代数幾何学シンポジウム記録
2012年度　pp.1-12

$K3$ 曲面上の非シンプレクティック自己同型

瀧　真語

Abstract. This note is a survey about non-symplectic automorphisms of $K3$ surfaces and a reproduction on my talk at Kinosaki Symposium 2012.

1. はじめに

与えられた代数多様体の自己同型を調べることは代数幾何学における基本的問題の一つである．今回は $K3$ 曲面の自己同型を考察する．なお，$K3$ 曲面は $\mathbb{C}$ 上のものを考えることにする．$K3$ 曲面はその定義から至る所消えない正則 2 形式が存在するが，$K3$ 曲面に自己同型として作用する有限群は，その正則 2 形式への作用が自明か，そうでないかによってシンプレクティックまたは非シンプレクティックと呼ばれる．このノートのテーマは非シンプレクティック自己同型である．非シンプレクティック自己同型は Nikulin [12] によって調べられ始め，その後多くの数学者によって研究されてきた．現在もその応用も含めて活発に研究され続けている対象である．

まず $K3$ 曲面の自己同型の一般的な話から始めることにする．一般に $K3$ 曲面は代数的とは限らないが，今回は代数的な $K3$ 曲面のみを扱うことにする．以下 $K3$ 曲面 X に対し，ω_X を X の至る所消えない正則 2 形式とする．$H^2(X,\mathbb{Z})$ はカップ積によって格子の構造がはいる．その部分格子 $S_X := \{x \in H^2(X,\mathbb{Z}) | \langle x, \omega_X\rangle = 0\}$ を X の Néron-Severi 格子，$T_X := S_X^{\perp}$ を超越格子とする．なお，$1 \leq \operatorname{rank} S_X \leq 20$, $2 \leq \operatorname{rank} T_X \leq 21$ が成り立つ．

1.1. $K3$ 曲面の自己同型.

$K3$ 曲面 X の有限自己同型を調べたい．そこで G を X へ自己同型として作用する有限群とする．X の自己同型 $g \in G$ は Hodge 分解を保つことに注意すれば，$g^*\omega_X = \alpha(g)\omega_X$ をみたす 0 ではない複素数 $\alpha(g)$ を定めることができる．つまり $\alpha : G \to \mathbb{C}^\times$ という表現が定まる．G が有限群であることから $\operatorname{Im}\alpha$ は有限アーベル群であることに注意する．以上から次の完全列を得ることができる:

$$1 \to \operatorname{Ker}\alpha \to G \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}/I\mathbb{Z} \to 1. \tag{1}$$

例を一つ見る．

Date: January 24, 2013.

例 1.1. $\mathbb{P}^3$ の超曲面 $X : X_0^4 + X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 = 0$ は $K3$ 曲面である．X には座標を入れ替えることで $\mathfrak{S}_4$ が作用している．また各座標を $\sqrt{-1}$ 倍することで $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$ が作用している．つまり $G := \mathfrak{S}_4 \ltimes (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$ が射影変換として X に作用している．そして ω_X への作用を見ることで $\mathrm{Ker}\,\alpha = \mathfrak{S}_4 \ltimes (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ であることが分かる．つまり

$$1 \to \mathfrak{S}_4 \ltimes (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \to G \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to 1$$

である．

定義 1.2. $K3$ 曲面 X の自己同型 g が $g^*\omega_X = \omega_X$ をみたすとき，**シンプレクティック**という．また有限群 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ の全ての元がシンプレクティックであるとき G のこともシンプレクティックという．

上の完全列 (1) でいうと $G = \mathrm{Ker}\,\alpha$ をみたすものがシンプレクティックである．例 1.1 の場合は，$\mathfrak{S}_4 \ltimes (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ が X へシンプレクティックに作用していることになる．

$K3$ 曲面にシンプレクティックに作用する有限群 G に関しては Nikulin [12] が有限アーベル群の場合に分類し，向井 [11] が一般の場合の分類を行った．また有限単純群のひとつである Mathieu 群との対応も知られている.（金銅 [9] の格子理論を用いた証明も見よ.）

ところで，我々が今回扱いたい自己同型はシンプレクティック自己同型ではない．次を定義しておく．

定義 1.3. σ を $K3$ 曲面 X 上の位数 I の自己同型とする．$\sigma^*\omega_X = \zeta_I\omega_X$ をみたすとき，σ を**非シンプレクティック自己同型**という．ここで ζ_I は 1 の原始 I 乗根である．

