

ダイマー模型と非可換クレパント解消

石井 亮

1 序文

ダイマー模型は、図 2.1 にあるような、2次元実トーラス上の2色グラフである。ダイマー模型から格子多角形が構成され、格子多角形から3次元の Gorenstein アフィントーリック多様体を定義することができる。一方、ダイマー模型からは、関係式付き籠を構成することができ、この関係式付き籠が、上記トーリック多様体の特異点解消やミラー対称性と強い関係にあることが、超弦理論の物理学者達により見いだされた ([Ken07, FHKV08, UY] 等参照)。ダイマー模型が全て正六角形からなる場合は、格子多角形は三角形、トーリック多様体は $SL(3, \mathbb{C})$ の有限可換部分群 G による商特異点で、関係式付き籠は McKay 籠と呼ばれるものに一致する。このとき、McKay 籠の表現のモジュライ空間は G -Hilb やそのフロップであり、 \mathbb{C}^3/G のクレパント解消や McKay 対応の研究に重要な役割を果たしてきた。

本稿では、ダイマー模型と上記トーリック多様体の(可換/非可換)クレパント解消についておもに植田一石氏と共同研究してきたことについて解説する。おもな結果は、non-degeneracy という条件のもと、関係式付き籠の表現のモジュライが、対応するトーリック多様体のクレパント解消になること、さらに、より強い consistency という条件のもと、関係式付き籠とクレパント解消が導来同値になること、などである。これらのことから、3次元の Gorenstein アフィントーリック多様体は「非可換クレパント解消」を持つこと、2次元のトーリック弱 Fano スタックは、直線束からなる充満強例外列を持つこと、などが従う。また、Charlie Beil 氏と植田氏、Álvaro Nolla de Celis 氏と植田氏との共同研究についても紹介する。

2 ダイマー模型と格子凸多角形

2.1 ダイマー模型

$T := \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ を 2次元実トーラスとする .

定義 2.1. $G = (B, W, E)$ がダイマー模型 (dimer model) とは ,

- B, W は T の互いに交わらない有限部分集合 (B の元を black node, W の元を white node という)
- E は black node と white node を結ぶ T 上の曲線の有限集合 (E の元を edge という)

であって , 次を満たすときにいう :

- 二本の edge はその端点以外で交わらない .
- 黒又は白の node は少なくとも二本の edge の端点である .
- $T \setminus \bigcup_{e \in E} e$ の各連結成分は単連結である .

ダイマー模型の例を図 2.1 に示す . 正方形の上の辺と下の辺 , 左の辺と右の辺を同一視することで , トーラス上に描いてあると見なす . このダイマー模型は black node と white node を 3 個ずつ , 辺を 10 本持っている .

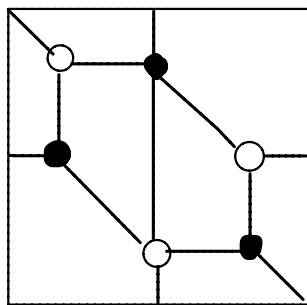


図 2.1: ダイマー模型の例

2.2 Perfect matchings

定義 2.2. ダイマー模型 (B, W, E) の perfect matching とは, E の部分集合 D であって,

$$\forall n \in B \cup W, \exists! e \in D, n \in e$$

をみたすものを言う.

図 2.2 は, 図 2.1 のダイマー模型における perfect matching のうち 4 つを示したものである. 太線の辺が perfect matching を構成している.

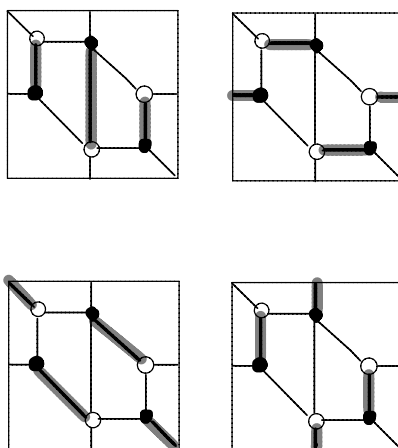


図 2.2: Perfect matchings

定義 2.3. ダイマー模型 (B, W, E) が non-degenerate とは, 任意の辺 $e \in E$ は適当な perfect matching D に含まれることをいう.

