代数幾何学シンポジウム記録
2012年度 pp.85-89

正標数の曲面に対する消滅定理

田中　公*

概 要

本稿では、筆者の結果 [T] について概説する。詳細については [T] を見て頂けると嬉しいです。

1　イントロダクション

標数ゼロの時は小平消滅定理が成立する。

定理 1.1 (小平消滅定理)**.** X を標数ゼロの代数閉体上の非特異射影多様体で、A を豊富なカルティエ因子とする。すると、$i > 0$ ならば、

$$H^i(X, K_X + A) = 0$$

となる。

この小平消滅定理やその一般化である川又–フィーベックの消滅定理を用いる事により、極小モデル理論のいくつかの基本的な定理たちを示す事ができる。例えば、以下のような基定点自由性定理が示される。([Kollár-Mori, セクション３])

定理 1.2 (基定点自由性定理)**.** X を標数ゼロの代数閉体上の対数的端末な射影多様体とする。D をネフなカルティエ因子で $D - K_X$ が豊富だとする。すると、任意の十分大きい自然数 $b \gg 0$ に対して、$|bD|$ は基定点自由となる。

今回考えたいのは、「基定点自由性定理が正標数で成立しないか？」という問いである。すると先ず、小平消滅定理が正標数で成立するかどうかが気になってくる。しかし、これには反例があり正標数では曲面の時でさえ、小平消滅定理の反例が存在してしまう。([Raynaud]) しかしながら、基定点自由性定理に反例があるかどうかはまた別の話である。なので、次のような問いを考える。

問い 1.3. 基定点自由性定理を成立させるような、良い消滅定理を正標数で作る事はできないか？

この問いを考えるには、まずは基定点自由性定理の証明を解読する必要がある。そこで基定点自由性定理の証明を眺めてみると、もし次の問いが肯定的に解決されれば、「D が巨大な場合の基定点自由性定理」が成立してくれる。

問い 1.4. 次のような消滅定理は成立するか？

X を正標数の代数閉体上の非特異射影多様体とする。A を豊富なカルティエ因子とし、N をネフで巨大なカルティエ因子とする。すると、$m \gg 0$ ならば、

$$H^1(X, K_X + A + mN) = 0$$

となる。

この問いは X が曲線の時はセール双対によって従う。よって、非自明でかつ一番簡単な場合は、X が２次元の時である。次のセクションでは２次元の時に、この問いに対する肯定的な解答を与える。

*tanakahi@math.kyoto-u.ac.jp

2 曲面に対する消滅定理

正標数の代数閉体 k を 1 つ固定して、以下では全て k 上で考える。このセクションでは次の消滅定理を証明する。

定理 2.1. X を非特異射影曲面とする。A を豊富なカルティエ因子とし、N を数値的に自明ではないネフ因子とする。すると、$i > 0$ と $m \gg 0$ に対して、

$$H^i(X, K_X + A + mN) = 0$$

となる。

この証明にはフロベニウス写像と藤田消滅定理という 2 つの道具を使う。これら 2 つについて、まず説明する。フロベニウス写像 $F : X \to X$ は元を p 乗する事によって得られる有限射である。X が非特異の時には次の事実が成立し、証明にはこれを用いる。

事実 2.2. X を非特異射影多様体とすると、次の完全列が存在する。

$$F_*\omega_X \to \omega_X \to 0.$$

次に藤田消滅定理について説明する。藤田消滅定理はセール消滅定理の一般化である。([Fujita])

事実 2.3 (藤田消滅定理)**.** X を非特異射影多様体とする。G を連接層とし、A を豊富なカルティエ因子とする。すると、ある自然数 $m_0 = m(X, G, A)$ が存在し、次を満たす。任意の自然数 $i > 0$ と、任意の自然数 $m \geq m_0$ と、任意のネフなカルティエ因子 N に対して、

$$H^i(X, G(mA + N)) = 0$$

となる。

セール消滅定理と違う点はネフ因子 N が加わっている所である。先に、m_0 が固定されて、その後どんなネフ因子を足しても良いという所にメリットがある。

先ず、藤田–セール型の主張を H^2 に対して示す。

補題 2.4. X を非特異射影曲面とする。G を連接層とし、N を数値的に自明でないネフなカルティエ因子とする。すると、ある自然数 $m_0 = m(X, G, N)$ が存在し、次を満たす。任意の自然数 $m \geq m_0$ と、任意のネフなカルティエ因子 N' に対して、

$$H^2(X, G(mN + N')) = 0$$

となる。

証明. まず、G が可逆層の場合に帰着する。X は射影的なので、ある豊富因子 H に対して、完全列

$$\mathcal{O}_X^{\oplus r} \to G(H) \to 0$$

を得る。$\mathcal{O}_X(-H + mN + N')$ をテンソルしてコホモロジーをとると、完全列

$$(H^2(X, \mathcal{O}_X(-H + mN + N')))^{\oplus r} \to H^2(X, G(mN + N')) \to 0$$