注意 1.4. 定義 1.2 によると，自己同型が ω_X に自明に作用するか否かで自己同型のタイプを決めていた．従って，σ の位数が 6 で $\sigma^*\omega_X = \zeta_3\omega_X$ をみたす場合も非シンプレクティックと呼びそうである．それは正しい．実際にこの手の自己同型を調べたという結果もある.（たとえば [6].）

ただ，このノートでは定義 1.3 のような自己同型のみを扱い，非シンプレクティック自己同型と呼んでいる．混同がありそうな場合は今回扱う場合を purely non-symplectic (純非シンプレクティックとでも訳すのか？) と呼ぶ事もある．

非シンプレクティック自己同型の研究結果は数多くあるが，最初に Nikulin [14] による位数 2 の非シンプレクティック自己同型の研究を見る．ただし今現在はいくらか準備不足なので，[14] の主張をそのまま書くことはしない．なお，U は交点形式を $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられる階数 2 の双曲格子であり，E_8 はディンキン図形から定まる偶で負定値なルール格子である．格子 L に対して，$L(m)$ は L の交点行列を m 倍した格子の意味である．

定理 1.5. ι を Néron-Severi 格子 S_X に自明に作用する位数 2 の非シンプレクティック自己同型とする．このとき ι の固定点集合は

$$X^\iota = \begin{cases} \phi & S_X = U(2) \oplus E_8(2), \\ C^{(1)} \amalg C^{(1)} & S_X = U \oplus E_8(2), \\ C^{(g)} \amalg E_1 \amalg \cdots \amalg E_k & \text{otherwise}, \end{cases}$$

となる．ここで $C^{(g)}$ は種数 g の非特異曲線であり，E_i は非特異有理曲線である．また g や k は S_X の階数などの言葉で記述できる．

上で書いた「いくらか準備不足」というのは S_X に関することである．実は ι のような自己同型を持つ場合，S_X は特別な格子の構造を持つ．また g や k はその格子が持つ不変量で記述される．

命題 1.6 ([22], [8])**.** p を素数とする．σ を S_X に自明に作用する位数 p^l の非シンプレクティック自己同型とする．このとき S_X は p-elementary 格子になる．

注意 1.7. 実のところ S_X が p-elementary 格子になるというよりは，不変格子 $S^{\sigma^*} := \{x \in S_X | \sigma^*(x) = x\}$ が p-elementary 格子になる，という方が正しい．今の場合は仮定から $S_X = S^{\sigma^*}$ である．

1.2. p-**elementary 格子.**

定義 1.8. p を素数，L を格子とし，L^* を L の双対格子（すなわち $\mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z})$）とする．判別式群が p-elementary アーベル群，すなわち $L^*/L = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^a$ となるとき，L を p-**elementary 格子**と言う．

例 1.9. A_m, D_n はディンキン図形から定まる偶で負定値なルール格子とする．

- A_2 型の格子は $a = 1$ の 3-elementary 格子である．
- D_4 型の格子は $a = 2$ の 2-elementary 格子である．
- U は $a = 0$ の p-elementary 格子である．これは $U^* = U$ を意味する．すなわちユニモジュラー格子である．

定義 1.10. L を 2-elementary 格子とする．

$$\delta := \begin{cases} 0 & \text{if } x^2 \in \mathbb{Z}, \forall x \in L^*, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

この δ という量は 2-elementary 格子の場合に意味がある．

命題 1.11 ([13], [17])**.** 偶で不定値な 2-elementary 格子はその階数と a と δ で分類される．また，偶で不定値な $p(\neq 2)$-elementary 格子はその階数と a で分類される．

つまるところ，この命題が言っていることは今回扱いたい Néron-Severi 格子をリストアップできる，ということである．[1] [2] [18] [20] などには幾つかの場合の具体的なリストがある．

さて，定理 1.5 に借金があった．改めて書いておく．

定理 1.12 ([14])**.** ι を S_X に自明に作用する位数 2 の非シンプレクティック自己同型とする．このとき ι の固定点集合は

$$X^\iota = \begin{cases} \phi & S_X = U(2) \oplus E_8(2), \\ C^{(1)} \amalg C^{(1)} & S_X = U \oplus E_8(2), \\ C^{(g)} \amalg E_1 \amalg \cdots \amalg E_k & \text{otherwise}, \end{cases}$$

となる．また

$$g = \frac{22 - \operatorname{rank} S_X - a}{2}, \quad k = \frac{\operatorname{rank} S_X - a}{2}$$

である．

今の場合 S_X は 2-elementary 格子であるから，その不変量は $\operatorname{rank} S_X$ と a と δ である．δ の姿が見えないようだが，実は $S_X = U(2) \oplus E_8(2)$ や $S_X = U \oplus E_8(2)$ というところに δ が隠されている．$U(2) \oplus E_8(2)$ は階数 10 で，$a = 10$，$\delta = 0$ である．一方 $A_1(-1) \oplus A_1^9$ は階数 10 で，$a = 10$，$\delta = 1$ である．δ はこの 2 つを区別しているのである．

1.3. 自己同型の位数と固定点.