例えば, 図 2.1 におけるダイマー模型は, 図 2.2 を見ると, どの辺もどれかの perfect matching に含まれているので, non-degenerate である. ここでは non-degenerate なダイマー模型のみを考えることにする.

2.3 特性多角形

perfect matching は白と黒の node を繋いでいるので「黒から白」と向き付けすると, トーラス T 上の 1-chain と見ることができる. 容易にわ

かるように, 2つの perfect matching D_1, D_2 に対し, $D_1 - D_2$ は 1-cycle になる. そこで

$$h(D_1, D_2) := [D_1 - D_2] \in H_1(T, \mathbb{Z}) \cong H^1(T, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$$

と定義する.

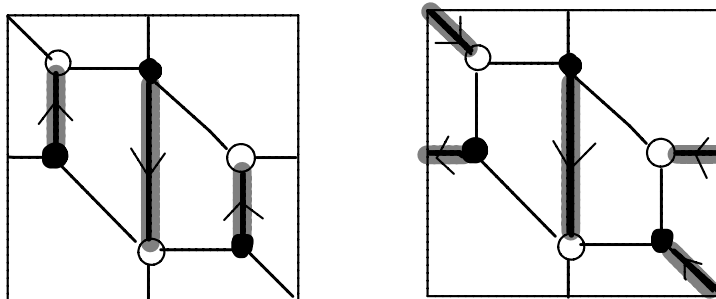


図 2.3: D_1 (左) と D_2 (右)

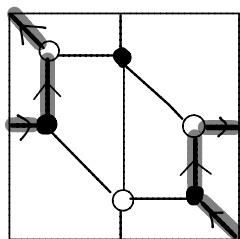


図 2.4: $D_1 - D_2$

例えば, 図 2.1 のダイマー模型において, 図 2.3 の D_1 と D_2 に対しては, 図 2.4 により, $h(D_1, D_2) = 1$ となる.

この定義から, 3つの perfect matching に対して

$$h(D_1, D_2) + h(D_2, D_3) = h(D_1, D_3) \quad (2.1)$$

が成り立つ.

定義 2.4. ダイマー模型 (B, W, E) の perfect matching D_0 を一つ取り固定する.

$$\{h(D, D_0) \mid D \text{ は perfect matching}\}$$

の \mathbb{R}^2 における凸包 Δ を (B, W, E) の特性多角形という.

(2.1) により, Δ は平行移動を除き, (B, W, E) により定まる.

例えば, 図 2.1 のダイマー模型において, perfect matching を全て列挙すると図 2.5 のようになる. 上段の perfect matching のうち1つを D_0 として取った場合の $h(D, D_0)$ が書き込んであり, Δ は図 2.6 のようになる.

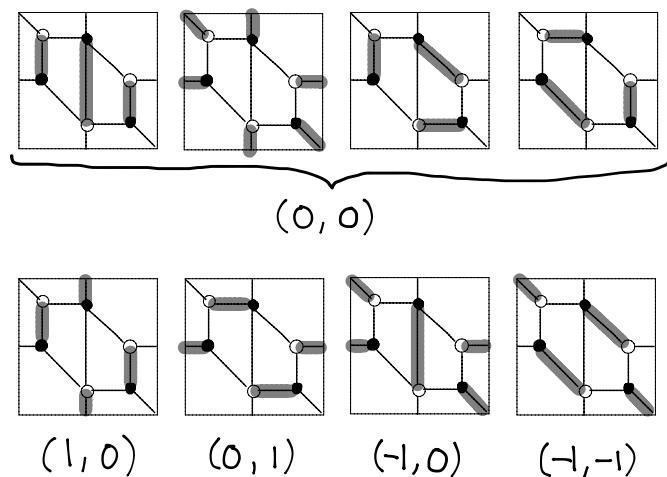


図 2.5: 全ての perfect matching

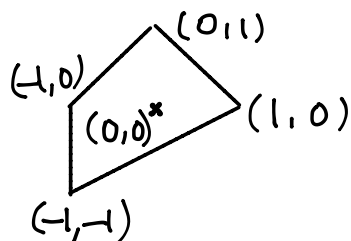


図 2.6: 特性多角形

3 ダイマー模型と籠

3.1 籠 (Quiver)

