代数幾何学シンポジウム記録
2013年度 pp.33-41

Stabilization of the F-blowup sequence and Frobenius push-forward

原 伸生
東京農工大学 大学院工学研究院
email: nhara@cc.tuat.ac.jp

本稿では, 代数多様体 X は常に標数 $p>0$ の代数閉体 k 上で定義されているものとする. このとき, X の Frobenius 射 $F\colon X\to X$ が, 底空間 $\mathrm{sp}(X)$ 上の恒等写像と構造層 $\mathcal{O}_X$ 上の p 乗環準同型 $F\colon \mathcal{O}_X\to F_*\mathcal{O}_X;\ a\mapsto a^p$ の組として定まる. 非負整数 e に対し, e 次 Frobenius 射 $F^e\colon X\to X$ による構造層の直像 $F^e_*\mathcal{O}_X$ は p^e 乗根の環 $\mathcal{O}_X^{1/p^e}$ と自然に同一視され, 階数 $p^{e\dim X}$ の連接層となる. この Frobenius 直像の平坦性 (= 局所自由性) は X の非特異性と同値である (Kunz の定理 [Ku]):

$$X \text{ が非特異} \iff \text{任意の/ある } e\geq 1 \text{ に対して } F^e_*\mathcal{O}_X \text{ が平坦 } \mathcal{O}_X \text{ 加群}.$$

この Frobenius 直像の普遍的平坦化 (爆発) が, X の e 次 F 爆発 $\mathrm{FB}_e(X)$ とよばれる双有理モデルである (Yasuda [Y1]). F 爆発は正標数の代数多様体 X に対して自然に定まる双有理モデルの列 $\{\mathrm{FB}_e(X)\,|\,e=0,1,2,\dots\}$ を与えるから, 個々の双有理モデル $\mathrm{FB}_e(X)$ の性質と F 爆発列全体としての振る舞い, 例えば, F 爆発列全体を支配するような双有理モデルが存在するか (boundedness), F 爆発列が $e\gg 0$ で安定化するか (stabilization) などの問題が生ずる. 本稿の前半では, 主に曲面特異点の F 爆発と F 爆発列に関してこの数年の間に得られた結果を紹介する.

F 爆発は本質的には局所的な問題であるから X を局所スキームとするとき, その F 爆発列の安定化の十分条件に関わる性質として, 有限 F 表現型 (FFRT), すなわち, いずれかの Frobenius 直像 $F^e_*\mathcal{O}_X$ の直和因子として現れる直既約 $\mathcal{O}_X$ 加群の同型類全体が高々有限個という性質が考えられる. この性質は, すべての $F^e_*\mathcal{O}_X$ が『十分細かく』直和分解することを必要とするため, X の特異点に強い制約を与え, 例えば, F 正則特異点でも FFRT でない例が高次元で知られている (A. Singh).

本稿の後半では, FFRT の大域版として, 射影多様体 X の Frobenius 直像 $F^e_*\mathcal{O}_X$ が同様の有限性をもつという性質 “GFFRT” を考え, 非自明で最も簡単なある有理曲面の場合にこれを験証する. ここで用いる方法は, 射影平面上の点を爆発させて得られる有理曲面 X について, Frobenius 直像 $F^e_*\mathcal{O}_X$ をある種の拡大として表し, それから得られる行列の『基本変形もどき』を用いて $F^e_*\mathcal{O}_X$ の直和分解の構造を調べるというもので, 筋が良いとは言い難いが, 標数 2, 3 の 4 点爆発の場合には $F^e_*\mathcal{O}_X$ の構造が決定できたので, その実験結果を紹介する.

1. F 爆発

正標数の代数多様体 X の F 爆発 (F-blowup) は, X の Frobenius 射に関わるある種のモジュライ空間として安田健彦氏により定義された ([Y1]). 本節では主に, 曲面特異点の F 爆発に関してこの数年の間に得られた結果を紹介する.

定義 1.1. X 上の連接層 $\mathcal{M}$ $(\neq 0)$ と双有理固有射 $f\colon Y\to X$ に対し, $\mathcal{M}$ の f による引き戻しの $\mathcal{O}_Y$ 捩れ部分による商を $f^\star\mathcal{M}=f^*\mathcal{M}/\mathrm{tors}$ とおく.

(1) $f^\star\mathcal{M}$ が $\mathcal{O}_Y$ 加群として平坦であるとき, f を $\mathcal{M}$ の**平坦化**という.

(2) $\mathcal{M}$ の任意の平坦化 $g\colon Z\to X$ が, 平坦化 f を経由して $g\colon Z\to Y\xrightarrow{f}X$ と分解するとき, f を $\mathcal{M}$ の**普遍的平坦化**とよび, $Y=\mathrm{Bl}_{\mathcal{M}}(X)$ で表す.