今まで見てきたように，$K3$ 曲面の非シンプレクティック自己同型の一つの研究方針として「固定点集合を格子の言葉で記述せよ」というものがある．これから位数 2 以外の場合を見ていく．その前に非シンプレクティック自己同型が取り得る位数とその固定点集合の一般的な形を見ておく．

命題 1.13 ([12])**.** σ を $K3$ 曲面 X 上の非シンプレクティック自己同型，Φ を Euler 関数とする．このとき $\Phi(\operatorname{ord} \sigma)$ は超越格子 T_X の階数を割り切る．特に $2 \leq \operatorname{rank} T_X \leq 21$ であるから $\operatorname{ord} \sigma \leq 66$ である．

この命題において，非シンプレクティック自己同型は S_X に自明に作用していなくても成り立つ．また，$\Phi(60) = 16$ なのだが，実は次が成り立つ．これは多くの人々([23], [10], [24]) が独立に色々な証明を与えている．

命題 1.14. 位数 60 の非シンプレクティック自己同型は存在しない．

命題 1.6 によると，$K3$ 曲面が素数ベキ位数の非シンプレクティック自己同型を持つとき，その Néron-Severi 格子は p-elementary 格子になっていた．では素数ベキ位数でない非シンプレクティック自己同型場合はどうであろうか？実はユニモジュラー格子になる．例えば，$K3$ 曲面が位数 $6(= 2 \times 3)$ の非シンプレクティック自己同型を持つとすると，

その Néron-Severi 格子は 2-elementary かつ 3-elementary である．そのような格子はユニモジュラー格子である．

命題 1.15 ([8])**.** σ を $K3$ 曲面 X の Néron-Severi 格子 S_X に自明に作用する合成数位数の非シンプレクティック自己同型とする．このとき S_X はユニモジュラー格子であり，

(1) $S_X = U$ ならば $\mathrm{ord}\,\sigma | 66$, 44 or 12
(2) $S_X = U \oplus E_8$ ならば $\mathrm{ord}\,\sigma | 42$, 36 or 28
(3) $S_X = U \oplus E_8^2$ ならば $\mathrm{ord}\,\sigma | 12$.

が成り立つ．

この命題によって，Néron-Severi 格子に自明に作用する合成数位数の非シンプレクティック自己同型のことは大体分かったと思ってよい．[8] には特別な合成数位数の場合の一意性の事も書かれている．

次に非シンプレクティック自己同型の固定点の様子について見る．

補題 1.16. σ を $K3$ 曲面 X 上の位数 I の非シンプレクティック自己同型とする．このときその固定点集合は

$$X^\sigma = C_1 \amalg \cdots \amalg C_m \amalg \{P_1, \ldots, P_n\}$$

と表せる．ここで C_i は非特異曲線，P_j は孤立点である．

p を σ の固定点とし，その局所座標を (x, y) とする．σ が非シンプレクティック自己同型であることと $dx \wedge dy$ の作用に注意し，$p = (x, y)$ への σ の作用を見ると $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_I \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \zeta_I^\alpha & 0 \\ 0 & \zeta_I^\beta \end{pmatrix}$ （$\alpha + \beta \equiv 1 \mod I$）が考えられる．作用が前者であれば p は非特異固定曲線上の点であり，後者であれば孤立固定点である．

もちろん P_j への σ の作用は色々な種類のものが考えられる．例えば $\mathrm{ord}\,\sigma = 5$ の場合は $\begin{pmatrix} \zeta_5^2 & 0 \\ 0 & \zeta_5^4 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \zeta_5^3 & 0 \\ 0 & \zeta_5^3 \end{pmatrix}$ がある．これらを区別するのが正則版 Lefschetz 公式[1]である．位相版の Lefschetz 公式と共に紹介する．