定義 3.1. $Q = (V, A, s, t)$ が籠 (Quiver) であるとは,

- V, A は集合
- s, t はともに A から V への写像

であることを言う。 V の元を頂点， A の元を矢， 矢 a に対し $s(a)$ を a の始点 (source)， $t(a)$ を a の終点 (target) という。

ここでは， V も A も有限集合であるとする。 頂点を丸， 矢 a を $s(a)$ から $t(a)$ に向かう矢印として籓を視覚化する。

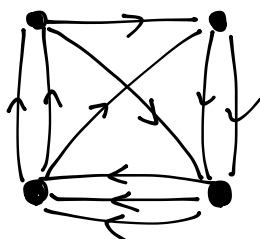


図 3.1: 頂点が 4 つ， 矢が 10 本の籓の例

頂点 $v, w \in V$ について， v から w への籓の道とは， $s(a_1) = v, s(a_2) = t(a_1), s(a_3) = t(a_2), \dots, t(a_l) = w$ を満たす矢の列 $a_l a_{l-1} \cdots a_1$ のことである。 各頂点 v について， v から v への， 1 本も矢を経由しない道 e_v も

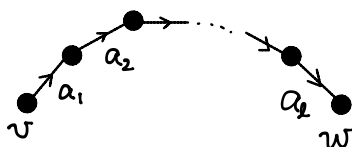


図 3.2: 籓の道

考える。

定義 3.2. 籓 Q の道代数 $\mathbb{C}Q$ とは， Q の道を基底とする線形空間に， 次のように積を定義したものである： 2 つの道 p, q の積 pq は， q の終点と p の始点が一致する時は q の後に p を接続した道， そうでない時は 0 とする。

定義 3.3. $\Gamma = (Q, \mathcal{I})$ が関係式付き籠とは, Q が籠で \mathcal{I} が $\mathbb{C}Q$ の両側イデアルであることをいう. Γ の道代数を $\mathbb{C}\Gamma = \mathbb{C}Q/\mathcal{I}$ により定義する.

籠 Q に対し, 左 $\mathbb{C}Q$ -加群を Q の表現という. Q の表現は, 各頂点 v に対する線形空間 E_v と各矢 a に対する線形写像 $\phi_a : E_{s(a)} \rightarrow E_{t(a)}$ を組にした $E = (\{E_v\}_{v \in V}, \{\phi_a\}_{a \in A})$ により表される. 関係式付き籠 $\Gamma = (Q, \mathcal{I})$ に対しては, $\mathbb{C}\Gamma$ -加群を Γ の表現という.

3.2 籠の表現のモジュライ

関係式付き籠 $\Gamma = (V, A, s, t, \mathcal{I})$ の表現 $E = (\{E_v\}_{v \in V}, \{\phi_a\}_{a \in A})$ に対して

$$\dim E := (\dim E_v)_{v \in V} \in \mathbb{Z}^V$$

を E の次元ベクトルという. なお, ここでは, 各 E_v が有限次元であるとする.

次元ベクトル $d = (d_v)_{v \in V}$ を固定し, 籠の表現のモジュライ空間を考える. そのために, 安定性を定義する.

定義 3.4. $\theta \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^V, \mathbb{Z})$ は $\theta(d) = 0$ を満たすとする. 次元ベクトルが d である Γ の表現 E が θ -安定であるとは, 任意の部分表現 $0 \subsetneq F \subsetneq E$ に対して, $\theta(\dim F) > 0$ となることを言う. θ -半安定とは, 上で $\theta(\dim F) \geq 0$ が成り立つことを言う.

定理 3.5 (King). θ -半安定な表現の S -同値類のモジュライスキーム $\overline{\mathcal{M}}_{\theta}(d)$ が存在する. それは, θ -安定な表現の同型類のモジュライ $\mathcal{M}_{\theta}(d)$ を開部分スキームとして含む. $\{d_v\}$ の最大公約数が 1 であるとき, $\mathcal{M}_{\theta}(d)$ 上には *universal family* が存在する.

