代数幾何学シンポジウム記録
2012年度 pp.90-97

The Mukai conjecture for log Fano manifolds

藤田健人*（京都大学数理解析研究所）

概要

本稿では, ファノ多様体 (Fano manifold) の自然な一般化の一つである「対数的ファノ多様体 (log Fano manifold)」について考察する. 特に, ファノ多様体についての向井予想 (the Mukai conjecture) から対数的ファノ多様体についての向井予想が導出されることを紹介したい.

1 導入

この報告集では, 基礎体は常に複素数体 $\mathbb{C}$ とする. また, 極小モデル理論の用語は [KM98] に従って用いる.

1.1 ファノ多様体

定義 1.1. 非特異射影多様体 X の反標準因子, つまり $-K_X$, が豊富なとき, X を**ファノ多様体 (Fano manifold)** と言う. 本稿では常にファノ多様体に非特異性を要求することに注意する.

本稿では特に, ファノ多様体の分類及び評価について主眼を置いて考える. より詳しく言うと, ファノ多様体 (や, その一般化である「対数的ファノ多様体」) について, **ピカール数** (ρ_X で表す) の評価や, それに関連した分類についてを考察したい.

これらの問題を考えるにあたり, まずファノ多様体は 3 次元以下では完全に分類されている ([Isk77, MM81]) が, それより大きい次元ではあまり多くのことが分かっていない事に注意したい. 故に, 新たな不変量を導入し, その不変量について条件を課した高次元ファノ多様体についてを考えるということは理に適っている.

定義 1.2. ファノ多様体 X に対し, X の**指数 (index)** を, r_X で表し, 以下で定義する:

$$r_X := \max\{r \in \mathbb{Z}_{>0} | -K_X \sim rL \quad ({}^{\exists}L \in \mathrm{Pic}(X))\}.$$

事実 1.3. 以下のファノ多様体 X は分類されている:

(1) [KO73, Fjt90, Isk77, MM81, Muk89, Wiś90a, Wiś90b, Wiś91a] $r_X \geq \dim X - 2$.
(2) [Wiś90b, Wiś91a] $r := r_X \geq (\dim X + 1)/2$ かつ $\rho_X \geq 2$;
   (a) [Wiś90b] もし $r \geq (\dim X + 2)/2$ なら, $r = (\dim X + 2)/2$ で, $X \simeq \mathbb{P}^{r-1} \times \mathbb{P}^{r-1}$.
   (b) [Wiś91a] もし $r = (\dim X + 1)/2$ なら, $X \simeq \mathbb{Q}^r \times \mathbb{P}^{r-1}$, $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^r}(\mathcal{O}^{\oplus r-1} \oplus \mathcal{O}(1))$, もしくは $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^r}(T_{\mathbb{P}^r})$. (ここで $\mathbb{Q}^n$ は $\mathbb{P}^{n+1}$ 内の非特異二次超曲面.)

本稿の主定理の一つは, 上記の事実 1.3 の対数的ファノ多様体への拡張版 (定理 3.5 及び系 3.6) である.

* fujita@kurims.kyoto-u.ac.jp

1.2 向井予想

上記の事実 1.3 (2a) は, ファノ多様体が同じ次元の二つの射影空間の積と同型となる判定法を与えた, と言い換えることができる. 一般にこの類の主張は, 向井予想型の結果と呼ばれ, 広く研究されている. 以下に向井氏によるオリジナルの予想を述べる.

予想 1.4 (向井予想 [Muk88])**.** X をファノ多様体としたとき, 以下の不等式が成立するであろう :

$$\rho_X(r_X - 1) \leq \dim X.$$

更に, もし等号が成立するならば, $X \simeq (\mathbb{P}^{r_X-1})^{\rho_X}$ だろう.

筆者は最近, この向井予想を「分割して考える」ことが自然な方法の一つなのではないか, としばしば主張している. より具体的には, 以下の予想 M^n_ρ を (各自然数 n, ρ に対して) 考えることが自然なのではないか, ということである.