階数 r の連接層 $\mathcal{M}$ の普遍的平坦化 $\mathrm{Bl}_{\mathcal{M}}(X)$ は, X の分数イデアル

$$\mathcal{I}_{\mathcal{M}} = \mathrm{Im}(\bigwedge^r \mathcal{M} \to \bigwedge^r \mathcal{M} \otimes k(X)) \cong k(X))$$

を中心とする爆発として実現される ([OZ], [Vi]). これを用いて F 爆発の定義は次のように云いかえられる.

定義 1.2 (Yasuda [Y1]). 非負整数 e に対し, X 上の連接層 $F_*^e\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X^{1/p^e}$ の普遍的平坦化を X の e 次 **F 爆発**とよび, $\varphi_e\colon \mathrm{FB}_e(X) \to X$ で表す.

Kunz の定理より, F 爆発 $\varphi_e\colon \mathrm{FB}_e(X) \to X$ は X_{sm} 上同型な射影的双有理射である.

従順な商特異点 $X = Y/G$ の F 爆発と G-Hilbert 概形 $\mathrm{Hilb}^G(Y)$ との密接な関係が一般次元で示されている.

定理 1.3 (Yasuda [Y1], Toda–Yasuda [TY]). 位数が $\mathrm{ch}(k) = p$ で割り切れない有限群 G が多項式環 $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ に作用しているとし，$\pi\colon Y = \mathrm{Spec}\, S \to X = Y/G = \mathrm{Spec}\, S^G$ を商写像とする．このとき $e \gg 0$ に対して

$$\mathrm{FB}_e(X) \cong \mathrm{Hilb}^G(Y).$$

1.4. F 爆発と F 特異点. 商特異点とは限らない特異点のうち, F 純, F 正則などの F 特異点は F 爆発との相性が良いと期待される. 問題は局所的であるから, F 有限[1]な整域 R について F 特異点の定義を述べておく ([HR], [HH]).

(1) R が **F-純** (F-pure) であるとは, 包含写像 $R \hookrightarrow R^{1/p}$ が R 加群の射として分裂すること, 云いかえれば, R が R 加群 $R^{1/p}$ の直和因子であることをいう.

(2) R が **強 F 正則** (strongly F-regular) とは, 任意の非零元 $c \in R$ に対し, ある整数 $e > 0$ が存在して, c^{1/p^e} を掛ける写像 $R \xrightarrow{c^{1/p^e}} R^{1/p^e}$ が R 加群の射として分裂すること, すなわち, $c^{1/p^e}R$ が R 加群 R^{1/p^e} の直和因子となることをいう.

以下では強 F 正則を単に F 正則ということとする. 従順な商特異点は F 正則であり, F 正則特異点は F 純かつ正規である.

1.5. F 爆発列の単調性 [Y2]**.** $X = \mathrm{Spec}\, R$ が F 純特異点のみをもつとき, $F_*^e\mathcal{O}_X$ は $F_*^{e+1}\mathcal{O}_X$ の直和因子となるから, $F_*^{e+1}\mathcal{O}_X$ の平坦化は $F_*^e\mathcal{O}_X$ の平坦化にもなる. よって, F 爆発の普遍性より, $\mathrm{FB}_{e+1}(X)$ は $\mathrm{FB}_e(X)$ を支配し,

$$\cdots \to \mathrm{FB}_{e+1}(X) \to \mathrm{FB}_e(X) \to \cdots \to \mathrm{FB}_2(X) \to \mathrm{FB}_1(X) \to X$$

と F 爆発列が射で繋がる. この性質を F 爆発列の単調性 (monotonicity) とよぶ.

F 純より強い F 正則特異点の F 爆発について, 2 次元では次が成り立つ.

定理 1.6 [H1]**.** 2 次元 F 正則特異点 (X, x) の e 次 F 爆発 $\mathrm{FB}_e(X)$ は, $e \gg 0$ において最小特異点解消となる.

2 次元 F 正則特異点は必ずしも商特異点ではないが, これは, 標数 0 の 2 次元商特異点の G-Hilb が最小特異点解消であるという結果 ([I], [IN]) の正標数版と考えられる.

上の定理の証明には 2 次元の特殊性が随所で用いられる. F 正則特異点は有理特異点であるが, 2 次元有理特異点については次が成り立つ.

命題 1.7 [HSY]**.** 2 次元有理特異点 (X, x) の F 爆発 $\mathrm{FB}_e(X)$ は正規で (X, x) の最小特異点解消 $\widetilde{X}$ に支配される. とくに, $\mathrm{FB}_e(X)$ は高々有理特異点のみをもつ.

この命題と 2 次元 McKay 対応の正標数における類似 ([AV], [W]) より, (X, x) の最小特異点解消 $\widetilde{X}$ 上の各例外曲線に対応する "special" な直既約反射的加群が $e \gg 0$ において $F_*^e\mathcal{O}_X$ の直和因子となることを示せば定理がしたがうことがわかる. より一般に次が成り立つことを示せばよい.