θ が d に関して generic とは, 次元ベクトルが d である表現の安定性と半安定性が一致することをいう.

3.3 ダイマー模型に付随する関係式付き籠

ダイマー模型 (B, W, E) から, その双対を取ることによって, 関係式付き籠が定義できることを説明する. まず集合 V, A を

- V は $T \setminus \bigcup_{e \in E} e$ の連結成分のなす集合.

- $A = E$.

と定義する．そして，矢 $a \in A = E$ は， a を境界に隣接する2つの連結成分を結ぶとし， a の白い node を右に見るように向きをつける．これによって，籓 $Q = (V, A, s, t)$ ができる．例えば，図 2.1 のダイマー模型に付随する籓は，図 3.3 のように4つの頂点と10本の矢を持っているが，よく見るとこれは図 3.1 の籓に一致している．

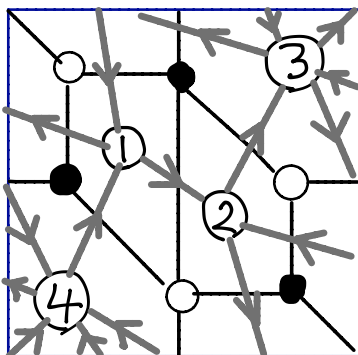


図 3.3: ダイマー模型からできる籓

さらに， Q の関係式 I を，各 $e \in E$ に対する $t(e)$ から $s(e)$ へ向かう2つの道（図 3.4 参照）の差で生成される両側イデアルとして，定める．

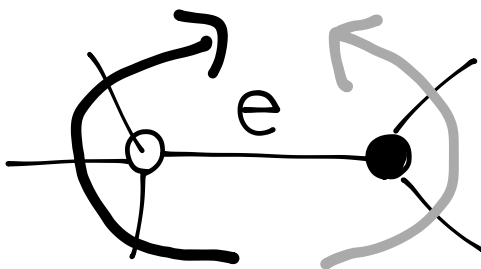


図 3.4: 関係式

4 3次元 Gorenstein アフィントーリック多様体 とダイマーモデル

ダイマーモデル (B, W, E) に対して, 格子凸多角形 $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ を構成した. Δ を $\mathbb{R}^2 \times \{1\} \subset \mathbb{R}^3$ に置いて, 原点を頂点とする錐体 $C(\Delta) \subset \mathbb{R}^3$ を作る. $C(\Delta)$ に対応するアフィントーリック多様体を $X_{C(\Delta)}$ と書く. Δ は平行

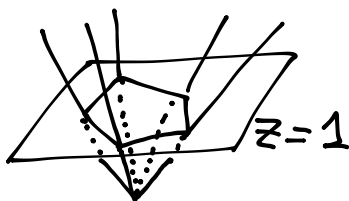


図 4.1: $C(\Delta)$

移動を除いて一意に定まるので, $X_{C(\Delta)}$ も (B, W, E) だけから同型を除いて定まる. 作り方から, $X_{C(\Delta)}$ は Gorenstein であり, 3次元 Gorenstein アフィントーリック多様体はみなこのようにしてできる.

一方 (B, W, E) から関係式つき簇 Γ が定義された. この関係式つき簇に対して, 次元ベクトル $d = (1, 1, \dots, 1)$ (各頂点に1次元の線形空間をおく) として, $\mathcal{M}_\theta = \mathcal{M}_\theta(d)$ とおく. 次は我々の最初の結果である:

定理 4.1 ([IU08]). ダイマーモデル (B, W, E) が *non-degenerate* で, 安定性のパラメータ θ が *generic* とする. このとき, \mathcal{M}_θ は $X_{C(\Delta)}$ のクレパント解消である.

ダイマーモデルが合同な六角形ばかりからなるタイリングであるとき, Δ は三角形であり, 従って $X_{C(\Delta)}$ は商特異点 \mathbb{C}^3/G ($G \subset SL(3, \mathbb{C})$ は可換な有限部分群) となる. このとき関係式付き簇 Γ は G に対する McKay 簇と呼ばれるものであり, ある *generic* な θ に対して \mathcal{M}_θ は $G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^3)$ と一致する. 図 4.2 は, 1996年の城崎シンポジウムの報告集に載っている [Rei] から取ったものであるが, G が位数 37 の巡回群の場合の McKay 簇を表したものである. 六角形の番号は G の表現に対応し, 同じ番号の六角形は同一視されるので, これはトーラスのタイリングである. 六角形の頂点に白黒をつけると, ダイマーモデルになる.