命題 1.17 (位相 Lefschetz 公式)**.** σ を $K3$ 曲面 X 上の非シンプレクティック自己同型とする．このとき固定点集合 X^σ の位相的 Euler 数 $\chi(X^\sigma)$ は

$$\chi(X^\sigma) = \sum_{i=0}^{4} (-1)^i \mathrm{tr}(\sigma^* | H^i(X, \mathbb{R}))$$

をみたす．

[1]位数が大きくなるとこれの計算は結構大変である．

命題 1.18 (正則 Lefschetz 公式)**.** σ を $K3$ 曲面 X 上の位数 I の非シンプレクティック自己同型[2]とする．このとき

$$\sum_{i=0}^{2} \mathrm{tr}(\sigma^*|H^i(X,\mathcal{O}_X)) = \sum_j a(P_j^{\alpha,\beta}) + \sum_l b(C_l)$$

が成り立つ．ここで $P_j^{\alpha,\beta}$ は σ の作用が $\begin{pmatrix} \zeta_I^\alpha & 0 \\ 0 & \zeta_I^\beta \end{pmatrix}$ である孤立固定点である．また

$$a(P_j^{\alpha,\beta}) = \frac{1}{(1-\zeta_I^\alpha)(1-\zeta_I^\beta)},\ b(C_l) = \frac{1-g(C_l)}{1-\zeta_I} - \frac{\zeta_I C_l^2}{(1-\zeta_I)^2}.$$

である．

2. 素数位数の場合

p を素数，X を $K3$ 曲面とし，σ を Néron-Severi 格子 S_X に自明に作用する位数 p の非シンプレクティック自己同型とする．命題 1.13 によると $\mathrm{ord}\,\sigma = p$ が取り得る値は 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 であるが，それぞれの場合の固定点集合 X^σ を決定したい．詳細は [1] [2] [16] [18] などを見て欲しい．

$p \geq 3$ の場合，σ の固定点集合は

$$X^\sigma = C^{(g)} \amalg E_1 \amalg \cdots \amalg E_k \amalg \{P_1, \ldots, P_n\}$$

となるのだが，g や k や n を p-elementary 格子としての S_X が持つ量で記述する．

X が σ のような自己同型を持つときは S_X は p-elementary 格子になるが，S_X が p-elementary 格子だからといって，X が必ずそのような自己同型をもつかどうかは別問題である．そこで「どのような p-elementary 格子が S_X になるのか」ということも気になる．これも S_X の言葉で記述できる．

まずは X が S_X に自明に作用する位数 p の非シンプレクティック自己同型を持つと仮定する．そのとき g と k と n という 3 つの量を求めたい．従って，連立方程式としては少なくとも 3 つの式が欲しい．そのうちの 2 つは命題 1.17 と命題 1.18 である．これらを用いることで次が分かる．

---

[2] 実はもっと広い対象に対して成り立つ．[3, page 542] や [4, page 567] を見よ．

命題 2.1. 位数 p の非シンプレクティック自己同型 σ の孤立固定点の数 n は次で与えられる：

$$n = \begin{cases} 0 & \text{if } p = 2, \\ \dfrac{9\,\mathrm{rank}\,S_X + 2}{10} & \text{if } p = 11, \\ \dfrac{(p-2)\,\mathrm{rank}\,S_X + 22}{p-1} & \text{if } p = 17, 19, \\ \dfrac{(p-2)\,\mathrm{rank}\,S_X - 2}{p-1} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

この命題の証明をちゃんと追うと，σ の孤立固定点への局所的な作用も分かる．つまり $P_j^{\alpha,\beta}$ の数も $\mathrm{rank}\,S_X$ と p で書ける．Lefschetz 公式からいきなり n が得られるのではなく，丁寧に計算することで各 $P_j^{\alpha,\beta}$ の数がちゃんと記述できるから n も分かる，という具合である．

注意 2.2. $p = 13, 17, 19$ のときは p の値だけで具体的に n の値が定まる．（それぞれ $n = 9, 7, 5$ である．）命題 1.13 によって，$p = 13$ のときは $\mathrm{rank}\,S_X = 10$，$p = 17$ のときは $\mathrm{rank}\,S_X = 6$，$p = 19$ のときは $\mathrm{rank}\,S_X = 4$ だからである．

固定点は $X^\sigma = C^{(g)} \amalg E_1 \amalg \cdots \amalg E_k \amalg \{P_1, \ldots, P_n\}$ という型をしている．$\chi(C^{(g)}) = 2 - 2g$，$\chi(E_i) = 2$ であるから，n が分かった今，g か k のどちらかが定まればもう一方も定まる．その g を定める式[3]が Smith の完全系列から得られる．