---

[1] Frobenius 射が有限射, すなわち, $R^{1/p}$ が有限 R 加群ということで, 拙論では常に仮定する.

命題 1.8. 2 次元 F 正則特異点 (X, x) の完備局所環 $R = \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ 上の任意の直既約反射的加群は $e \gg 0$ において R^{1/p^e} の直和因子となる.

証明. [H1, Corollary 2.2] より, 直既約反射的 R 加群の同型類は高々有限個だから, 任意の反射的加群 M 上の c 倍写像が

$$c : M \to R^{\oplus r} \to M$$

と同じ階数の自由加群を経由するような $0 \neq c \in R$ がとれる. R の F 正則性より, ある $q = p^e$ に対して R 加群の射 $R \hookrightarrow R^{1/q} \xrightarrow{c^{1/q}} R^{1/q}$ が分裂する. よって

$$M = \mathrm{Hom}_R(M^\vee, R) \to \mathrm{Hom}_R(M^\vee, R^{1/q}) \xrightarrow{c^{1/q}} \mathrm{Hom}_R(M^\vee, R^{1/q})$$

も分裂する. $M^{(e)} = \mathrm{Hom}_R(M^\vee, R^{1/q})$ は反射的 $R^{1/q}$-加群ゆえ, $c^{1/q} \colon M^{(e)} \to M^{(e)}$ は自由 $R^{1/q}$ 加群 $(R^{1/q})^{\oplus r}$ を経由し, M はその直和因子となる. □

2 次元有理特異点の F 爆発は最小特異点に支配されるが, 特異点が F 正則でない場合, 必ずしも最小特異点解消とは一致しない ([?], [HSY]).

例 1.9 [HSY]**.** 標数 $p = 2$ で $X = \mathrm{Spec}\, k[x, y, z]/(z^2 + x^3 + y^2 z)$ とする (E_6^0 型有理 2 重点 [Ar]). この X の e 次 F 爆発 $\mathrm{FB}_e(X)$ は, 最小特異点解消 $\widetilde{X}$ 上の例外曲線のうち, 下図の白抜き頂点 $\circ$ に対応するものを潰して得られる正規曲面と一致する.

$$e = 1 : \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & \bullet & & & & \\ & & & & | & & & & \\ \circ & — & \circ & — & \circ & — & \circ & — & \circ \end{array} \qquad\qquad e \geq 2 : \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & \bullet & & & & \\ & & & & | & & & & \\ \circ & — & \bullet & — & \circ & — & \bullet & — & \circ \end{array}$$

ここまでに見た特異点の F 爆発列 $\{\mathrm{FB}_e(X) \mid e = 0, 1, 2, \ldots\}$ は, 共通の双有理モデルに支配され (bounded), さらに安定化 (stabilization), すなわち, ある整数 $e_0 > 0$ が存在して, $\mathrm{FB}_e(X) = \mathrm{FB}_{e_0}(X)$ $(e \geq e_0)$ が成り立っていた. F 爆発列に関するこれらの性質と単調性がいずれも成り立たないことも 2 次元で起こり得る. 実際, このような例は単純楕円型特異点に見ることができる. 単純楕円型特異点は k^* 作用をもつから [Hi], 以下では次の記号の下で議論する.

記号 1.10. C を種数 g の非特異射影曲線, L を C 上の次数 $d > 0$ の直線束とし, 次数環

$$R = R(C, L) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(C, L^n) t^n$$

に対して $X = \mathrm{Spec}\, R$, その特異点を $x \in X$ とおく. X の最小特異点解消 $f \colon \widetilde{X} \to X$ の既約な例外曲線を $E = f^{-1}(x) \cong C$ とおくと, E の自己交点数 $E^2 = -d$ である. 特異点 (X, x) の幾何種数 $g = 1$ の場合が単純楕円型特異点である.

命題 1.11. (1.10) で, $d \geq 2g + 1$, かつ, $p^e \not\equiv 0, -1, \ldots, 2 - 2g \pmod{d}$ ならば, 最小特異点解消 $\widetilde{X}$ は $F^e_* \mathcal{O}_X \cong R^{1/p^e}$ の平坦化であり, $\mathrm{FB}_e(X)$ の正規化と一致する.

単純楕円型特異点の場合, 上の命題の仮定は, $d \geq 3$ かつ $d \not| \, p^e$ となり, このとき $\mathrm{FB}_e(X) \cong \widetilde{X}$ が成り立つ. 単純楕円型特異点の F 爆発は [HSY] で研究された後, [H2] で構造が完全に決定された.

定理 1.12 [H2]**.** (X, x) を標数 $p > 0$ の単純楕円型特異点とし, その最小特異点解消 $\widetilde{X}$ 上の例外楕円曲線を E とするとき, 以下の (1)–(3) は同値である.