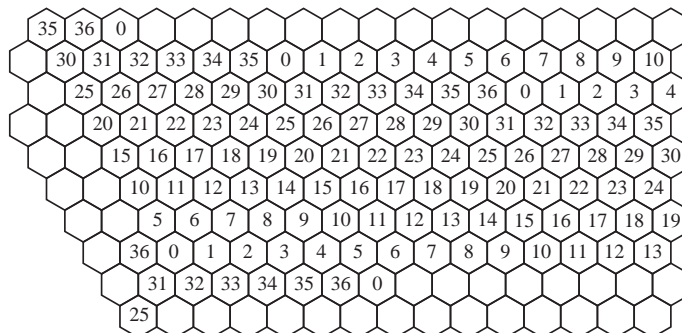
Figure 11: The McKay quiver for $\frac{1}{37}(1, 5, 31)$.

図 4.2: M. Reid “McKay correspondence” [Rei] より

このように，上の定理は中村による「 G -Hilb(\mathbb{C}^3) が \mathbb{C}^3/G のクレパント解消である」という定理 [Nak01] の一般化である．

可換とは限らない $G \subset SL(3, \mathbb{C})$ に対する商特異点に関しては，Bridgeland-King-Reid による次の定理がある．

定理 4.2 ([BKR01]). $G \subset SL(3, \mathbb{C})$ を有限部分群とするとき， $Y := G\text{-Hilb}(\mathbb{C}^3) \rightarrow \mathbb{C}^3/G$ はクレパント解消であり，三角圏の同値

$$D^b(\text{coh } Y) \cong D^b(\text{coh}^G(\mathbb{C}^3))$$

が成り立つ．

ここで， $\text{coh}^G(\mathbb{C}^3)$ は G -同変な連接層のなすアーベル圏であり，それは G の多項式環 $\mathbb{C}[x, y, z]$ 上の skew group ring $G * \mathbb{C}[x, y, z]$ 上の有限生成加群のなす圏 $\text{mod } G * \mathbb{C}[x, y, z]$ と同値である． G が可換のときは，六角形からなるダイマー模型の定める関係式付き道代数はこの skew group ring と同型である．

そこでダイマー模型に対しても同様の導来同値が期待されるが，そのためには non-degeneracy だけでは不十分である．ダイマー模型に対する consistency と呼ばれる概念が定義でき，次が成り立つ．consistency の定義については §7 において触れる．

定理 4.3 ([IUc]). ダイマー模型が *consistent* で θ が *generic* ならば，

- $D^b(\text{coh } \mathcal{M}_\theta) \cong D^b(\text{mod } \mathbb{C}\Gamma)$
- $\mathbb{C}\Gamma$ は $X_{C(\Delta)}$ の *non-commutative crepant resolution* (次節参照) である .

Broomhead も本質的に同様のことを示し, Mozgovoy-Reineke, Davison もそれぞれ関連した結果を得ているが, いずれも環 $\mathbb{C}\Gamma$ のホモロジー代数的性質を調べるもので, 上記の形の主張を得るためには [BKR01] の議論に頼ることになる. 一方我々の方法は [BKR01] の議論とは独立である. なお, ダイマー模型は *consistent* ならば *non-degenerate* である ([IU08]).

\mathcal{M}_θ 上の *universal family* は, いくつかの直線束とその間の射により与えられる. \mathcal{E} をそれら直線束の直和とした時, 定理 4.3 は

- \mathcal{E} は \mathcal{M}_θ 上の *tilting bundle* である .
- $\text{End}(\mathcal{E}) \cong \mathbb{C}\Gamma$.

