代数幾何学シンポジウム記録
2013年度 pp.79-88

Arithmetic degrees of rational self-maps of algebraic varieties and canonical heights for nef divisors on abelian varieties
(joint work with Joseph H. Silverman)

川口　周*

この原稿は，城崎シンポジウムでの講演のスライドを基に，Silverman 氏との共同研究 [1] の内容を述べたものです．詳細は [1] をご参照下さい．城崎シンポジウムでの講演機会を与えて下さった，世話人の吉岡氏，黒田氏，山田氏に感謝します．

1　Néron-Tate の高さ関数とネフ標準的高さ定理

1.1　射影空間上の高さ

代数多様体の代数的点の**高さ**はその点の**算術的な大きさ**を測る量と考えられる．

$x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ としよう．$\gcd(x_0, x_1, \ldots, x_N) = 1$ をみたす整数 $x_0, x_1, \ldots, x_N$ を用いて，x を $x = (x_0 : x_1 : \cdots : x_N)$ と表す．このとき，x の（対数的）*Weil* **高さ** $h(x)$ は

$$h(x) = \log \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_N|\}$$

で与えられる．例えば，$h((2/3 : 1)) = h((2 : 3)) = \log 3$ である．

一般に，$\bar{\mathbb{Q}}$-値点 $x \in \mathbb{P}^N(\bar{\mathbb{Q}})$ についても，その高さ $h(x) \in \mathbb{R}$ が考えられ，射影空間上の高さ関数

$$h : \mathbb{P}^N(\bar{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$$

が得られる．

* 京都大学理学研究科数学教室

1.2 因子に付随する高さ関数

X を $\bar{\mathbb{Q}}$ 上に定義された射影多様体とし，$D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbb{R}} := \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ を X 上の $\mathbb{R}$-因子とする．（ここでは，因子はすべて Cartier 因子とする．）このとき，D **に付随する高さ関数**

$$h_D : X(\bar{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$$

を次のように構成することができる．

まず，D が非常に豊富なときには，D の完全線形系 $|D|$ から定まる埋込み

$$\varphi_{|D|} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$$

を考え，$h_D := h \circ \varphi_{|D|}$ と定める（ここで，h は 前小節の $\mathbb{P}^N$ 上の Weil 高さ関数である）．ただし，上の埋込み $\varphi_{|D|}$ は $|D|$ の基底の取り方によるので，h_D は D から一意的には定まらない．しかし，基底の取り方を変えて定めた高さ関数を h'_D とおけば，

$$\sup_{x \in X(\bar{\mathbb{Q}})} |h'_D - h_D| < +\infty$$

であることが分かる．

次に，$D \in \mathrm{Div}(X)$ が X 上の因子のときには，D を非常に豊富な因子 D_1, D_2 の差として表し（$D = D_1 - D_2$），$h_D := h_{D_1} - h_{D_2}$ と定める．

最後に，$\mathbb{R}$-線形性によって，一般の $\mathbb{R}$-因子 $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbb{R}}$ に対して，h_D を定める．

注意. 上にも少し述べたように，$\mathbb{R}$-因子 $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbb{R}}$ に対して，D に付随する高さ関数 h_D は D から一意的には定まらない．しかし，h'_D を D に付随する別の高さ関数とすれば，$\sup_{x \in X(\bar{\mathbb{Q}})} |h'_D - h_D| < +\infty$ であることが分かる．すなわち，h_D と h'_D の差は，$X(\bar{\mathbb{Q}})$ 上の有界関数となる．このことを，

$$h'_D = h_D + O(1)$$

で表す．

以上をまとめると，X 上の $\mathbb{R}$-因子 D に付随するする高さ関数 $h_D : X(\bar{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ が定義され，h_D は有界関数を法として D から一意的に定まる．

1.3 アベール多様体上の Néron-Tate の高さ関数

A を $\bar{\mathbb{Q}}$ 上に定義されたアーベル多様体とする．$n \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$[n] : A \to A, \quad x \mapsto nx$$

で n-倍射を表す．

A 上の $\mathbb{R}$-因子 $D \in \mathrm{Div}(A)_{\mathbb{R}}$ が**対称** であるとは，$[-1]^*D \sim_{lin} D$ を満たすときにいう．