(1) 交点数 $-E^2$ が標数 p の冪 p^n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ でない.
(2) F 爆発列 $\{\mathrm{FB}_e(X) \mid e = 0, 1, 2, \ldots\}$ が安定化する.
(3) 任意の $e \geq 1$ に対し, $\mathrm{FB}_e(X) \cong \widetilde{X}$ が成り立つ.

同値条件 (1)–(3) が成り立たない場合を記述するため, 記号を準備する: 楕円曲線 E 上の点 P_0 と整数 $n>0$ に対し, P_0 を単位元とした群構造における E の n 分点全体を $E_{P_0}[n]$ で表す. 標数 p の冪 q については, E が通常楕円曲線のとき $\sharp E_{P_0}[q]=q$, E が超特異楕円曲線のとき $E_{P_0}[q]=\{P_0\}$ である. 交点数 $-E^2$ が標数 p の冪である場合の単純楕円型特異点 (X,x) の F 爆発は, (X,x) が F 純 ($\Leftrightarrow E$ が通常楕円曲線) であるか否かにより異なる構造をもつ.

定理 1.13 [H2]**.** (X,x) を標数 $p>0$ の単純楕円型特異点とし, その最小特異点解消 $\widetilde{X}$ 上の例外楕円曲線を E とする. ある整数 $n\geq 0$ に対し $E^2=-p^n$ であると仮定し, $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-E)\otimes\mathcal{O}_E\cong\mathcal{O}_E(p^nP_0)$ となる点 $P_0\in E$ をとる.

(1) (X,x) が F 純であると仮定する. $E^2=-1$ (或いは, $E^2=-p^n<-1$) のとき, $q=p^e\geq\max\{3,p^n\}$ なる任意の整数 e に対し, e 次 F 爆発 $\mathrm{FB}_e(X)$ は, E の P_0 以外の $q-1$ 個の q 分点 (或いは, q 個の q 分点すべて) における $\widetilde{X}$ の爆発 $\mathrm{Bl}_{E_{P_0}[q]\setminus\{P_0\}}(\widetilde{X})$ (或いは, $\mathrm{Bl}_{E_{P_0}[q]}(\widetilde{X})$) と一致する.

(2) (X,x) が F 純でないと仮定する. $E^2=-1$ (或いは, $E^2=-p^n<-1$) のとき, $q=p^e\geq\max\{3,p^n\}$ なる任意の整数 e に対し, $\mathrm{FB}_e(X)$ は, $P_0\in\widetilde{X}$ を零点とする被約でないイデアル (t,u^{q-1}) (或いは, (t,u^q)) を中心とする $\widetilde{X}$ の爆発と一致する. ここに, t,u は $P_0\in\widetilde{X}$ における局所座標[2]である.

一方, $1\leq e<n$ のときには, $\mathrm{FB}_e(X)\cong\widetilde{X}$ が成り立つ.

上の定理で, (X,x) が F 純の場合には, e 次 F 爆発は非特異だが p^e または p^e+1 本の例外曲線をもち, 単調な F 爆発列は安定化しない. 一方, (X,x) が F 純でない場合は, e 次 F 爆発は 2 本の例外曲線 $E_1\cong E$, $E_2\cong\mathbb{P}^1$ と, $E_2\setminus E_1$ 上に 1 点, A_{p^e-2} 或いは A_{p^e-1} 型の特異点をもつ. よって, この場合の F 爆発列は単調でなく安定化もしない. 一方, 定理の条件から外れる $p=2$, $e=1$ で $E^2=-1,-2$ の場合には, 1 次 F 爆発が非正規である例が存在する [HSY].

次の FFRT とよばれる性質も F 爆発列の安定化に関連するものである.

定義 1.14 [SVdB]**.** F 有限な整域 R が, 完備局所環または k 上の次数環であると仮定する. 整数 $e\geq 0$ に対し, R 加群 R^{1/p^e} の直和因子であるような直既約 R 加群の同型類全体を $\mathrm{IFS}_e(R)$ で表す. 和集合 $\bigcup_{e\geq 0}\mathrm{IFS}_e(R)$ が有限集合であるとき, R は**有限 F 表現型** (finite F-representation type) をもつという. 以下これを FFRT と略記する.

R が FFRT であるとし, $\bigcup_{e\geq 0}\mathrm{INS}_e(R)=\{M_1,\ldots,M_n\}$ とする. $M=M_1\oplus\cdots\oplus M_n$ とおくと, $X=\mathrm{Spec}\,R$ のすべての F 爆発は M の普遍的平坦化 $\mathrm{Bl}_M(X)$ に支配され, さらに R が F 純であれば, X の単調な F 爆発列は $e\gg 0$ において $\mathrm{FB}_e(X)=\mathrm{Bl}_M(X)$ と安定化する. すなわち, "F 純かつ FFRT" は F 爆発列の安定化の十分条件を与える. これらの性質について次が知られている.