を示すことにより, 得られる. 我々の方法では, Δ と Δ から 1 つの頂点を除きその他の格子点の凸包を取ったものとの比較をし, Δ に関する帰納法を用いている. その際に 2 次元商特異点に対する *special McKay* 対応と呼ばれるものを用いる. また, 証明の一部で, 次の定理を示すときに用いた論法を使う.

定理 4.4 ([IUa]). ダイマー模型は *consistent* であるとする. $Y \rightarrow X_{C(\Delta)}$ が *projective crepant resolution* であるとき, *generic* な θ で $\mathcal{M}_\theta \cong Y$ となるものが存在する .

これは, 商特異点のときの [CI04] のダイマー模型版である .

non-degenerate だが *consistent* でないダイマー模型はたくさんある. それでも定理 4.1 は成立するが, 道代数 $\mathbb{C}\Gamma$ はそのままでは良い性質を持たず, 定理 4.3 は成立しない. これに関連して, 次の定理がある .

定理 4.5 ([BIU]). (B, W, E) が *non-degenerate* なダイマー模型とする. このとき, ダイマー模型 (B', W', E') で次をみたすものが存在する .

- (B', W', E') は *consistent*.
- $B' \subset B, E' \subset E, W' \subset W$.
- (B', W', E') と (B, W, E) の特性多角形は, 等しい .

つまり, 特性多角形を変えないまま辺と *node* を取り除いて *consistent* にできる .

5 Non-commutative crepant resolutions

Non commutative crepant resolution (NCCR) は Van den Bergh [vdB04] により定義された概念である。(Leuschke によるサーベイ [Leu12] も参照されたい.)

定義 5.1 ([vdB04]). R は体 k 上有限生成な Gorenstein 整域とする. R -代数 A が $\text{Spec } R$ の NCCR であるとは, 次をみたすことを言う.

- $A \cong \text{End}_R(M)$ となる有限生成反射的 R -加群 M が存在する.
- A は有限大域次元を持つ.
- A は Cohen-Macaulay R -加群である.

例 5.2. $G \subset SL(n, \mathbb{C})$ であるとき, skew group ring $G * \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ は \mathbb{C}^n/G の NCCR である.

Bridgeland-King-Reid の定理は, 3 次元の一般の NCCR に対してもそのまま成立する.

定理 5.3 ([vdB04]). 3 次元の場合, NCCR が存在すれば, (通常の意味の) crepant resolution が存在して, それらは互いに導来同値である.

一般次元では, 前半部分は正しくないが, NCCR と crepant resolution が存在すれば, 互いに導来同値であると予想されている.

ダイマー模型に関係する場合には Gulotta による次の結果がある:

定理 5.4 ([Gul08]). 任意の格子凸多角形 Δ に対し, Δ を定める consistent なダイマー模型が存在する.

定理 4.3 と合わせると, 次が得られたことになる.

系 5.5. 3 次元 Gorenstein アフィントーリック多様体は, NCCR を持つ.

次の節では, これを少しだけ拡張する. なお, NCCR を用いるわけではないが, 定理 4.3 と定理 5.4 の応用として次の定理も得ることができる:

定理 5.6 ([IUb]). 2 次元の任意のトーリック弱 Fano スタックは, 直線束からなる full strong exceptional collection を持つ.

2 次元のトーリック弱 Fano スタックは, 格子凸多角形と 1 つの内点, および辺上のいくつかの格子点により決定される. 上記の直線束の直和の自己準同型環は, ダイマー模型と 1 つの perfect matching を用いて記述される.

6 対称性を持つダイマー模型

G を $GL(2, \mathbb{Z})$ の有限部分群とする．つまり，位数 1, 2, 3, 4, 6 の回転の生成する巡回群であるか，または，位数 2, 4, 6, 8, 12 の二面体群である． G は自然に $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ に作用する．

定義 6.1. G がダイマー模型 (B, W, E) に作用するとは，任意の $g \in G$ に対し，

- $g(E) = E$
- $\deg g = 1$ ならば $(g(B), g(W)) = (B, W)$
- $\det g = -1$ ならば $(g(B), g(W)) = (W, B)$