2.1. **Smith の完全系列**. 詳細は [5] か [7] を見て欲しい．$K3$ 曲面と非シンプレクティック自己同型以外にも適用できる[4]理論である．

$\alpha := 1 + \sigma^* + \sigma^{*2} + \cdots + \sigma^{*(p-1)}$，$\beta := 1 - \sigma^*$ とし，$\rho = \beta^i$ ($i = 1, 2, \ldots, p-1$) とする．また，$K3$ 曲面 X の $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 係数の鎖複体 (chain complex) を $C(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ とし，その部分鎖複体 $\rho C(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ を考える．これから自然に定まるホモロジー群を $H_q^\rho(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ と記し，**Smith の特別ホモロジー群**と言う．以下係数の $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は省略する．

我々が扱うケースで Smith の特別ホモロジー群が実際に有用なのは ρ が α と β の時である．特に $H_q^\alpha(X) \simeq H_q(X/\langle\sigma\rangle, X^\sigma)$ が成り立ち，相対ホモロジーという馴染みある話に帰着できる．$p = 2$ の時は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上では $\alpha = \beta$ であるから，この辺りの話は相対ホモロジー群の意外な（？）話と解釈もできなくはない．

次が Smith の特別ホモロジーの間に成り立つ完全系列である．

[3]上で述べた連立方程式で言えば 3 つ目の式.

[4]最近では正則シンプレクティック多様体への応用が知られている．ただし，Smith のホモロジーは自己同型が素数位数の時に定義されていることに注意する．色々考えてみたところ，素数ベキ位数くらいであればホモロジー群くらいなら何とか定義できると思う．しかし命題 2.3 が上手くいかないので，あまり意味はなさそうである．

命題 2.3. $\rho=\beta^i$，$\bar{\rho}=\beta^{p-i}$ $(i=1,2,\ldots,p-1)$ とする．このとき
$$\cdots\to H_q^{\bar{\rho}}(X)\oplus H_q(X^\sigma)\to H_q(X)\to H_q^{\rho}(X)\to\cdots$$
と
$$\cdots\to H_q^{\alpha}(X)\to H_q^{\beta^j}(X)\to H_q^{\beta^{j+1}}(X)\to\cdots$$
という完全列が存在する．

上で少し触れたが，実際に使うのは $\rho=\alpha$，$\bar{\rho}=\beta$ と $\rho=\beta$，$\bar{\rho}=\alpha$ の時である．これらの場合の多くのホモロジー群（特に $q=0,1,3,4$）は実際に計算できる．そして $H_2(X)$ の周辺が問題となって，ここで p-elementary 格子が現れてくるのである．

命題 2.3 をちょっと観察してみる，というなら $p=3$ の時をおススメする．これ以外の場合は 2 つ目の完全系列が意味をなさなかったり，同じような計算を何度も繰り返すことになる．

さて，この辺り（命題 2.3）をちゃんと調べることで次を得る．

命題 2.4. $\displaystyle\sum_q \dim H_q(X^\sigma)=\frac{20+2p+(p-2)r-2(p-1)a}{p-1}.$

これと命題 1.17 によって σ の固定点集合 X^σ の第 1 Betti 数 $b_1(X^\sigma)$ を得る．従って X^σ の型から，$C^{(g)}$ の種数を求めることができる．つまりは非特異有理曲線の数 k も分かる．

2.2. **素数位数の非シンプレクティック自己同型**. 今までの議論（$+\alpha$）によって次の定理を得る．

定理 2.5. $K3$ 曲面 X が Néron-Severi 格子 S_X に自明に作用する位数 p の非シンプレクティック自己同型 σ を持つとする．その固定点集合は
$$X^\sigma=\begin{cases}\phi & S_X=U(2)\oplus E_8(2)\\ C^{(1)}\amalg C^{(1)} & S_X=U\oplus E_8(2)\\ C^{(g)}\amalg E_1\amalg\cdots\amalg E_k\amalg\{P_1,\ldots,P_n\} & \text{otherwise}\end{cases}$$
である．ここで
$$g=\frac{22-r-(p-1)a}{2(p-1)},$$
$$k=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{rank}S_X-a}{2} & \text{if } p=2,\\ \dfrac{\operatorname{rank}S_X-10a-2}{20} & \text{if } p=11,\\ 0 & \text{if } p=17,19,\\ \dfrac{\operatorname{rank}S_X-(p-1)a+2}{2(p-1)} & \text{otherwise,}\end{cases}$$
である．n に関しては命題 2.1 で与えてある．

