合

この節では, 孤立特異点の場合に対数的標準特異点と F 純特異点の対応を考察する. この節の結果は全ての藤野修氏との共同研究 [3] に基づいている.

予想 2.3 の特別な場合として, 次の予想を考える.

予想 3.1. $x\in X$ を標数 0 の代数的閉体上定義された正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点とし, x は X の孤立非対数的端末特異点であると仮定する. このとき, $x\in X$ が対数的標準特異点であることと $x\in X$ が稠密 F 純型であることは同値である.

孤立対数的標準特異点 $x\in X$ の不変量 $\mu(x\in X)$ が藤野 [2] によって導入された.

$x\in X$ を標数 0 の代数的閉体 k 上定義された対数的標準特異点とし, x は X の孤立非対数的端末特異点とする. さらに $x\in X$ は指数 1, つまり K_X は x において Cartier と仮定する. $f:Y\to X$ を $\operatorname{Supp} f^{-1}(x)$ と $\mathrm{Exc}(f)$ が共に単純正規交差因子になるような特異点解消とする（f は射影的とする）. このとき,

$$K_Y=f^*K_X+F-E$$

と書ける．ただし E, F は Y 上の有効因子で共通の既約成分を持たないとする．仮定より $E=\sum_{i\in I}E_i$ は Y 上の被約な単純正規交差因子になる．I の部分集合 $\{i_1,\ldots,i_l\}$ が存在して，W が $E_{i_1}\cap\cdots\cap E_{i_k}$ の既約成分になっているとき，W は E の**階層** (stratum) であるという．このとき，特異点 $x\in X$ の不変量 $\mu(x\in X)$ を次のように定義する:

$$\mu(x\in X):=\min\{\dim W \mid W \text{ は } E \text{ の階層 }\}.$$

この定義は特異点解消 f の取り方に依らない．

主定理を述べるために，次の予想を導入する．

予想 A_n. V を標数 0 の代数的閉体 k 上定義された高々有理特異点しか持たない n 次元射影代数多様体とし，K_V は線形的に自明であるとする．k の有限生成 $\mathbb{Z}$-部分代数 A 上のモデル V_A が与えられたとき，閉点の稠密な部分集合 $S\subseteq \operatorname{Spec}A$ が存在し，任意の $\mu\in S$ に対して $H^n(V_\mu,\mathcal{O}_{V_\mu})$ へのフロベニウスの作用は全単射になる．

注意 3.2. 予想 A_n は予想 2.3 から従う．実際，特異点解消 $\pi:\widetilde{V}\to V$ をとると，V は高々有理特異点しか持たないので，$H^n(V,\mathcal{O}_V)\cong H^n(\widetilde{V},\mathcal{O}_{\widetilde{V}})$ となる．ここで予想 2.3 を $\widetilde{V}$ に適用する．k の有限生成 $\mathbb{Z}$ 部分代数 A 上のモデル $\pi_A:\widetilde{V}_A\to V_A$ が与えられたとき，$\operatorname{Spec}A$ の閉点の稠密な部分集合 S が存在し，任意の $\mu\in S$ に対して $H^n(\widetilde{V}_\mu,\mathcal{O}_{\widetilde{V}_\mu})$ へのフロベニウスの作用は全単射になる．同型 $H^n(\widetilde{V}_\mu,\mathcal{O}_{\widetilde{V}_\mu})\cong H^n(V_\mu,\mathcal{O}_{V_\mu})$ は π_μ によって誘導されるので，フロベニウス作用と可換である．よって任意の $\mu\in S$ に対して $H^n(V_\mu,\mathcal{O}_{V_\mu})$ へのフロベニウスの作用は全単射になる．

補題 3.3. $n\leq 2$ のとき予想 A_n は正しい．

証明．$n=1$ のときは Serre の結果 [11] に他ならない．$n=2$ とする．$\pi:\widetilde{V}\to V$ を最小特異点解消とすると，$\widetilde{V}$ はアーベル曲面か K3 曲面になる．k の有限生成 $\mathbb{Z}$ 部分代数 A 上のモデル $\pi_A:\widetilde{V}_A\to V_A$ が与えられたとき，アーベル曲面の場合は Ogus [10], K3 曲面の場合は Bogomolov–Zarhin [1] もしくは Joshi–Rajan [7] により，$\operatorname{Spec}A$ の閉点の稠密な部分集合 S が存在し，任意の $\mu\in S$ に対して $H^2(\widetilde{V}_\mu,\mathcal{O}_{\widetilde{V}_\mu})$ へのフロベニウスの作用は全単射になる．V は高々有理特異点しか持たないので，適当に S を取り替えることにより，任意の $\mu\in S$ に対して $H^n(\widetilde{V}_\mu,\mathcal{O}_{\widetilde{V}_\mu})\cong H^n(V_\mu,\mathcal{O}_{V_\mu})$ でこの同型はフロベニウス作用と可換であるとして良い．よって 任意の $\mu\in S$ に対して $H^2(V_\mu,\mathcal{O}_{V_\mu})$ へのフロベニウスの作用は全単射になる． □

次がこの節の主定理である．

定理 3.4 ([3, Theorem 3.3]). $x\in X$ を標数 0 の代数的閉体上定義された指数 1 の対数的標準特異点とし，x は X の孤立非対数的端末特異点であると仮定する．$\mu:=\mu(x\in X)$ と置いたとき，予想 A_μ が成り立つならば，$x\in X$ は稠密 F 純型である．特に $\mu(x\in X)\leq 2$ ならば，$x\in$ は稠密 F 純型である．

証明の方針. $d=\dim X$ とする. $x\in X$ の dlt 爆発 $g:Z\to X$ を考える. g は次の性質を満たす射影的双有理射である.