となることを言う．

G が (B, W, E) に作用し，さらに G -不変な perfect matching D が存在するとする．このとき，

- G は $\mathbb{C}\Gamma$ に自然に作用するが， D に属する矢に対しては $\det g$ に応じて符号を付ける．
- G は Δ に線形に作用するが，やはり適当に符号を付けて， G の $X_{C(\Delta)}$ への作用で， $X_{C(\Delta)}/G$ が Gorenstein になるようなものが定義できる．

すると，定義から次が従う．

定理 6.2. G が作用する consistent なダイマー模型 (B, W, E) において， D が不変な perfect matching であるとし，上の様に $\mathbb{C}\Gamma$ や $X_{C(\Delta)}$ への G 作用を定める．このとき，skew group algebra $G * \mathbb{C}\Gamma$ は $X_{C(\Delta)}$ の NCCR である．

このような，群の作用する consistent なダイマー模型の存在については，次が言える． $G \not\subset SL(2, \mathbb{Z})$ という仮定は取り除けると期待している．

定理 6.3. $G \subset GL(2, \mathbb{Z})$ は有限部分群で， $G \not\subset SL(2, \mathbb{Z})$ とする． G の \mathbb{R}^2 への作用で格子凸多角形 $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ が不変ならば， G の作用する consistent なダイマー模型 (B, W, E) と G -不変な perfect matching D で，対応する格子多角形が Δ であるものが存在する．

7 ダイマー模型の構成と consistency

与えられた格子多角形 Δ に対応するダイマー模型を構成する方法として, Hanany と Vegh は, “Fast Inverse Algorithm” と呼ぶものを考案した [HV07].

- (1) Δ の各辺の normal vector の方向の曲線を $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上に3本が一点で交わらないように引く. 曲線は直線でなくてもよく, その場合 normal vector は曲線のホモロジー類を定めるとする. なお, Δ の辺が格子点によりいくつかの線分に分割される場合, その線分の数だけ引く.
- (2) (1) で引いた線により, T はいくつかの多角形に分割される. 各多角形を囲む曲線の向きが全て一致するか, 互い違いになるか, どちらかであるとき (つまり図 7.1 の真ん中のようなとき), 曲線の configuration は admissible であるという.

以下, 曲線の admissible configuration が見つかったとする.

- (3) (2) でできた多角形のうち, 囲む曲線の向きが一致しているものの中に黒丸または白丸を描く. 向きが時計回りのとき黒丸, 反時計回りのとき白丸とする.
- (4) 多角形の頂点をはさんで向き合う白丸と黒丸を線分で結ぶ.

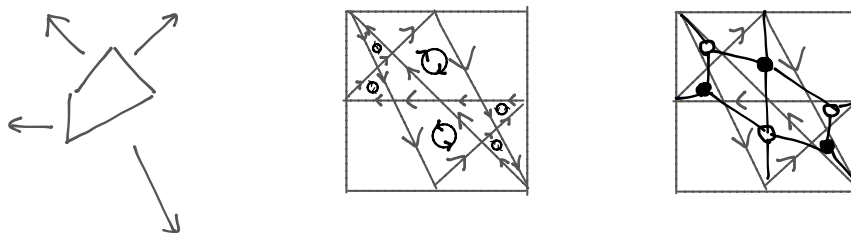


図 7.1: normal vector, admissible configuration とダイマー模型

algorithm と名がついているが，(2) の admissible configuration が見つかるかどうか，という問題が残っていた．

Fast inverse algorithm は曲線の admissible configuration からダイマー模型を作るものであるが，出来上がったダイマー模型からは，それらの曲線は “zigzag path” として捉えることができる．

定義 7.1. ダイマー模型 (B, W, E) の zigzag path とは， $\bigcup_{e \in E} e$ の上を進む道で，黒い node では最も左に曲がり，白い node では最も右に曲がるものである．

ダイマー模型に対して，その zigzag path の集合は admissible configuration をなし，次が言える：

補題 7.2. ダイマー模型と T 上の曲線の admissible configuration とは，isotopy を除き，一対一に対応する．

ダイマー模型の consistency は zigzag path に対する条件として定義される：

定義 7.3. ダイマー模型 (B, W, E) が consistent であるとは，以下の条件を満たすことである．

- ホモロジー類が自明な zigzag path は存在しない．
- 自己交差を持つ zigzag path は存在しない．
- T の普遍被覆 \mathbb{R}^2 において，二本の zigzag path が二度同じ向きに交わることはない．((B, W, E) の引き戻しである， \mathbb{R}^2 上の二重周期的なダイマー模型において考える．)