また，符号が $(1, r-1)$ である偶な p-elementary 格子がこのような $K3$ 曲面の Néron-Severi 格子になる必要十分条件は

$$22 - r - (p-1)a \in 2(p-1)\mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{2}$$

が成り立つ[5]ことである．なお $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は 0 以上の整数全体を意味する．

注意 2.6. $k = -1$ となる場合があるが，これは $C^{(0)}$ を打ち消していることを意味する．すなわち X^σ は孤立点だけである．

注意 2.7. $p \geq 3$ のとき，(2) をみたす全ての場合の $(X, \langle\sigma\rangle)$ の具体例は構成されている．$p = 2$ の場合は Torelli の定理によって，その存在は確認[6]できる．

例 2.8. $y^2 = x^3 + x + t^7$ で与えられる楕円 $K3$ 曲面 X を考える．このとき $S_X = U \oplus E_8$ であり，$\sigma : (x, y, t) \mapsto (x, y, \zeta_7 t)$ は S_X に自明に作用する位数 7 の非シンプレクティック自己同型である．また，σ の固定点集合は $X^\sigma = C^{(1)} \amalg \mathbb{P}^1 \amalg \{P_1, \ldots, P_8\}$ である．

3. 素数ベキ位数の場合

p を素数とし，σ を Néron-Severi 格子に自明に作用する位数 p^l の非シンプレクティック自己同型とする．命題 1.13 によるとその位数は 2^α $(\alpha \leq 5)$, 3 $(\beta \leq 3)$, 5, 5^2 7, 11, 13, 17, 19 である．しかし金銅 [8, Lemma 6.3] によって $\operatorname{ord}\sigma \neq 2^5$ が示されている．前節（素数位数の場合）の事も考慮すると，残る位数は 4, 8, 16, 9, 27, 25 である．ここでは主に 2 ベキ位数の場合を扱う．詳細は [20] を参照してほしい．また 3 ベキ位数の場合は [19] や [16] を，位数 25 の場合は [8] や [10] を参照してほしい．

ここで命題 1.6 を思い出す．$K3$ 曲面が Néron-Severi 格子に自明に作用する位数 p^k の非シンプレクティック自己同型を持つとき，その Néron-Severi 格子は p-elementary 格子であった．定義 1.10 で導入した δ は 2-elementary 格子の不変量の一つであったが，2 ベキ位数の非シンプレクティック自己同型に関する重要な情報を備えている．

命題 3.1. $K3$ 曲面 X が Néron-Severi 格子 S_X に自明に作用する位数 4 の非シンプレクティック自己同型を持つとき，S_X において $\delta = 0$ が成り立つ．

$K3$ 曲面の Néron-Severi 格子になり得る 2-elementary 格子は 75 種類あるのだが，そのうち $\delta = 0$ のものは 16 種類である．もちろん全部具体的に書き下すことが可能である．そして位数 4 の非シンプレクティック自己同型については次が成り立つ．

[5]固定曲線の種数 g の式に注目してほしい．ザクっと行ってしまうと，分数や負の数の種数が出ては困る，ということである．

[6]具体的な方程式などを記述してある文献を私は知らない．

定理 3.2. $K3$ 曲面 X が Néron-Severi 格子 S_X に自明に作用する位数 4 の非シンプレクティック自己同型 σ を持つとき，S_X は $U \oplus E_8(2)$, $U(2) \oplus E_8(2)$，$U \oplus D_4^{\oplus 3}$，$U \oplus D_8^{\oplus 2}$ **以外の**符号が $(1, r-1)$ であり偶かつ $\delta = 0$ な 2-elementary 格子である．また固定点集合は

$$X^\sigma = E_1 \amalg \cdots \amalg E_k \amalg \{P_1, \ldots, P_n\}$$

である．ここで $k = (\operatorname{rank} S_X - 2)/2$，$n = (\operatorname{rank} S_X + 6)/2$ である．

基本的なアイディアは位数 2 の固定点集合 X^{σ^2} と位数 4 の固定点集合 X^σ を比較するのである．Smith の完全系列（命題 2.3）は機能しないのだが，Lefschetz の公式（命題 1.17 と命題 1.18）によって孤立固定点の数 n や X^σ の位相的 Euler 数は計算できる．これらと σ^2 の固定曲線の様子を用いて σ の固定曲線を決定していく．

位数 8 と 16 の場合は次が成り立つ．

定理 3.3.