- 従順な商特異点は F 正則 (したがって F 純) かつ FFRT である.
- 2 次元 F 正則特異点は FFRT である.
- 単純楕円型特異点は, F 純なものとそうでないものがあるが, F 正則ではなく, FFRT でもない. F 爆発列は安定化する場合としない場合の両方がある.
- FFRT でない 7 次元 F 正則特異点が存在する (A. Singh).

筆者の知る限り, 次の問は 3 次元以上で未解決である.

問題 1.15. F 正則特異点の F 爆発列は安定化するか?

[2] より詳しく, t は k^* 作用の軌道方向, u は例外曲線 E 方向の局所座標である.

2. 有理射影曲面上の Frobenius 直像の計算

本節では, X は標数 $p>0$ の非特異射影多様体であるとして, e 次 Frobenius 直像 $F^e_*\mathcal{O}_X$ の構造について考察する. 次は前節で考えた FFRT の大域版である.

定義 2.1. 整数 $e \geq 0$ に対し, e 次 Frobenius 直像 $F^e_*\mathcal{O}_X$ の直和因子であるような直既約 $\mathcal{O}_X$ 加群[3]の同型類全体を $\mathrm{IFS}_e(X)$ で表す. 和集合 $\bigcup_{e\geq 0}\mathrm{IFS}_e(X)$ が有限集合であるとき, X は**大域的有限 F 表現型**をもつという. 以下これを GFFRT と略記する.

X 上の豊富な直線束 L に付随する次数環 $R(X,L)$ が FFRT ならば, X は GFFRT である. X が非特異射影曲線のとき, ベクトル束 $F^e_*\mathcal{O}_X$ の構造は X の種数 g に依存して以下のようになり, とくに, GFFRT をもつのは $X=\mathbb{P}^1$ の場合のみである.

(1) $g=0$: $F^e_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$.
(2) $g=1$: X が通常楕円曲線のとき, その p^e 分点 $P_0, P_1, \ldots, P_{p^e-1} \in X$ に対して $F^e_*\mathcal{O}_X \cong \bigoplus_{i=0}^{p^e-1}\mathcal{O}_X(P_i - P_0)$ と直線束の直和に分解し, X が超特異のとき, $F^e_*\mathcal{O}_X$ は Atiyah [At] の次数 0, 階数 p^e の直既約ベクトル束 $\mathcal{F}_e$ と同型となる.
(3) $g \geq 2$ のとき, $F^e_*\mathcal{O}_X$ は安定ベクトル束であり, とくに直既約である [LP].

一般の次元では, X がトーリック多様体の場合は $F^e_*\mathcal{O}_X$ は直線束の直和に分解し, そこに現れる直線束の同型類は有限個 (よって X は GFFRT) であることが知られている (cf. [Ac2], [OU]). また, X が 2 次超曲面の場合は, X 上の算術的 Cohen–Macaulay 束が直線束とスピノール束 (と直線束のテンソル積) の直和に分解することを用いて $F^e_*\mathcal{O}_X$ の直和分解の明示的公式が得られ, これから X の GFFRT 性がしたがう ([Ac1], [L]). Frobenius 直像 $F^e_*\mathcal{O}_X$ の構造に関する最も楽観的な期待として, X が大域的 F-正則または Fano 型なら GFFRT であって欲しいと考えたいところだが, この一般的な問題には現時点では手の付けようがない. そこで本節では, トーリックや 2 次超曲面ではない X を含む最も単純な場合として, 次の設定の下で $F^e_*\mathcal{O}_X$ の構造について考察し, 実験的な計算結果を与える.

2.2. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の爆発. 標数 $p>0$ の射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の n 点 $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{P}^2$ をとり, これらの n 点における $\mathbb{P}^2$ の爆発を $\pi\colon X \to \mathbb{P}^2$, P_i 上の例外曲線を $E_i = \pi^{-1}(P_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ とおく.

上の設定で得られた “実験結果” として, $n=4$, $p=2,3$ の場合には Frobenius 直像 $F^e_*\mathcal{O}_X$ の構造が決定されて, X が GFFRT であることが示された. “実験方法” について説明するために, 二つの基本的なトーリック曲面上の Frobenius 直像の構造を見ておこう. 以下では $q=p^e$ とする.

(1) 射影平面 $\mathbb{P}^2$: $F^e_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus\frac{(q-1)(q+4)}{2}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)^{\oplus\frac{(q-1)(q-2)}{2}}$.