一般に，D に付随する高さ関数は有界関数の取り方の任意性があったが，アーベル多様体のときには，その代表元としてよい性質をもつものが一意的にとれる．

定義 1.1 (Néron-Tate の高さ関数)．$D \in \mathrm{Div}(A)_{\mathbb{R}}$ を $\bar{\mathbb{Q}}$ 上に定義されたアーベル多様体 A 上の対称な $\mathbb{R}$-因子とする．このとき，関数

$$\hat{h}_D : A(\bar{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$$

で次の性質をみたすものが唯一存在する．

(i) $\hat{h}_D = h_D + O(1)$ である（ここで，h_D は D に付随する任意の高さ関数である）．
(ii) $x, y \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ に対して，

$$\langle x, y \rangle_D := \frac{1}{2}\left(\hat{h}_D(x+y) - \hat{h}_D(x) - \hat{h}_D(y)\right)$$

と定めると，$\langle\ ,\ \rangle_D$ は $A(\bar{\mathbb{Q}}) \times A(\bar{\mathbb{Q}})$ 上の対称双線形形式を与える．

$\hat{h}_D$ を，D に付随する *Néron-Tate* **の高さ関数** という．

Néron-Tate の高さ関数の基本的な性質をまとめよう．

(1) D に付随する高さ関数 h_D を一つ選ぶ．このとき，任意の $x \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ に対して，

$$\hat{h}_D(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} h_D([n]x),$$

が成り立つ．さらに，$\hat{h}_D = h_D + O(1)$ が成り立つ．

(2) $\hat{h}_D$ は n-倍射に関して 2 次的である．すなわち，任意の $x \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ に対して，$\hat{h}_D([n]x) = n^2 \hat{h}_D(x)$ となる．

(3) D は**豊富**であると仮定する．このとき，任意の $x \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ に対して，$\hat{h}_D(x) \geq 0$ が成り立つ．さらに，

$$\{x \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \mid \hat{h}_D(x) = 0\} = A(\bar{\mathbb{Q}})_{tor}$$

となる．ここで，$A(\bar{\mathbb{Q}})_{tor} := \{A(\bar{\mathbb{Q}})$ のねじれ点 $\}$ である．

1.4 ネフ標準的高さ定理

ここでは，上の Néron-Tate の高さ関数の基本的性質 (3) で，「豊富」を「ネフ」に変えたものを考える．次が，一つ目の主定理である．

定理 1.2 (ネフ標準的高さ定理)．A を $\bar{\mathbb{Q}}$ 上に定義されたアーベル多様体とし，$D \in \mathrm{Div}(A)_{\mathbb{R}}$ をネフ で対称な $\mathbb{R}$-因子とする．さらに，$D \not\sim_{lin} 0$ とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) 任意の $x \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ に対して，$\hat{h}_D(x) \geq 0$ が成り立つ．
(2) $\bar{\mathbb{Q}}$ 上に定義された A の部分アーベル多様体 $B_D \subsetneq A$ が存在して，

$$\{x \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \mid \hat{h}_D(x) = 0\} = B_D(\bar{\mathbb{Q}}) + A(\bar{\mathbb{Q}})_{tor}$$

となる．

以下で（例 1.4），アーベル多様体の群準同型射を考えると，自然に**ネフな** $\mathbb{R}$-**因子**が現れることをみよう．このことが，Néron-Tate の高さ関数の性質を，豊富な因子だけでなく，ネフ な $\mathbb{R}$-因子についても考える動機となる（定理 2.7(4) 参照）．

例 1.3 (自明な例)．A_1, A_2 を $\bar{\mathbb{Q}}$ 上に定義されたアーベル多様体とし，$A := A_1 \times A_2$ を A_1, A_2 の直積とする．$D_2 \in \mathrm{Div}(A_2)$ を A_2 上の豊富で対称な因子とする．$\pi : A \to A_2$, $x = (x_1, x_2) \mapsto x_2$ を第 2 成分への射影とし，$D := \pi^* D_2$ とおく．