(1) $K3$ 曲面 X が Néron-Severi 格子 S_X に自明に作用する位数 8 の非シンプレクティック自己同型 σ を持つとき，S_X は $U \oplus D_4$, $U(2) \oplus D_4$，$U \oplus D_4 \oplus E_8$ である．また固定点集合は

$$X^\sigma = E_1 \amalg \cdots \amalg E_k \amalg \{P_1, \ldots, P_n\}$$

である．ここで $k = (\operatorname{rank} S_X + 2)/8$，$n = (3 \operatorname{rank} S_X + 6)/4$ である．

(2) $K3$ 曲面 X が Néron-Severi 格子 S_X に自明に作用する位数 16 の非シンプレクティック自己同型 σ を持つとき，S_X は $U \oplus D_4$, $U \oplus D_4 \oplus E_8$ である．また固定点集合は

$$X^\sigma = E_1 \amalg \cdots \amalg E_k \amalg \{P_1, \ldots, P_n\}$$

である．ここで $k = (\operatorname{rank} S_X + 2)/8$，$n = (3 \operatorname{rank} S_X + 6)/4$ である．

基本的な証明の方針は定理 3.2 と同じである．ただし孤立固定点のふるまいには注意する必要がある．位数 8 自己同型の孤立固定点が位数 4 の自己同型の固定曲線の上に沢山ない，ということは確認すべきことである．

なお，定理 3.2，定理 3.3 の各場合とも $(X, \langle\sigma\rangle)$ の具体例は構成されている．

例 3.4. $y^2 = x^3 + t^2 x + t^{11}$ で与えられる楕円 $K3$ 曲面 X を考える．このとき $S_X = U \oplus D_4$ であり，$\sigma : (x, y, t) \mapsto (\zeta_{16}^2 x, \zeta_{16}^{11} y, \zeta_{16}^2 t)$ は S_X に自明に作用する位数 16 の非シンプレクティック自己同型である．

X は $t = 0$ と ∞ 上で I_0^* 型の特異ファイバーと II 型の特異ファイバーを持っている．σ は I_0^* 型の特異ファイバーの重複度 2 のコンポーネントを固定曲線とし，その他の 4 つの重複度 1 のコンポーネント上に孤立

固定点に 1 点づつ定める．これら 4 点のうち 1 点は切断（セクション）との交点であり，残りの 3 点は σ^8 の固定曲線 $C^{(7)}$ との交点である．また II 型の特異ファイバーでは尖点 (カスプ) を固定し，切断との交点上に固定点を持つ．つまり σ の固定点集合は $X^\sigma = \mathbb{P}^1 \amalg \{P_1, \ldots, P_6\}$ である．

4. 位数 32 の場合

前節までの話で Néron-Severi 格子 S_X に自明に作用する非シンプレクティック自己同型の話は大体落ち着いた．ここでもう一度命題 1.13 を思い出すと，2 ベキ位数の非シンプレクティック自己同型の最大位数は 32 であった．しかしそれは S_X に自明に作用しない．位数 32 の非シンプレクティック自己同型と $K3$ 曲面の例は次が知られている．

例 4.1 ([15])**.** $y^2 = x^3 + t^2x + t^{11}$ で与えられる楕円 $K3$ 曲面 X_{og} の自己同型 $\sigma_{\mathrm{og}}(x, y, t) = (\zeta_{32}^{18}x, \zeta_{32}^{11}y, \zeta_{32}^{2}t)$ は位数 32 の非シンプレクティック自己同型である．特に σ_{og} は $S_{X_{\mathrm{og}}}$ へ位数 2 で作用する．

なお一番大きな 3 ベキ位数は 27 であり，5 ベキ位数は 25 である．これらの場合は S_X に自明に作用するものが存在する．またそのような $K3$ 曲面と自己同型の組は同型を除いて一意的である．位数 32 の場合は次が成り立つ．

定理 4.2 ([21])**.** X を $K3$ 曲面，σ を X 上の位数 32 の非シンプレクティック自己同型とする．このとき σ の固定点集合は $X^\sigma = \{P_1, P_2, \ldots, P_6\}$ である．また組 $(X, \langle\sigma\rangle)$ は組 $(X_{\mathrm{og}}, \langle\sigma_{\mathrm{og}}\rangle)$ に同型である．