(2) $\pi\colon U \to \mathbb{A}^2$ をアフィン平面の原点爆発, $E=\pi^{-1}(o)$ を例外曲線とすると

$$F^e_*\mathcal{O}_U \cong \mathcal{O}_U^{\oplus\frac{q(q+1)}{2}} \oplus \mathcal{O}_U(E)^{\oplus\frac{q(q-1)}{2}}.$$

(2) の直和分解は, 原点 $o \in \mathbb{A}^2$ のアフィン座標 x, y に関する $\mathbb{A}^2$ 上の Frobenius 直像の直和分解 $F^e_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2} = \bigoplus_{0\leq i,j\leq q-1}\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}x^{i/q}y^{j/q} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}^{\oplus q^2}$ と両立しているから, $\mathbb{P}^2$ の n 点爆発 X について次の完全列が存在することがわかる.

$$0 \to \pi^*F^e_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \to F^e_*\mathcal{O}_X \to \bigoplus_{i=1}^{n}\mathcal{O}_{E_i}(-1)^{\oplus\frac{q(q-1)}{2}} \to 0$$

これよりさらに, $F^e_*\mathcal{O}_X$ の階数 r の直和因子 $\mathcal{F}$ は, $\mathcal{O}_X$ 加群の拡大

[3] X が非特異の場合これればベクトル束である.

$$0 \to \pi^*\mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{N} \to 0 \tag{2.2.1}$$

により与えられる．ここに, $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus r_0} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus r_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)^{\oplus r_2}$ $(r_0+r_1+r_2=r)$, $\mathcal{N} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{E_i}(-1)^{\oplus s_i}$ である．

2.3. 拡大行列. 上の拡大 (2.2.1) は

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{N}, \pi^*\mathcal{E}) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=0}^{2} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{E_i}(-1), \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-j))^{\oplus r_j s_i}$$

の拡大類により与えられるが, Leray スペクトル系列と

$$\begin{aligned} \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{E_i}(E_i), \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-j)) &\cong \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{E_i}, \omega_X) \otimes \omega_X(E_i)^{-1} \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-j) \\ &\cong \omega_{E_i} \otimes \omega_X(E_i)^{-1} \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-j) \cong \mathcal{O}_{E_i} \end{aligned}$$

より, 各 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{E_i}(-1), \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-j)) \cong H^0(E_i, \mathcal{O}_{E_i}) = k$ であるから, $\mathcal{F}$ を与える拡大 (2.2.1) に対して, 体 k に成分をもつ $r \times s$ 行列が定まる $(r = r_0+r_1+r_2,\ s = \sum_{i=1}^n s_i)$. この行列を, $r_j \times s_i$ 小行列たちに区分したものを $\mathcal{F}$ の拡大行列とよび, $\varepsilon(\mathcal{F})$ で表す．

例 2.4. X を 4 点 $P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (0:1:0)$, $(0:0:1)$, $(1:1:1) \in \mathbb{P}^2$ を爆発させて得られる曲面とする．適当なアフィン座標を p 基底として標数 $p=2$ における $F_*\mathcal{O}_X$ の拡大行列 $\varepsilon(F_*\mathcal{O}_X)$ を計算すると以下のようになる．この拡大行列の区分は, $r_0 = 1$, $r_1 = 3$, $r_3 = 0$, $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1$ により与えられている．

$$\varepsilon(F_*\mathcal{O}_X) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

標数 $p=3$ における拡大行列は次のようになる．

$$\varepsilon(F_*\mathcal{O}_X) = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&2&1 \\ \hline 0&0&0&0&1&0&0&0&0&2&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&2&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&2&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&2&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1 \\ \hline 0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1 \end{array}\right]$$

2.5. 拡大行列の変形. ベクトル束の拡大行列は局所基底のとり方によって異なる表示をもつ．(2.2.1) における $\mathcal{E}$ と $\mathcal{N}$ の自己同型は拡大行列の行と列の変形を与える．拡大行列はその区分に対応して, それぞれ r_j 行からなる行ブロックと s_i 列からなる列ブロックをもつ．これらのブロックをそれぞれの添え字 j, i に対応して, 第 j 行ブロック, 第 i 列ブロックとよぶとき, 許される変形は次の (1)–(4) である．

(1) それぞれの行ブロック内における通常の行基本変形．
(2) $j = 1, 2$ に対し, 第 j 行ブロックの行 $\times f$ $(f \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ は 1 次形式) を第 $j-1$ 行ブロックの行に加える．
(3) 第 2 行ブロックの行 $\times f$ $(f \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ は 2 次形式) を第 0 行ブロックの行に加える．
(4) それぞれの列ブロック内における通常の列基本変形．

上の (2) の行変形における “f 倍” は, 第 i 列ブロックにおいては $P_i \in \mathbb{P}^2$ のまわりのアフィン座標で非斉次化したときの “$f(P_i)$ 倍” という意味であって, 列ブロック毎に倍率が異なることに注意する. 変形 (1)–(4) の下での拡大行列の同値を $\sim$ で表す.