予想 1.5 (予想 M^n_ρ)**.** n, ρ を自然数とする. もし n 次元ファノ多様体 X が

- $\rho_X \geq \rho$ かつ
- $r := r_X \geq (n+\rho)/\rho$

を満たすならば, $X \simeq (\mathbb{P}^{r-1})^\rho$ だろう.

明らかに, 向井予想が正しいということと, 予想 M^n_ρ が任意の自然数 n, ρ に対して正しいということは同値である. 以下本稿では, この予想 M^n_ρ (より正確にはこの予想の対数的ファノ多様体版) について考えたい.

先ほどの事実 1.3(2a) は, 予想 M^n_2 の肯定的な結果に他ならない. 現在では, 以下のことが知られている (しかしながら一般の場合は未解決である).

事実 1.6. 予想 M^n_ρ は, $n \leq 5$ ([ACO04]) もしくは $\rho \leq 3$ ([NO10]) のときは正しい.

1.3 対数的ファノ多様体

以下で, 本稿の主役となる対数的ファノ多様体を定義する.

定義 1.7. 対 (X, D) が n 次元**対数的ファノ多様体 (log Fano manifold)** であるとは, 以下で定義される:

- X は n 次元非特異射影多様体,
- D は X 内の被約かつ単純正規交叉因子 (simple normal crossing divisor), そして
- 反対数的標準因子, つまり $-(K_X + D)$, が豊富.

特に日本語で述べる場合, 「対数的ファノ多様体」という呼称は一般的でなく, 更にこの呼称は他の対象と誤解を招きやすいので注意が必要である. 本稿では, X が非特異かつ D が被約単純正規交叉因子のときのみを考察する.

注意 1.8.

- 対数的ファノ多様体の定義に於いて, もし $D = 0$ ならば, 対 $(X, 0)$ はファノ多様体ということに他ならない. 故に対数的ファノ多様体は, 非常に自然なファノ多様体の一般化の一つと見ることが

できる.

- 対数的ファノ多様体は, 前田氏 ([Mae86]) によって既に考察されていた対象である. 前田氏は, 3 次元以下の対数的ファノ多様体 (X, D) で $D \neq 0$ なるものをすべて分類した. しかしながら, (ファノ多様体同様) 高次元の対数的ファノ多様体は多くのことが分かっていない.

高次元の対数的ファノ多様体について分類や (ピカール数の) 評価を考えるにあたり, ファノ多様体同様に, 対数的ファノ多様体に対しても指数を定義することは最早自然な発想であろう.

定義 1.9. 対数的ファノ多様体 (X, D) に対し, (X, D) の**指数 (index)** を, $r_{(X,D)}$ で表し, 以下で定義する:

$$r_{(X,D)} := \max\{r \in \mathbb{Z}_{>0} | -(K_X + D) \sim rL \quad (^{\exists}L \in \mathrm{Pic}(X))\}.$$

ここで, 対数的ファノ多様体についての向井予想を以下で定めることにする.

予想 1.10 (予想 LM^n_ρ [Fjt12b])**.** *n, ρ を 2 以上の自然数とする. もし n 次元対数的ファノ多様体 (X, D) が $D \neq 0$ で, さらに以下を満たすとする:*

- $\rho_X \geq \rho$ かつ
- $r := r_{(X,D)} \geq (n + \rho - 1)/\rho$.

このとき

$$X \simeq \mathbb{P}_{(\mathbb{P}^{r-1})^{\rho-1}}(\mathcal{O}^{\oplus r} \oplus \mathcal{O}(m_1, \ldots, m_{\rho-1}))$$
$$D \simeq \mathbb{P}_{(\mathbb{P}^{r-1})^{\rho-1}}(\mathcal{O}^{\oplus r}),$$

ここで $m_1 \ldots, m_{\rho-1} \geq 0$ で, 埋め込み $D \subseteq X$ は, $\mathcal{O}^{\oplus r} \oplus \mathcal{O}(m_1, \ldots, m_{\rho-1}) \to \mathcal{O}^{\oplus r}$ なる標準的な射影により得られたもの, となるだろう.