このとき，D は A 上の ネフな因子であり，任意の $x = (x_1, x_2) \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ に対して，$\hat{h}_D(x) = \hat{h}_{D_2}(x_2)$ が成り立つ．従って，$\hat{h}_D$ は非負関数であり，

$$\{x \in A(\bar{\mathbb{Q}}) \mid \hat{h}_D(x) = 0\} = A_1(\bar{\mathbb{Q}}) + A(\bar{\mathbb{Q}})_{tor}$$

となる（定理 1.2 が $B_D = A_1$ として成り立つ）．

例 1.4. E を $\bar{\mathbb{Q}}$ 上に定義された楕円曲線とする．$0_E \in E(\bar{\mathbb{Q}})$ で E の零元を表す．E は CM を持たないと仮定する．

$$A := E \times E$$

とおく．$\mathrm{NS}(A) := \mathrm{Div}(A)/$(代数同値) を A の Néron-Severi 群とする．E は CM を持たないので，$\mathrm{NS}(A)_{\mathbb{R}} := \mathrm{NS}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ は，$\mathbb{R}$ 上の 3 次元ベクトル空間であり，その基底として，

$$\alpha := [\{0_E\} \times E], \quad \beta := [E \times \{0_E\}], \quad \delta := [\Delta_E]$$

がとれる．ただし，$\Delta_E \subset E \times E$ は対角因子を表す．

さらに，$D \in \mathrm{Div}(A)_{\mathbb{R}}$ の $\mathrm{NS}(A)_{\mathbb{R}}$ での類 $[D]$ を，$[D] = x\alpha + y\beta + z\delta$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$ と表すとき，

$$D \text{ がネフ} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} xy + xz + yz \geq 0, \\ x + y + z \geq 0 \end{cases}$$

が成り立つ．

さて，$A := E \times E$ からそれ自身への群準同型射を考えよう．$M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ とし，$a + d > 2$ を仮定する． このとき，M は 2 つの正の固有値を持つ．固有値の値の大きい方を

$$\mu := \frac{(a+d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2}$$

とおく．$\mu > 1$ であることに注意しよう．A から A への群同型射 f_M を

$$f_M : A \to A,\ (x, y) \mapsto ([a]\,x + [b]\,y, [c]\,x + [d]\,y)$$

で定める．

このとき，**ネフで対称な** $\mathbb{R}$-**因子** $D_M \in \mathrm{Div}(A)_{\mathbb{R}}$ が存在して，$\mathrm{NS}(A)_{\mathbb{R}}$ において，

$$[f_M^* D_M] = \mu^2\,[D_M]$$

が成り立つ．D_M はネフであるが豊富ではない（実際，D_M の自己交点数は 0 である)．また，μ が無理数なので，D_M は $\mathrm{Div}(A)_{\mathbb{R}}$ の元であるが，$\mathrm{Div}(A)$ の元ではない．

以上をまとめると，$A := E \times E$ からそれ自身への群準同型射 f_M から，自然にネフな $\mathbb{R}$-因子 D_M が現れた．

次の節で，一般に，アーベル多様体からそれ自身への群準同型射に対して，ネフ標準的高さ定理がどのような数論的な情報を導くかを述べたい．さらに，その後，ネフ標準的高さ定理の証明の概略を述べたい．

2 算術的次数

2.1 設定

X を $\bar{\mathbb{Q}}$ 上に定義された正規な射影多様体とし，$f : X \to X$ を自己射とする．

H を X 上の（任意の）豊富な因子を一つとって固定する．h_H を H に付随する Weil 高さ関数とする．ここで，H が豊富なので，H に付随する Weil 高さ関数で非負関数であるものがとれる．必要なら 1 を加えて，任意の $x \in X(\bar{\mathbb{Q}})$ に対して、$h_H(x) \geq 1$ となるように選ぶ．

$f^n := f \circ \cdots \circ f$ で f を n 回合成した射を表す．また，$O_f(x) := \{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$ で，x の f による前軌道を表す．

$\mathrm{NS}(X) := \mathrm{Div}(X)/$(代数的同値) を X の Néron-Severi 群とする．このとき，$\mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}} := \mathrm{NS}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$，$\mathrm{NS}(X)_{\mathbb{C}} := \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ はそれぞれ有限次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間，有限次元 $\mathbb{C}$-ベクトル空間になる．