補題 2.6. (2.2.1) の形の拡大で与えられる $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ がそれぞれ拡大行列 ε, ε', ε'' をもつとし, ε を列ブロックに区分して $\varepsilon = (\varepsilon_1|\cdots|\varepsilon_n)$ と書く. このとき:

(1) $\mathcal{F}$ が局所自由層 $\Leftrightarrow$ 各 $1 \le i \le n$ に対し行列 ε_i の階数がその列数 s_i に等しい.
(2) $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}' \Leftrightarrow \varepsilon \sim \varepsilon'$.
(3) $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}'' \Leftrightarrow \varepsilon \sim \varepsilon' \oplus \varepsilon''$, すなわち, ε は (1)–(4) の変形, および行と列の入れ替えにより次の行列に変形される:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon' & 0 \\ 0 & \varepsilon'' \end{bmatrix}.$$

2.7. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の 4 点爆発. 以下では, X は射影平面 $\mathbb{P}^2$ を 4 点 $P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (0:1:0)$, $(0:0:1)$, $(1:1:1)$ で爆発させて得られる有理曲面であるとする.

このとき, 拡大行列の変形規則 (2) により, 四つの列ブロックのうち二つにおいては, ある行ブロック内の行を一つ上の行ブロック内の行に加え, 他の二つの列ブロックでは何も加えない, というような変形が可能となる.

例 2.8. 例 2.4 における標数 $p = 2$ の拡大行列 $\varepsilon(F_*\mathcal{O}_X)$ は次のように変形される.

$$\varepsilon(F_*\mathcal{O}_X) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

最初の変形は, 第 2 列と第 4 列においてのみ第 4 行 (第 1 行ブロック) を第 1 行 (第 0 行ブロック) に加える (2) 型の変形であり, 次の変形は (1) 型 (第 1 行ブロック内の行の入れ替え) である. これよりとくに, $F_*\mathcal{O}_X$ は, 右端の行列から第 1 行を除いた 3×4 行列を拡大行列とする階数 3 のベクトル束 $\mathcal{B}$ と $\mathcal{O}_X$ の直和に分解することがわかる.

例 2.8 から標数 2 における分解 $F_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{B}$ がわかったが, 高次の Frobenius 直像 $F_*^e\mathcal{O}_X$ $(e \ge 2)$ の構造を知るために, その拡大行列 $\varepsilon(F_*^e\mathcal{O}_X)$ を直接計算するのは, 行列が大き過ぎて効率的でない. その代わりに, $F_*^2\mathcal{O}_X \cong F_*\mathcal{O}_X \oplus F_*\mathcal{B}$ であることに注意して, $\mathcal{B}$ の拡大行列 $\varepsilon = \varepsilon(\mathcal{B})$ のデータからベクトル束 $\mathcal{B}$ の局所基底を復元し, これを用いて $F_*\mathcal{B}$ の局所基底を求め, これをさらにその拡大行列 $\varepsilon' = \varepsilon(F_*\mathcal{B})$ に変換したものに変形 (1)–(4) を施して $F_*\mathcal{B}$ の直和分解を計算することにより, $F_*^2\mathcal{O}_X$ の構造がわかる. 以下同様の操作を繰り返すことにより, 次の “実験結果” を得た.

定理 2.9. 標数 $p = 2, 3$ において, $\pi\colon X \to \mathbb{P}^2$ を一般の位置にある 4 点 $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^2$ における爆発とし, $E_i = \pi^{-1}(P_i)$ を点 P_i 上の例外曲線とする. このとき, 有理曲面 X の Frobenius 直像 $F_*^e\mathcal{O}_X$ $(e \ge 0)$ は, 構造層 $\mathcal{O}_X$ と以下で与えられる直線束 L_i $(i = 0, 1, \ldots, 4)$, 階数 2 および 3 の直既約ベクトル束 $\mathcal{G}$ および $\mathcal{B}$ の直和に分解する.[4]

(1) $L_0 = \mathcal{O}_X(E_1 + E_2 + E_3 + E_4) \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$;
(2) $L_i = \mathcal{O}_X(E_i) \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$;
(3) $0 \to \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \to \mathcal{G} \to L_0 \to 0$ (unique non-trivial extension);
(4) $0 \to L_1 \oplus L_2 \to \mathcal{B} \to \mathcal{O}_X(E_3 + E_4) \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \to 0$ (non-trivial extension).

[4]向井茂氏の指摘により, 直既約と思っていた階数 4 の直和因子が L_0 二つと $\mathcal{G}$ の直和に分解することが判明した. 向井先生に感謝致します.