この予想は, $D \neq 0$ を課しているので, 予想 M^n_ρ で考えている対象とは真に異なる事に注意する. また予想 LM^n_ρ は, 指数についての条件が予想 M^n_ρ での条件より弱いことにも注意しておく. この予想 LM^n_ρ は, 前田氏の分類結果から $n = 2$ のときは正しい.

2 例

まず, 対数的ファノ多様体のいくつかの例を見る.

例 2.1. (X, D) が 1 次元対数的ファノ多様体とする. このとき X は非特異射影曲線で, また $-(K_X + D)$ が豊富というのはその次数が正ということに他ならない. Riemann-Roch の定理より $\deg(-(K_X + D)) = 2 - 2g - \deg D$ (ここで g は X の種数) が成立するので, $X \simeq \mathbb{P}^1$ かつ, $D = 0$ もしくは 1 点, しかありえない.

例 2.2. $(n-1)$ 次元ファノ多様体 Y, そして Y 上のネフ (nef) 直線束 L を任意にとる. このとき, $(X, D) := (\mathbb{P}_Y(\mathcal{O} \oplus L), \mathbb{P}_Y(\mathcal{O}))$ (但し埋め込み $D \subseteq X$ は $\mathcal{O} \oplus L \to \mathcal{O}$ なる標準的な射影より与える) なる対は常に n 次元対数的ファノ多様体となる.

例 2.3. 例 2.2 の特別な場合として, $(X, D) := (\mathbb{P}_{\mathbb{P}^{n-1}}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(m)), \mathbb{P}_{\mathbb{P}^{n-1}}(\mathcal{O}))$ のとき $(m \geq 0)$ を考える. このとき, 簡単な計算から, 反対数的標準因子の自己交点数 $(-(K_X + D))^n = \{(n + m)^n - m^n\}/m$ となり, $n \geq 3$ ならいくらでも大きくなりうる.

3 主定理

本稿の主定理を以下に述べる.

定理 3.1 ([Fjt12b])**.** (X, D) を, 対数的ファノ多様体で, $D \neq 0$ とする. このとき, 次のどちらかが成立 :

(1) 制限から誘導される自然なピカール群の間の準同型 $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(D)$ が単射, もしくは
(2) X は $\mathbb{P}^1$-束構造 $\pi \colon X \to Y$ をもち, D は π の切断 (*section*).

ここで定理 3.1 (2) のときを詳しく見よう. このとき, D は Y と同型なので, 特に D は既約かつ非特異. 同伴性より, $\mathcal{O}_D(-K_D) \simeq \mathcal{O}_X(-(K_X + D))|_D$ が成立. よって, D 及び Y はファノ多様体であることもわかる. 更に, X は $\pi_*\mathcal{O}_X(D)$ なる Y 上の階数 2 のベクトル束の射影化で得られていることにも注意する.

また, 定理 3.1 (2) のとき, (X, D) の指数は必ず 1 になることにも注意する. なぜなら, $l \subseteq X$ を π のファイバー ($\simeq \mathbb{P}^1$) とすると, $(-(K_X + D) \cdot l) = 2 - 1 = 1$ となる為, $-(K_X + D)$ はこれ以上割り切ることができないからである. これより, もし対数的ファノ多様体 (X, D) が $r_{(X,D)} \geq 2$ を満たすならば, 定理 3.1 (1) の場合しか起こりえない. 以上の考察及び後で述べる命題 4.1 (4) 等から, 次の系を得る.

系 3.2. 対数的ファノ多様体 (X, D) が, もし $r_{(X,D)} \geq 2$ なら, 任意の D の既約成分 D_1 に対し, 制限から誘導される自然なピカール群の間の準同型 $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(D_1)$ は単射となる.

次の定理は, 標語的には「向井予想から対数版向井予想が従う」ということを主張する.