2.2 算術的次数と力学的次数

上の設定のもとで，算術的次数を定義しよう．

定義 2.5 (f の x での算術的次数)．$x \in X(\bar{\mathbb{Q}})$ とする．x を f の反復合成で送ったときの高さの増大度を

$$\alpha_f(x) := \lim_{n\to\infty} h_H\left(f^n(x)\right)^{1/n}$$

で定める（定理 2.7(1) で右辺の極限が存在することをみる）．$\alpha_f(x)$ を f の x での**算術的次数**とよぶ．

注意． 算術的次数 $\alpha_f(x)$ は x の前軌道 $O_f(x)$ の算術的な大きさを測っている．正確に述べると，

$$\lim_{B\to\infty} \frac{\#\{y \in O_f(x) \mid h_H(y) \leq B\}}{\log B} = \frac{1}{\log \alpha_f(x)}$$

が成り立つ．

定義 2.6 (f の力学的次数)．X を $\bar{\mathbb{Q}}$ 上に定義された正規な射影多様体とし，$f : X \to X$ を自己射とする．引き戻し f^* は $\mathrm{NS}(X)$ に作用する．

$$\delta_f := \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ は } f^* \otimes \mathbb{C} : \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{C}} \to \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{C}} \text{ の固有値}\}$$

とおく．δ_f を f の（第 1）**力学的次数**とよぶ．

注意． ここでは，$f : X \to X$ は射と仮定している．今回の小木曽氏と *Truong* 氏の講演で登場したように，一般に，支配的な有理写像 $f : X \dashrightarrow X$ に対して，f の第 k 力学的次数（$0 \le k \le \dim X$ ）が定義され研究されている．[*1]

2.3 算術的次数についての定理

次が，二つ目の主定理である．

定理 2.7． X を $\bar{\mathbb{Q}}$ 上に定義された正規な射影多様体とし，$f : X \to X$ を自己射とする．

(1) 算術的次数の定義 $\alpha_f(x) = \lim_{n\to\infty} h_H\left(f^n(x)\right)^{1/n}$ における右辺の極限は存在する（さらに，$\alpha_f(x)$ は豊富な因子 H の取り方によらない）．

(2) 各 $x \in X(\bar{\mathbb{Q}})$ に対して，$\alpha_f(x)$ は **代数的整数**である．

(3) $\{\alpha_f(x) \mid x \in X(\bar{\mathbb{Q}})\}$ は **有限集合**である．

(4) $X = A$ をアーベル多様体とし，$f : A \to A$ を群準同型射とする．$x \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ とする．このとき，x の前軌道 $O_f(x) := \{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$ が A において *Zariski* 稠密ならば，$\alpha_f(x) = \delta_f$ が成り立つ．

定理 2.7(4) を示すのに，ネフ標準的高さ定理を用いる．

3 証明の概略

3.1 ネフ標準的高さ定理の証明の概略

A を $\bar{\mathbb{Q}}$ 上に定義されたアーベル多様体とする．$D \in \mathrm{Div}(A)_{\mathbb{R}}$ に対して，

$$\phi_D : A \to \mathrm{Pic}^0(A)_{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto T_x^* D - D$$

とおく．ただし，$T_x : A \to A$ は x による平行移動を表す．

$\mathrm{End}(A)$ で A の群準同型射全体のなす環を表す．さらに，$\mathrm{End}(A)_{\mathbb{R}} := \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$

[*1] 例えば，

Russakovskii and Shiffman, *Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics*, Indiana Univ. Math. J. 46 (1997), 897–932.

Dinh and Sibony, *Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle*, Ann. of Math. (2) 161 (2005), 1637–1644.