標数 $p=2$ における直和分解は

$$F_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{B}, \quad F_*\mathcal{B} \cong \bigoplus_{i=0}^{4} L_i^{\oplus 2} \oplus \mathcal{G}, \quad F_*L_i \cong L_i^{\oplus 2} \oplus \mathcal{G}, \quad F_*\mathcal{G} \cong \mathcal{G}^{\oplus 4},$$

標数 $p=3$ における直和分解は

$$F_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X \oplus \bigoplus_{i=0}^{4} L_i \oplus \mathcal{B}, \quad F_*\mathcal{B} \cong \bigoplus_{i=0}^{4} L_i^{\oplus 3} \oplus \mathcal{G}^{\oplus 6}, \quad F_*L_i \cong L_i^{\oplus 3} \oplus \mathcal{G}^{\oplus 3}, \quad F_*\mathcal{G} \cong \mathcal{G}^{\oplus 9}$$

で与えられる.

注意 2.10. 定理 2.9 におけるベクトル束 $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}$ は次の拡大行列をもつ.

$$\varepsilon(\mathcal{G}) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}r_1 = 1 \\ \}r_2 = 1 \end{array}, \qquad \varepsilon(\mathcal{B}) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Bigg\} r_1 = 3.$$

また, 4 点のうち 3 点が同一直線上にある場合の直和分解は, $\mathcal{B}$ に対応する階数 3 のベクトル束が, 直線束と階数 2 のベクトル束に分解する. 当然ながら, 定理の結果は任意の標数 $p>0$ に拡張するものと予想されるが, $p \geq 5$ では拡大行列が大き過ぎるため手計算では手に負えない.

References

[Ac1] P. Achinger, Frobenius push-forwards on quadrics, arXiv:1005.0594

[Ac2] P. Achinger, A characterization of toric varieties in characteristic p, arXiv:1303.5905

[Ar] Artin, M., Covering of the rational double points in characteristic p, *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, pp.11–22, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977.

[AV] Artin, M. and Verdier, J.-L., Reflexive sheaves over rational double points, *Math. Ann.*, **270** (1985), 79–82.

[At] Atiyah, M. F., Vector bundles over an elliptic curve, *Proc. London Math. Soc.* **(3) 7** (1957), 414–452.

[H1] Hara, N., F-blowups of F-regular surface singularities, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **140** (2012), 2215–2226.

[H2] Hara, N., Structure of the F-blowups of simple elliptic singularities, preprint.

[HSY] N. Hara, T. Sawada and T. Yasuda, F-blowups of normal surface singularities, singularities, *Algebra Number Theory* **7** (2013), 733–763.

[Hi] Hirokado, M., Deformations of rational double points and simple elliptic singularities in characteristic p, *Osaka J. Math.* **41** (2004), 605–616.

[HH] M. Hochster and C. Huneke, Tight closure and strong F-regularity, *Mem. Soc. Math. France* **38** (1989), 119–133.

[HR] M. Hochster and J. Roberts, The purity of Frobenius and local cohomology, *Adv. Math.* **21** (1976), 117–172.

[I] Ishii, A., On the McKay correspondence for a finite small subgroup of $GL(2,\mathbb{C})$, *J. Reine Angew. Math.*, **549** (2002), 221–233.

[IN] Ito, Y. and Nakamura, I., McKay correspondence and Hilbert schemes. *Proc. Japan Acad.* 72, Ser. A, (1996), 135–138.

[Ku] Kunz, E., Characterizations of regular local rings for characteristic p, *Amer. J. of Math.*, **91**, (1969), 772–784.

[LP] H. Lange and C. Pauly, On Frobenius destabilized rank 2 vector bundles over curves, arXiv:0309456

[L] A. Langer, D-affinity and Frobenius morphism on quadrics, Int. Math. Res. Not. IMRN, (1): Art. ID rnm 145, 26, 2008.

[OU] R. Ohkawa and H. Uehara, Frobenius morphisms and derived categories on two-dimensional toric Deligne-Mumford stacks, arXiv:12056861 *Adv. Math.*, to appear.

[OZ] Oneto, A. and Zatini, E., Remarks on Nash blowing-up, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* **49**, (1991), 71–82.

[SVdB] Smith, K. E. and Van den Bergh, M., Simplicity of rings of differential operators in prime characteristic, *Proc. London Math. Soc.* **(3) 75** (1997), 32–62.

[TY] Toda, Y. and Yasuda, T., Noncommutative resolution, F-blowups and D-modules, *Adv. Math.* **222** (2009), 318-330.

[Vi] Villamayor, O., On flattening of coherent sheaves and of projective morphisms, *J. Algebra* **295** (2006), 119–140.

[W] Wunram, J., Reflexive modules on quotient surface singularities, *Math. Ann.*, **279** (1988), 583–598.

[Y1] Yasuda, T., Universal flattening of Frobenius, arXiv:0706.2700, *Amer. J. Math.*, to appear.

[Y2] Yasuda, T., On monotonicity of F-blowup sequences, *Illinois J. Math.* **53** (2009), 101-110.