定理 3.3 ([Fjt12b])**.**
$$\mathrm{M}^n_\rho + \mathrm{LM}^n_\rho \Rightarrow \mathrm{LM}^{n+1}_\rho .$$

この定理と事実 1.6 より, 直ちに次の系を得る.

系 3.4. 予想 LM^n_ρ は, $n \leq 6$ もしくは $\rho \leq 3$ のときは正しい.

最後に, 事実 1.3 (2) の対数的ファノ多様体版を述べる.

定理 3.5 ([Fjt12a])**.** n 次元対数的ファノ多様体 (X, D) で, $r_{(X,D)} \geq n/2$, $\rho_X \geq 2$ かつ $D \neq 0$ なるものを分類した. (具体的なリストは, 昨年の代数幾何学城崎シンポジウムでのポスター発表で与えた ([藤田 11]) ので割愛する.)

この定理 3.5 と既存の結果等を組み合わせると, 事実 1.3 (1) の対数的ファノ多様体版が得られる.

系 3.6. 対数的ファノ多様体 (X, D) で, $r_{(X,D)} \geq \dim X - 2$ なるものが分類された.

定理 3.5 では, X のピカール数が 2 以上の場合しか考察していないが, ピカール数が 1 の場合は寧ろ (系 3.6 を考える場合は) 状況が簡単になっている. というのも, 対数的ファノ多様体 (X, D) で $D \neq 0$ なるものに対し, もし X のピカール数が 1 ならば, X それ自身ファノ多様体になり, $r_X > r_{(X,D)}$ が成立するからである. なぜなら, 上記の仮定の下では D は豊富となり, $-K_X = -(K_X + D) + D$ は「より豊富」となる為である.

4　基本性質

対数的ファノ多様体の基本性質を以下に述べる．明示的に述べられているもの以外の文献は, [Mae86] もしくは [Fjt12a] を見て頂きたい．

命題 4.1. (X, D) を n 次元対数的ファノ多様体とし，D の既約分解を $D = \sum_{i=1}^{m} D_i$ とする．このとき以下が成立する：

(1) 自然な準同型 $\mathrm{Pic}(X) \to H^2(X^{\mathrm{an}}; \mathbb{Z})$ が同型で，これらはどちらも有限生成で捩れを持たないアーベル群である．特に X のピカール数は $\mathrm{Pic}(X)$ の階数に等しい．

(2) 任意の i, j に対し，$D_i \cap D_j \neq \emptyset$ が成立．更に言うと，(X, D) の極小 *lc* センターはただ一つに定まる．これより特に $m \leq n$ が成立．

(3) 任意の $1 \leq i \leq m$ に対し，$E_i := \bigcup_{j \neq i}(D_i \cap D_j) \subseteq D_i$ とおく．このとき同伴性から，(D_i, E_i) は $(n-1)$ 次元対数的ファノ多様体で，$r_{(X,D)} | r_{(D_i,E_i)}$ が成立する．

(4) 以下の列は完全：

$$0 \to \mathrm{Pic}(D) \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{1 \leq i \leq m} \mathrm{Pic}(D_i) \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{1 \leq i < j \leq m} \mathrm{Pic}(D_i \cap D_j),$$

ここで α は制限より誘導される自然な準同型，そして $\beta((L_i)_i) := (L_i|_{D_i \cap D_j} \otimes L_j^{\vee}|_{D_i \cap D_j})_{i<j}$ で与えられる．

(5) (錐定理及び収縮定理) 曲線の錐 $\mathrm{NE}(X)$ は有限本の端射線で張られる．また，各端射線 $R \subseteq \mathrm{NE}(X)$ に対し，R は X 上の有理曲線のクラスで張られ，また R に付随した収縮射 $\mathrm{cont}_R \colon X \to Y_R$ が存在する．

(6) [Zha06] X は有理連結多様体 (*rationally connected variety*)．

(7) [BCHM10] X は森夢空間 (*Mori dream space*)．(森夢空間の定義は [HK00] を見て頂きたい.)