(i) $K_Z+D=f^*K_X$, ただし D は X 上の被約な因子,

(ii) (Z,D) は $\mathbb{Q}$ 分解的な因子対数的端末対 (dlt pair),

(iii) g は x の外で小さな射 (small morphism),

(iv) Z は高々標準特異点しか持たない.

このとき (Z,D) の極小対数的標準中心 V で次を満たすものがとれる.

(v) V は高々有理特異点しか持たない射影多様体,

(vi) $\dim V=\mu=\mu(x\in X)$,

(vii) $K_V\sim 0$,

(viii) $H^\mu(V,\mathcal{O}_V)\cong H^{d-1}(D,\mathcal{O}_D)$.

この V に予想 A_μ を適用して, $x\in X$ が稠密 F 純型であることを導く. その際, スケール付き K_Z 極小モデルプログラムを走らせる. □

系 3.5. $\dim X=3$ のとき, 予想 3.1 は正しい.

証明. 対数的標準特異点ならば稠密 F 純型であることを証明する. 指数 1 被覆をとることにより, K_X は x において Cartier として良い. 定義から $\mu(x\in X)\le\dim X-1=2$ なので, 定理 3.4 より, $x\in X$ は稠密 F 純型になる. □

系 3.6. 予想 3.1 と予想 A_n が全ての n で成り立つことは同値である.

証明. 指数 1 被覆をとることにより, K_X は x において Cartier として良い. 定理 3.4 と注意 2.4 より, 予想 A_n が全ての n で成り立つならば, 予想 3.1 は正しい. よって逆を示す.

V を標数 0 の代数的閉体 k 上定義された高々有理特異点しか持たない n 次元射影代数多様体とし, K_V は線形的に自明であるとする. H を V 上の豊富な因子とし, $R=\bigoplus_{m\ge 0}H^0(V,\mathcal{O}_V(mH))$ とおく. このとき $X=\operatorname{Spec}R$ は高々対数的標準特異点しか持たず, X の頂点は孤立非対数的端末特異点になっている. そこで予想 3.1 を X に適用する. k の有限生成 $\mathbb{Z}$ 部分代数 A 上のモデル $X_A=\operatorname{Spec}R_A$ が与えられたとき, $\operatorname{Spec}A$ の閉点の稠密部分集合 S が存在し, 任意の $\mu\in S$ に対して R_μ は F 純環になる. 一般に, 正標数の体上有限生成な次数付環 ($S=\bigoplus_{n\ge 0}S_n, \mathfrak{m}_S=\bigoplus_{n\ge 1}S_n$) が F 純ならば, S の局所コホモロジー $H^{\dim S}_{\mathfrak{m}_S}(S)$ へのフロベニウス作用は単射になる. $H^{n+1}_{\mathfrak{m}_\mu}(R_\mu)$ の次数 0 部分は $H^n(V,\mathcal{O}_V)$ に他ならないので, 任意の $\mu\in S$ に対し $H^n(V_\mu,\mathcal{O}_{V_\mu})$ へのフロベニウスの作用は単射になる. □

参考文献

[1] F. Bogomolov and Y. Zarhin, Ordinary reduction of $K3$ surfaces, Cent. Eur. J. Math. **7**, (2009), no.3, 73–212.

[2] O. Fujino, On isolated log canonical singularities with index one, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **18** (2011), 299–323.

[3] O. Fujino and S. Takagi, On the F-purity of isolated log canonical singularities, arXiv:1112.2383, submitted.

[4] N. Hara and K.-i. Watanabe, F-regular and F-pure rings vs. log terminal and log canonical singularities, J. Algebraic. Geom. **11** (2002), no. 2, 363–392.

[5] D. Hernandez, F-purity versus log canonicity for polynomials, arXiv:1112.2423.

[6] M. Hochster and C. Huneke, Tight closure in equal characteristic zero, preprint.

[7] K. Joshi and C. S. Rajan, Frobenius splitting and ordinary, arXiv:math/0110070, Int. Math. Res. Not. **2003**, no. 2, 109–121.

[8] V. B. Mehta and V. Srinivas, Normal F-pure surface singularities, J. Algebra **143** (1991), 130–143.

[9] M. Mustaţă and V. Srinivas, Ordinary varieties and the comparison between multiplier ideals and test ideals, arXiv:1012.2818, to appear in Nagoya Math. J.

[10] A. Ogus, Hodge cycles and crystalline cohomology, Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties, Lecture Notes in Math., vol. 900, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981, 357–414.

[11] J. P. Serre, Groupes de Lie l-adiques attachés aux courbes elliptiques, Les Tendances Géom. en Algébre et Théorie des Nombres, Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1966, 239–256.

[12] S. Takagi, Adjoint ideals and a correspondence between log canonicity and F-purity, arXiv:1105.0072, submitted.