とおく．このとき，$\mathrm{End}(A)_{\mathbb{R}}$ は，$\mathbb{R}, \mathbb{C}$ または $\mathbb{H}$ 上の行列環のいくつかの直積になっていることが知られている．

A 上の豊富な因子 H を固定する．このとき，$\phi_H : A \to \mathrm{Pic}^0(A)$ は isogeny になる．そこで，

$$\Phi : \mathrm{Div}(A)_{\mathbb{R}} \to \mathrm{End}(A)_{\mathbb{R}}, \quad D \mapsto \Phi_D := \phi_H^{-1} \circ \phi_D \tag{3.1}$$

とおく（類似の写像は，今回の桂氏の講演にも登場した）．

定理 3.8. A は $\bar{\mathbb{Q}}$ 上に定義されたアーベル多様体，H は A 上の豊富な因子，D は A 上の $\mathbb{R}$-因子，$\Phi_D \in \mathrm{End}(A)_{\mathbb{R}}$ と $\Phi : \mathrm{Div}(A)_{\mathbb{R}} \to \mathrm{End}(A)_{\mathbb{R}}$ は (3.1) の通りとする．

(1) $' : \mathrm{End}(A)_{\mathbb{R}} \to \mathrm{End}(A)_{\mathbb{R}}, \quad \alpha \mapsto \alpha' := \phi_H^{-1} \circ \hat{\alpha} \circ \phi_H$ を **Rosati 対合**とする．このとき，$\mathrm{Im}\,\Phi = \{\alpha \in \mathrm{End}(A)_{\mathbb{R}} \mid \alpha' = \alpha\}$ が成り立つ．
(2) D が**ネフ**であることと，Φ_D が**半正定値**であることは同値である．さらに，このとき，$\alpha \in \mathrm{End}(A)_{\mathbb{R}}$ が存在して，$\Phi_D = \alpha' \circ \alpha$ となる．
(3) (2) の状況で，任意の $x \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ に対して，

$$\hat{h}_D(x) = \hat{h}_H(\alpha(x))$$

が成り立つ．ただし，$\hat{h}_D$ と $\hat{h}_H$ は D と H に付随する *Néron-Tate* の高さ関数であり，定義域を $A(\bar{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$ に拡張している．

以下で，ネフ標準的高さ定理の証明の概略を述べよう．

定理 3.8 より，$\alpha \in \mathrm{End}(A)_{\mathbb{R}}$（$\alpha$ は D と H に依存する）が存在して，任意の $x \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ に対して $\hat{h}_D(x) = \hat{h}_H(\alpha(x))$ が成り立つ．

仮に（理想的に），$\alpha \in \mathrm{End}(A)$ であったとしよう．すなわち，α は A から A への群準同型射であったとしよう．このとき，$B_D := \mathrm{Ker}(\alpha)$ とおく．すると B_D は A の部分アーベル多様体であり，

$$\begin{aligned}\hat{h}_D(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \hat{h}_H(\alpha(x)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha(x) \in A(\bar{\mathbb{Q}})_{tor} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in B_D(\bar{\mathbb{Q}}) + A(\bar{\mathbb{Q}})_{tor}.\end{aligned}$$

となって，ネフ標準的高さ定理が成り立つ．

実際は，$\alpha \in \mathrm{End}(A)_{\mathbb{R}}$ でしかないが，さらに議論をすることにより，うまく B_D を構成して，ネフ標準的高さ定理を示すことができる．

3.2 定理 2.7(4) の証明の概略

A を $\bar{\mathbb{Q}}$ 上に定義されたアーベル多様体，$f : A \to A$ を群準同型射とする．$x \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ とし，x の前軌道 $O_f(x)$ は A において Zariski 稠密であると仮定する．

Step 1. f^* はネフ錐 $\mathrm{Nef}(A)$ を保つので，Perron-Frobenius 型の固定点定理よりネフで対称な $\mathbb{R}$-因子 $D \neq 0 \in \mathrm{Div}(A)_{\mathbb{R}}$ が存在して，$\mathrm{NS}(A)_{\mathbb{R}}$ において，$f^*([D]) = \delta_f[D]$ が成り立つ．

以下では，D に付随する Néron-Tate の高さ関数 $\hat{h}_D$ を考える．

Step 2. $y \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ が $\hat{h}_D(y) = 0$ をみたすと仮定すると，ネフ標準的高さ定理より，$y \in B_D(\bar{\mathbb{Q}}) + A(\bar{\mathbb{Q}})_{tor}$ が従う．これから，y の前軌道 $O_f(y)$ は A において Zariski 稠密にならないことが分かる．よって，対偶をとって，x の前軌道 $O_f(x)$ が A において Zariski 稠密でならば，$\hat{h}_D(x) > 0$ である．