5　証明の方針

以下, 3 章の定理の証明のあらすじを述べる．

5.1　定理 3.1 の証明の方針

この証明のアイデアは, Casagrande 氏の一連の結果 [Cas09, Cas11] に基づく．Casagrande 氏はファノ多様体上の因子について同様の議論を展開しているのだが, 今回のセッティングだと, (考えるべき因子がはっきりしている為) 簡潔な議論で証明することができる．以下 (X, D) を対数的ファノ多様体で, $D \neq 0$ とする．

Step 1 まず, 命題 4.1 (7) でみたように, X は森夢空間だった．これより, $(-D)$-MMP を走らせることができる．この MMP は (D がゼロでない有効因子ゆえ) 必ずファイバー型で終わる．また, $-(K_X + D)$ でスケールをつけることにより, この $(-D)$-MMP は $(K_X + D)$-MMP であるようにもとれる．この MMP を

$$X = X^0 \dashrightarrow X^1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X^k \xrightarrow{\pi} Y$$

で表すことにする．

Step 2 次に, $D^i \subseteq X^i$ を, D の固有変換 (strict transform) とする．このとき, (詳しくは述べないが) 各 MMP のステップで D^i の中の曲線が潰れることがわかる．これは収縮射のファイバーの次元の評価等から従う (この MMP は K_X-MMP でもあるので, 各 X^i は高々端末的故, ファイバー次元の評価がうまくいく)．この性質より, $\dim\bigl(\mathrm{Coker}(\mathrm{N}_1(D^i) \to \mathrm{N}_1(X^i))\bigr)$ は各 $0 \le i \le k$ で不変なことが証明できる．

Step 3 この MMP は $(-D)$-MMP だったので, $\pi|_{D^k}\colon D^k \to Y$ は全射．よって合成 $\mathrm{N}_1(D^k) \to \mathrm{N}_1(X^k) \to \mathrm{N}_1(Y)$ も全射．ここで , 全射 $\mathrm{N}_1(X^k) \to \mathrm{N}_1(Y)$ の核は 1 次元なので, 次のどちらかが成立する:

(1) $\mathrm{N}_1(D^k) \to \mathrm{N}_1(X^k)$ は全射, もしくは
(2) D^k 内のどの曲線も π で潰れない．

まず (1) のときは, Step 2 より $\mathrm{N}_1(D) \to \mathrm{N}_1(X)$ も全射．よって $\mathrm{N}^1(X) \to \mathrm{N}^1(D)$ は単射．ここで命題 4.1 (1) より $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{N}^1(X)$ は単射．よって可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{N}^1(X) & \longrightarrow & \mathrm{N}^1(D) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Pic}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(D) \end{array}$$

に於いて, 合成が単射ゆえ $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(D)$ も単射．

次に (2) のときを考える．このとき, π のファイバーの次元は常に 1．(なぜなら, もし 2 次元以上のファイバー F をもつと, F と D^k との交わりは曲線を含んでしまい矛盾.) ここでもし $k > 0$ と仮定すると, π のファイバー内の曲線 $l^k \subseteq X^k$ で, 有理写像 $X^k \dashrightarrow X$ の不確定部分と交わりつつ含まれないようなものが取れる．このとき負性補題 (negativity lemma) より, $(-(K_X + D)\cdot l) < (-(K_{X^k} + D^k)\cdot l^k)$ が成立 (ここで $l \subseteq X$ は l^k の固有変換)．l^k は π のファイバー内でとったので, $(-(K_{X^k} + D^k)\cdot l^k) \le 2 - 1 = 1$ となるが, $-(K_X + D)$ は豊富な Cartier 因子ゆえ $(-(K_X + D)\cdot l)$ は自然数値しかとりえず矛盾．よって $k = 0$ しかありえない．このとき $\pi\colon X \to Y$ は, 一般ファイバー $C \subseteq X$ に対し, $C \simeq \mathbb{P}^1$, $(-K_X \cdot C) = 2$ かつ $(D \cdot C) = 1$ が (π が $(K_X + D)$-負かつ D-正であることから) 確かめられる．よって [Fjt87] より π は $\mathbb{P}^1$-束で D は π の切断であることが証明できる．