「位数 32 の非シンプレクティック自己同型」という条件から Weierstrass 方程式を決定するわけだが，最初のステップは σ の S_X への作用を決めることである．命題 1.17 とと命題 1.18 と定理 3.2 と定理 3.3 を用いた簡単な計算を行うことで，X^σ の様子や不変格子 $S^{\sigma^*} := \{x \in S_X | \sigma^*(x) = x\}$ の階数が 5 であることが分かる．これによって σ-安定な楕円曲面の構造が存在し，それを調べる．

References

[1] M. Artebani, A. Sarti, Non-symplectic automorphisms of order 3 on $K3$ surfaces, Math. Ann. **342** (2008), 903-921.

[2] M. Artebani, A. Sarti, S. Taki, $K3$ surfaces with non-symplectic automorphisms of prime order, Math. Z. **268** (2011), 507–533.

[3] M.F. Atiyah, G.B. Segal, The index of elliptic operators: II, Ann. of Math. **87** (1968), 531–545.

[4] M.F. Atiyah, I.M. Singer, The index of elliptic operators: III, Ann. of Math. **87** (1968), 546–604.

[5] G.E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Pure and Applied Math. **46**, Academic Press, New York-London, 1972.

[6] A. Garbagnati, A. Sarti, On symplectic and non-symplectic automorphisms of $K3$ surfaces, to appear in Rev. Mat. Iberoam.
[7] 川久保 勝夫，変換群論，岩波書店，1987.
[8] S. Kondo, Automorphisms of algebraic $K3$ surfaces which act trivially on Picard groups, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 75–98.
[9] S. Kondo, Niemeier lattices, Mathieu groups, and finite groups of symplectic automorphisms of $K3$ surfaces Duke Math. J. **92** (1998), 593–603
[10] N. Machida, K. Oguiso, On $K3$ surfaces admitting finite non-symplectic group actions, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **5** (1998), no. 2, 273–297.
[11] S. Mukai, Finite groups of automorphisms of $K3$ surfaces and the Mathieu group, Invent. Math. **94** (1988), 183–221.
[12] V.V. Nikulin, Finite automorphism groups of Kählerian $K3$ surfaces, Trans. Moscow Math. Soc. **38** (1980), No 2, 71–135.
[13] V.V. Nikulin, Integral symmetric bilinear forms and some of their applications, Math. USSR Izv. **14** (1980), 103–167.
[14] V.V. Nikulin, Factor groups of groups of automorphisms of hyperbolic forms with respect to subgroups generated by 2-reflections. Algebrogeometric applications, J. Soviet Math., **22** (1983), 1401–1475.
[15] K. Oguiso, A remark on the global indices of $\mathbb{Q}$ -Calabi-Yau 3-folds, Math. Proc. Camb. Phil. soc. **114** (1993), 427–429.
[16] K. Oguiso, D.-Q. Zhang, On Vorontsov's theorem on $K3$ surfaces with non-symplectic group actions. Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 6, 1571–1580.
[17] A.N. Rudakov and I.R. Shafarevich, Surfaces of type $K3$ over fields of finite characteristic, J. Soviet Math., **22** (1983), 1476–1533.
[18] S. Taki, Classification of non-symplectic automorphisms of order 3 on $K3$ surfaces, Math. Nachr. **284** (2011), 124–135.
[19] S. Taki, Non-symplectic automorphisms of 3-power order on $K3$ surfaces, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **86** (2010), no. 8, 125–130.
[20] S. Taki, Classification of non-symplectic automorphisms on $K3$ surfaces which act trivially on the Néron-Severi lattice, J. Algebra **358** (2012), 16–26.
[21] S. Taki, On Oguiso's $K3$ surface, preprint, (2012).
[22] S.P. Vorontsov, Automorphisms of even lattices that arise in connection with automorphisms of algebraic $K3$ surfaces, Vestnik Mosk. Univ. Math. **38** (1983), 19–21.
[23] G. Xiao, Non-symplectic involutions of a $K3$ surface, preprint, (1995).
[24] D-Q. Zhang, Automorphisms of $K3$ surfaces, AMS/IP Studies in advanced Mathematics, **39** (2007), 379–392.

School of Information Environment, Tokyo Denki University, 2-1200 Muzai Gakuendai, Inzai-shi, Chiba 270-1382, Japan
E-mail address: `taki@sie.dendai.ac.jp`
URL: `http://www.math.sie.dendai.ac.jp/~taki/`