Step 3. A の豊富な因子 H を一つとる．このとき，$\hat{h}_D(x) > 0$ なので

$$\begin{aligned}\alpha_f(x) &= \lim_{n\to\infty} \hat{h}_H(f^n(x))^{1/n} \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \hat{h}_D(f^n(x))^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\delta_f^n\, \hat{h}_D(x)\right)^{1/n} = \delta_f.\end{aligned}$$

が成り立つ．一方で，$\alpha_f(x) \leq \delta_f$ が成り立つことが分かる．これから， $\alpha_f(x) = \delta_f$ を得る． □

3.3 Jordan ブロックに対する標準的高さ

定理 2.7(1)(2)(3) は，f^* の $\mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}}$ の作用を調べて，f に関して良く振る舞う高さ関数を構成することによって証明される．ここでは，このような良い高さ関数（Jordan ブロックに対する標準的高さ）について述べたい．この高さ関数を用いて，定理 2.7(1)(2)(3) を示すことは，現論文 [1] を参照してほしい．

X を $\bar{\mathbb{Q}}$ 上に定義された射影多様体とし，$f : X \to X$ を射とする．$\lambda \in \mathbb{C}$ を $|\lambda| > 1$ である複素数とし， $D_0,\ D_1,\ D_2 \ldots, \in \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ は

$$\begin{aligned} f^*D_0 &\sim_{lin} \lambda D_0, \\ f^*D_1 &\sim_{lin} D_0 + \lambda D_1, \\ f^*D_2 &\sim_{lin} \qquad\quad D_1 + \lambda D_2, \\ &\ \vdots \qquad\qquad\quad \ddots \qquad \ddots \end{aligned} \tag{3.2}$$

を満たすとする．

Call–Silverman*2 によって，$k=0$ のとき，

$$\hat{h}_{D_0}(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^n} h_{D_0}(f^n(x))$$

の右辺の極限は存在する．しかし，$k \geq 1$ に対しては，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^n} h_{D_k}(f^n(x))$ は必ずしも収束しない．そこで補正項を加える．

定理 3.9 (Jordan ブロックに対する標準的高さ関数)．D_k に付随する *Weil* 高さ関数 h_{D_k} をとる．このとき，$k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，再帰的に

$$\hat{h}_{D_k}(x) := \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\lambda^n} h_{D_k}\left(f^n(x)\right) - \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i} \frac{1}{\lambda^i} \hat{h}_{D_{k-i}}(x) \right)$$

とおく．このとき，右辺の極限は存在する．さらに，$\hat{h}_{D_k}$ は

(i) $\hat{h}_{D_k} = h_{D_k} + O(1)$;
(ii) 任意の $x \in X(\bar{\mathbb{Q}})$ に対して，$\hat{h}_{D_k}\left(f(x)\right) = \lambda \hat{h}_{D_k}(x) + \hat{h}_{D_{k-1}}(x)$

をみたす．

注意． H を X の豊富な因子とする．δ_f を f の第 1 力学的次数とし，$|\lambda| > \sqrt{\delta_f}$ を仮定する．このとき, (3.2) の線形同値を数値的同値に置き換えた条件をみたす $D_k \in \mathrm{Div}(X)\otimes\mathbb{C}$ に対して，*Jordan* ブロックに対する標準的高さ関数を構成することができる．(ただし，(i) の $\hat{h}_{D_k} = h_{D_k} + O(1)$ は，$\hat{h}_{D_k} = h_{D_k} + O(\sqrt{h_H})$ に変わる．

参考文献

[1] S. Kawaguchi and J. H. Silverman, *Dynamical canonical heights for Jordan blocks, arithmetic degrees of orbits, and nef canonical heights on abelian varieties*, preprint, arXiv:1301.4964, 2013.

*2 Call and Silverman, *Canonical heights on varieties with morphisms*, Compositio Math. 89 (1993), 163–205.