5.2 定理 3.3 の証明の方針

予想 M^n_ρ 及び LM^n_ρ の仮定の下, 予想 LM^{n+1}_ρ を導出したい．以下, (X, D) を, 予想 LM^{n+1}_ρ の仮定を満たす対数的ファノ多様体, つまり $(n+1)$ 次元対数的ファノ多様体で $D \neq 0$ なもの, 更に $\rho_X \ge \rho$ かつ $r := r_{(X,D)} \ge ((n+1)+\rho-1)/\rho$ とする．

Step 1 まず, D の任意の既約成分 D_1 をとる．このとき対 (D_1, E_1) は, 命題 4.1 (3) より n 次元対数的ファノ多様体で $r_{(D_1,E_1)} \ge r \ge (n+\rho)/\rho$ が成立．更に系 3.2 より $\rho_{D_1} \ge \rho_X (\ge \rho)$ が成立．よって LM^n_ρ を対 (D_1, E_1) に適用することで, $E_1 = 0$, つまり $D = D_1$ でなくてはならないことがわかる．この D に M^n_ρ を適用することで, $D \simeq (\mathbb{P}^{r-1})^\rho$ かつ $\rho_D = \rho_X = \rho$ が成立する．

Step 2 次に, D と正に交わる端射線 $R \subseteq \mathrm{NE}(X)$ を任意にとり, R の極小有理曲線 (minimal rational curve) を $C_R \subseteq X$ とかく．R に付随する収縮射を $\pi\colon X \to Y$ とかくと, 以下が成立:

- π の D への制限の, 像への全射 $\pi|_D\colon D \to \pi(D)$ は代数ファイバー空間 (algebraic fiber space) (これは $R^1\pi_*\mathcal{O}_X(-D) = 0$ より従う)．

- $\pi|_D\colon D \to \pi(D)$ は同型射ではない (これは 5.1 章の Step 2 と同様に示すことができる).

ここで $D \simeq (\mathbb{P}^{r-1})^\rho$ だったので, 上記の事実から特に $\dim D > \dim \pi(D)$ がわかる. よって π はファイバー型 (そうでないなら π は D を潰す因子収縮射でないといけないが, 今, D と正に交わるように端射線を選んでいたので矛盾). よって, 任意の π のファイバーが D と交わるので $Y = \pi(D)$ も成立. $\rho_Y = \rho - 1$ ゆえ, $\pi|_D\colon (\mathbb{P}^{r-1})^\rho \to (\mathbb{P}^{r-1})^{\rho-1}$ (一番目の成分を潰す射影) とみることができる.

Step 3 収縮射 π の任意のファイバー F をとる. このとき,

- 上で得られた $\pi|_D$ の明示的な記述より, $\dim(F \cap D) = r - 1$ が成立. よって, $\dim F \leq r$ が成立する.
- [Wiś91b] により, $\dim F \geq (-K_X \cdot C_R) - 1$ が知られている. ここで, 指数の定義から, ある豊富な Cartier 因子 L が存在し, $-(K_X + D) \sim rL$ とかける. このとき, $(-K_X \cdot C_R) - 1 = r(L \cdot C_R) + (D \cdot C_R) - 1 \geq r + 1 - 1 = r$ が成立.

これらより, $\dim F = r$, $(-K_X \cdot C_R) = r + 1$ かつ $(D \cdot C_R) = 1$ が成立する. よって, [Fjt87] より, π は $((\mathbb{P}^{r-1})^{\rho-1}$ 上の) $\mathbb{P}^r$-束で, $\pi|_D$ は部分 $\mathbb{P}^{r-1}$-束であることが示され, あとは容易に結論を得られる.

5.3 定理 3.5 の証明の方針

これは基本的に定理 3.3 の証明と同じである. つまり, まず D の構造が帰納的な議論によりわかり, あとは D と正に交わる端射線に付随する収縮射を詳しく見ることで X の構造がわかる.