を得る。従って、G を $\mathcal{O}_X(-H)$ で取りかえれば、G は可逆層としてよい。

G を可逆層として、主張を示す。あるカルティエ因子 D に対して、$G = \mathcal{O}_X(D)$ と書ける。すると、セール双対から、

$$h^2(X, D + nN + N') = h^0(X, K_X - D - mN - N') = 0$$

が $m \gg 0$ に対して成立する。実際、A を豊富因子とすると、$A \cdot N > 0$ だから、十分大きい m と任意のネフ因子 N' に対して、

$$(K_X - D - mN - N') \cdot A < 0$$

となり、豊富因子と負で交わるから、有効因子と線形同値にはなりえない。 □

定理 2.1 を証明する。

定理 2.1 の証明. $i=1$ と $i=2$ の場合を考えればよいが、補題 2.4 により $i=2$ の時は成立する。従って、$i=1$ としてよい。

事実 2.2 によって、全射

$$F_*\omega_X \to \omega_X$$

がある。e を自然数とする。$F, F^2, \cdots F^{e-1}$ で上記の全射を押し出したものたちを合成すると、全射

$$F_*^e\omega_X \to \omega_X$$

を得る。カーネルを B_e と書いて、完全列

$$0 \to B_e \to F_*^e\omega_X \to \omega_X \to 0$$

を得る。ここで、B_e は自然数 e に依存して定まる連接層である。

$\mathcal{O}_X(A+mN)$ をテンソルしてコホモロジーを取ると、完全列

$$H^1(X, \omega_X(p^eA + p^emN) \to H^1(X, \omega_X(A+mN)) \to H^2(X, B_e(A+mN))$$

を得る。真ん中を消滅させたいので、両端を消滅させれば十分である。藤田消滅定理によって、ある自然数 e_0 が存在して、任意の自然数 m に対して左側のコホモロジーが消える。つまり、

$$H^1(X, \omega_X(p^{e_0}A + p^{e_0}mN) = 0$$

となる。ここで、藤田消滅定理のおかげで、e_0 を先に固定した後、m を任意の自然数で動かす事ができるようになる。あとは、右側のコホモロジー

$$H^2(X, B_{e_0}(A+mN))$$

が十分大きな m に対して消えればよいが、これは補題 2.4 から従う。 □

これで、小平消滅定理に似たものを正標数の曲面に対して作る事ができた。川又による被覆を使って、川又–フィーベックの消滅定理に似たものを作る事ができる。

系 2.5. X を非特異射影曲面とする。A を豊富な $\mathbb{Q}$-カルティエな $\mathbb{Q}$-因子とし、小数部分 {A} が単純正規交叉であるとする。N を数値的に自明ではないネフなカルティエ因子とする。すると、$i>0$ と $m \gg 0$ に対して、

$$H^i(X, K_X + \ulcorner A \urcorner + mN) = 0$$

となる。

証明. [KMM, Theorem 1-1-1] を用いればよい。 □

この川又–フィーベックの消滅定理に似たものを使ってやると、標数ゼロの時の基定点自由性定理の証明を辿る事により、次の基定点自由性定理が証明できる。

系 2.6 (正標数曲面に対する基定点自由性定理)**.** X を正標数の代数閉体上の対数的端末な射影曲面とする。D をネフなカルティエ因子で $D-K_X$ が豊富だとする。もし D が数値的自明でないなら、任意の十分大きい自然数 $b \gg 0$ に対して、$|bD|$ は基定点自由となる。

このセクションの議論を一般次元でも同様に行うか超平面で切っていく事により、次が分かる。

系 2.7. X を非特異射影多様体とする。A を豊富なカルティエ因子とし、N を数値的に自明ではないネフ因子とする。すると、$i \geq \dim X - 1$ と $m \gg 0$ に対して、

$$H^i(X, K_X + A + mN) = 0$$

となる。

証明. このセクションの議論を辿るか、超平面切断により曲面の場合に帰着すればよい。 □

よって例えば、$\dim X = 3$ なら、$i = 2$ と $i = 3$ では消えてくれる事になる。しかし、欲しいのは $i = 1$ で消えてくれるかどうかである。これについては次のセクションで考える。