従って， T 上の曲線の admissible configuration が上の条件を満たす（例えば全ての曲線が直線であるときがそうである）ように取れば，consistent なダイマー模型の存在が示せるのであるが，最初の存在証明（定理 5.4）は間接的なものであった．これは，長方形に対応するダイマー模型は具体的に構成できること，任意の凸格子多角形は長方形から隅を切り落とす操作を繰り返すことで得られること，多角形の隅を切り落とす操作に対応するダイマー模型が記述できること，を用いて示された．

今回我々は，Fast Inverse Algorithm を修正することにより，いつでも機能するようにした．つまり，admissible とは限らない曲線の configuration からダイマー模型を作り，「余分な部分」を取り除くことによって目的の

consistent なダイマーモデルを得ることができる．それによって，定理 6.3 の証明が可能になった．ただし，余分な部分を取り除く操作が対称性を保つことの証明に $G \not\subset SL(2, \mathbb{Z})$ という仮定を用いている．

参考文献

- [BIU] Charlie Beil, Akira Ishii, and Kazushi Ueda, *Cancellativization of dimer models*, arXiv:1301.5410.
- [BKR01] Tom Bridgeland, Alastair King, and Miles Reid, *The McKay correspondence as an equivalence of derived categories*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 3, 535–554 (electronic). MR MR1824990 (2002f:14023)
- [CI04] Alastair Craw and Akira Ishii, *Flops of G -Hilb and equivalences of derived categories by variation of GIT quotient*, Duke Math. J. **124** (2004), no. 2, 259–307. MR MR2078369
- [FHKV08] Bo Feng, Yang-Hui He, Kristian D. Kennaway, and Cumrun Vafa, *Dimer models from mirror symmetry and quivering amoebae*, Adv. Theor. Math. Phys. **12** (2008), no. 3, 489–545. MR MR2399318 (2009k:81180)
- [Gul08] Daniel R. Gulotta, *Properly ordered dimers, R -charges, and an efficient inverse algorithm*, J. High Energy Phys. (2008), no. 10, 014, 31. MR MR2453031 (2010b:81116)
- [HV07] Amihay Hanany and David Vegh, *Quivers, tilings, branes and rhombi*, J. High Energy Phys. (2007), no. 10, 029, 35. MR MR2357949
- [IUa] Akira Ishii and Kazushi Ueda, *Dimer models and crepant resolutions*, arXiv:1303.4028.
- [IUb] ———, *Dimer models and exceptional collections*, arXiv:0911.4529.
- [IUC] ———, *Dimer models and the special McKay correspondence*, arXiv:0905.0059.

- [IU08] ———, *On moduli spaces of quiver representations associated with dimer models*, Higher dimensional algebraic varieties and vector bundles, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B9, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2008, pp. 127–141. MR MR2509696
- [Ken07] Kristian D. Kennaway, *Brane tilings*, Internat. J. Modern Phys. A **22** (2007), no. 18, 2977–3038. MR MR2343711 (2009a:81155)
- [Leu12] Graham J. Leuschke, *Non-commutative crepant resolutions: scenes from categorical geometry*, Progress in commutative algebra 1, de Gruyter, Berlin, 2012, pp. 293–361. MR 2932589
- [Nak01] Iku Nakamura, *Hilbert schemes of abelian group orbits*, J. Algebraic Geom. **10** (2001), no. 4, 757–779. MR MR1838978 (2002d:14006)
- [Rei] Miles Reid, *McKay correspondence*, alg-geom/9702016.
- [UY] Kazushi Ueda and Masahito Yamazaki, *Homological mirror symmetry for toric orbifolds of toric del Pezzo surfaces*, To appear in Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, math.AG/0703267.
- [vdB04] Michel van den Bergh, *Non-commutative crepant resolutions*, The legacy of Niels Henrik Abel, Springer, Berlin, 2004, pp. 749–770. MR MR2077594 (2005e:14002)