6 謝辞

代数幾何学城崎シンポジウムにて講演の機会を下さった世話人の永井保成さん, 松下大介さん, 山木壱彦さんに感謝致します. 筆者は日本学術振興会特別研究員として補助を受けています.

参考文献

[ACO04] M. Andreatta, E. Chierici and G. Occhetta, *Generalized Mukai conjecture for special Fano varieties*, Cent. Eur. J. Math. **2** (2004), no. 2, 272–293.

[BCHM10] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon and J. M$^{\mathrm{c}}$Kernan, *Existence of minimal models for varieties of log general type*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 2, 405–468.

[Cas09] C. Casagrande, *On Fano manifolds with a birational contraction sending a divisor to a curve*, Michigan Math. J. **58** (2009), no. 3, 783-805.

[Cas11] C. Casagrande, *On the Picard number of divisors in Fano manifolds*, to appear in Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.

[Fjt87] T. Fujita, *On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive*, Algebraic Geometry, Sendai, 1985. Adv. Stud. Pure Math. **10**, 167–178. North-Holland, Amdterdam, 1987.

[Fjt90] T. Fujita, *Classification theories of polarized varieties*, London Mathematical Society Lecture Note Series **155**, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[藤田 11] K. Fujita, *On simple normal crossing Fano varieties and logarithmic Fano varieties with large index*, 代数幾何学城崎シンポジウム報告集 (2011), p.155.

[Fjt12a] K. Fujita, *Simple normal crossing Fano varieties and log Fano manifolds*, arXiv:1206.1994.

[Fjt12b] K. Fujita, *The Mukai conjecture for log Fano manifolds*, arXiv:1206.2475.

[HK00] Y. Hu and S. Keel, *Mori dream spaces and GIT*, Michigan Math. J. **48** (2000), 331–348.

[Isk77] V. A. Iskovskikh, *Fano threefolds. I, II*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **41** (1977), no. 3, 516–562, 717; **42** (1978), no. 3, 506–549.

[KM98] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math, vol.134, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[KO73] S. Kobayashi and T. Ochiai, *Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics*, J. Math. Kyoto Univ. **13**, (1973), 31–47.

[Mae86] H. Maeda, *Classification of logarithmic Fano threefolds*, Compositio Math. **57** (1986), no. 1, 81–125.

[MM81] S. Mori and S. Mukai, *Classification of Fano* 3*-folds with* $B_2 \geq 2$, Manuscripta Math. **36** (1981), no. 2, 147–162. Erratum: **110** (2003), no. 3, 407.

[Muk88] S. Mukai, *Problems on characterization of the complex projective space*, Birational Geometry of Algebraic Varieties, Open Problems, Proceedings of the 23rd Symposium of the Taniguchi Foundation at Katata, Japan, 1988, pp.57–60.

[Muk89] S. Mukai, *Biregulaar classification of Fano* 3*-folds and Fano manifolds of coindex* 3, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **86** (1989), no. 9, 3000–3002.

[NO10] C. Novelli and G. Occhetta, *Rational curves and bounds on the Picard number of Fano manifolds*, Geom. Dedicata **147** (2010), 207–217.

[Wiś90a] J. A. Wiśniewski, *Fano* 4*-folds of index* 2 *with* $b_2 \geq 2$*. A contribution to Mukai classification*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **38** (1990), no. 1–12, 173–184.

[Wiś90b] J. A. Wiśniewski, *On a conjecture of Mukai*, Manuscripta Math. **68** (1990), no. 2, 135–141.

[Wiś91a] J. A. Wiśniewski, *On Fano manifolds of large index*, Manuscripta Math. **70** (1991), no. 2, 145–152.

[Wiś91b] J. A. Wiśniewski, *On contractions of extremal rays of Fano manifolds*, J. Reine Angew. Math. **417** (1991), 141–157.

[Zha06] Q. Zhang, *Rational connectedness of log Q-Fano varieties*, J. Reine Angew. Math. **590** (2006), 131–142.