3　3 次元の時

前のセクションでは曲面の時に、基定点自由性定理を証明する為に十分な消滅定理を作る事ができた。このセクションでは定理 2.1 を 3 次元の時に一般化できるかどうかを考えたい。系によって、$i = 2$ と $i = 3$ では消滅してくれているので、$i = 1$ について考えたい。つまり、次の問いを考える。

問い 3.1. 次のような消滅定理は成立するか？

X を非特異射影的な 3 次元多様体とする。A を豊富なカルティエ因子とし、N を数値的自明でないネフ因子とする。すると、$m \gg 0$ ならば、

$$H^1(X, K_X + A + mN) = 0$$

となる。

しかし、残念ながら、このような消滅定理は成立しない。実際、次のような例が存在する。

例 3.2. ある非特異射影的な 3 次元多様体 X と、豊富なカルティエ因子 A と、数値的自明でないネフ因子 N が存在して、次を満たす。

任意の十分大きな自然数 $m \gg 0$ に対して、

$$H^1(X, K_X + A + mN) \neq 0$$

となる。

構成. 先ず、Z を小平消滅定理の反例である曲面とする。つまり、Z は非特異射影曲面で A_Z は Z 上の豊富なカルティエ因子であり、

$$H^1(Z, K_Z + A_Z) \neq 0$$

とする。ここで、H^2 はセール双対によって消えてくれるので、小平消滅定理の反例である事と H^1 が消えない事は同じである。

C を非特異射影曲線として、$X := C \times Z$ とおく。π_C と π_Z をそれぞれへの射影とする。c_0 と c_1 を C の異なる 2 点として、Z_0 と Z_1 をそれぞれのファイバーとする。A_C を C 上の豊富因子とする。次のように、X 上の 2 つの豊富因子 A、A' とネフ因子 N を定める。

$$\begin{aligned} A' &:= \pi_C^* A_C + \pi_Z^* A_Z \\ A &:= \pi_C^* A_C + \pi_Z^* A_Z + Z_0 \\ N &:= \pi_C^* A_C \end{aligned}$$

ここで、N は数値的に自明ではない。次の完全列を考える。

$$0 \to \mathcal{O}_X(K_X + A' + mN) \to \mathcal{O}_X(K_X + A + mN) \to \mathcal{O}_{Z_0}(K_X + A + mN)$$

コホモロジーをとって、

$$H^1(X, K_X + A + mN) \to H^1(Z_0, K_X + A + mN) \to H^2(X, K_X + A' + mN)$$

を得る。右側のコホモロジーは $m \gg 0$ なら系 2.7 によって、消滅する：

$$H^2(X, K_X + A' + mN) = 0.$$

よって、$m \gg 0$ なら、

$$H^1(X, K_X + A + mN) \to H^1(Z_0, K_X + A + mN)$$

は全射。任意の m に対して、右のコホモロジー $H^1(Z_0, K_X + A + mN)$ が消えない事を示す。これが示されれば十分である。Z_0 は π_C のファイバーなので、$(\pi_C^* A_C)|_{Z_0} = 0$ となるから、

$$\begin{aligned} H^1(Z_0, K_{Z_0} + A + mN) &= H^1(Z_0, K_X + \pi_C^* A_C + \pi_Z^* A_Z + Z_0 + m\pi_C^* A_C) \\ &= H^1(Z_0, K_X + \pi_Z^* A_Z + Z_0) \\ &= H^1(Z_0, K_{Z_0} + \pi_Z^* A_Z) \\ &\simeq H^1(Z, K_Z + A_Z) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

となり、主張が示された。 □

注意 3.3. 上記の例において、N は数値次元が 1 である。数値次元が 2 の例や数値次元が 3 の例（つまり、N が巨大）なものも作れる。詳しい構成は [T] を見て下さい。

謝辞

城崎代数幾何シンポジウムに講演の機会を下さった世話人の永井保成先生、松下大介先生、山木壱彦先生に感謝しています。筆者はＪＳＰＳの特別研究員で補助を受けています。

参考文献

[Fujita] T. Fujita, Vanishing theorems for semipositive line bundles, Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982), 519–528, Lecture Notes in Math., **1016**, Springer, Berlin, 1983.

[KMM] Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki, Introduction to the Minimal Model Program, volume **10** of adv. Stud. Pure Math., 283–360. Kinokuniya–North–Holland, 1987.

[Kollár-Mori] J. Kollár, 森重文, **双有理幾何学**, 岩波書店, 1998.

[Raynaud] M. Raynaud, Contre-exemple au "vanishing theorem" en caractéristique $p > 0$, C. P. Ramanujam — A tribute, Studies in Math., **8** (1978), 273–278.

[T] H. Tanaka, The X-method for klt surfaces in positive characteristic, preprint (2012).