代数幾何学シンポジウム記録
2013年度 pp.15-24

# 標数5の超特殊K3曲面上有理曲線について

法政大学理工学部　桂　利行

## 1　序

$p$を素数, $n$を自然数として, $q = p^n$ とおく. 有限体 $\mathbf{F}_q$ 上の射影平面 $\mathbf{P}^2(\mathbf{F}_q)$ の $\mathbf{F}_q$-有理点の集合を $\mathcal{A}$, $\mathbf{F}_q$ 上定義された射影直線の集合を $\mathcal{B}$ とすれば, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ それぞれは $q^2+q+1$ 個の元からなる. 直線 $\ell \in \mathcal{A}$ 上には $\mathcal{B}$ の $q+1$ 個の点が存在し, 逆に, 点 $P \in \mathcal{B}$ をとおる $\mathcal{A}$ の直線が $q+1$ 個存在する. このような関係を, 集合 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ は $(q^2+q+1)_{q+1}$-configuration をなすという (cf. Dolgachev [4]).

次に, 代数的閉体 $k$ の標数を 2 でないとし, $k$ 上の種数 2 の非特異完備代数曲線を $C$, その Jacobi 多様体を $J(C)$ とする. $C \subset J(C)$ において, $C$ は $J(C)$ の involution $\iota$ で不変としてよい. $J(C)_2$ を 2 等分点のなす群とし, $T = \{T_a(C) \mid a \in J(C)_2\}$ とおく. 商空間 $J(C)/\iota$ の 16 個の有理特異点を解消してできる Kummer 曲面 $Km(J(C))$ 上に, $T$ から得られる 16 個の非特異有理曲線の集合を $\mathcal{A}$, 特異点解消から得られる 16 個の例外曲線の集合を $\mathcal{B}$ とすれば, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ それぞれの有理曲線は互いに交わらない. 一方, $\ell \in \mathcal{A}$ は $\mathcal{B}$ の丁度 6 個の有理曲線と交わり, $\ell \in \mathcal{B}$ も $\mathcal{A}$ の丁度 6 個の有理曲線と交わる. このような関係も, 集合 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ は $(16_6)$-configuration をなすという (cf. Dolgachev [4]).

我々は, K3 曲面上の非特異有理曲線の配置を考える. K3 曲面 $X$ は, Picard 数が 22 のとき超特異であると言われる. このような K3 曲面は, 定義体の標数が正の時のみ存在する. $S$ が超特異ならば, その Néron-Severi 群 $\mathrm{NS}(X)$ はランク 22 の格子であるが, その discriminat は $-p^{2\sigma}$ の形をしていることが M. Artin によって示されており, $\sigma$ は Artin 不変量と呼ばれている. 超特異 K3 曲面 $X$ の Artin 不変量が 1 のとき, $X$ を超特殊 K3 曲面という. 標数 $p=2$ においては, 超特殊 K3 曲面上には非特異有理曲線のなす $(21_5)$-configuration が存在することが知られており (cf. Dolgachev-Kondo [5], Katsura-Kondo [7], Shimada [10]), $p=3$ の場合には, $(16_{10})$-configuration が存在することなどが示されている (cf. Katsura-Kondo [8], 複素数体上では Barth-Nieto [1], Traynard [12] 参照).

本稿では, 標数 5 において, Artin 不変量が 1 の超特異 K3 曲面上にある非特異有理曲線の配置を調べ, いくつかの美しい対称性を持った配置が存在し,

それが格子理論と関係していることを示す．この研究は, 金銅誠之, 島田伊知朗両氏との共同研究である（詳細は [9] 参照）．

## 2 超特殊アーベル曲面

$k$ を標数 $p > 0$ の代数的閉体, $E$ を $k$ 上の超特異楕円曲線とする．$E$ の零点を $P_\infty$ とし, アーベル曲面 $A = E \times E$ を考える．$A$ の Néron-Severi 群を $\mathrm{NS}(A)$ とし, $A$ の主偏極 $Y = E \times \{P_\infty\} + \{P_\infty\} \times E$ をとる．$\mathcal{O} = \mathrm{End}(E)$, $B = \mathrm{End}(E) \otimes \mathbf{Q}$ とおけば, $B$ が discriminant $p$ の有理数体 $\mathbf{Q}$ 上の quaternion division algebra になり, $\mathcal{O}$ がその maximal order になることはよく知られている．$a \in B$ の canonical involution を $\bar{a}$ とかく．$A$ 上の因子 $L$ に対し

$$\begin{array}{cccc} \varphi_L : & A & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^0(A) \\ & x & \mapsto & T_x^* L - L, \end{array}$$

なる準同型写像を得る．ここに, $T_x$ は点 $x \in A$ による translation である．

$$H = \{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mid \alpha, \delta \in \mathbf{Z},\ \beta, \gamma \in \mathcal{O},\ \gamma = \bar{\beta} \}.$$

とおく．$H$ は $M_2(\mathcal{O}) \cong \mathrm{End}(A)$ の部分群になり, 次の定理が成り立つ (たとえば, [6] 参照).

**定理 2.1.** 加群の準同型写像

$$\begin{array}{cccc} j : & \mathrm{NS}(A) & \longrightarrow & H \\ & L & \mapsto & \varphi_Y^{-1} \circ \varphi_L \end{array}$$

は, 全単射であり

$$j(E \times \{P_\infty\}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ j(\{P_\infty\} \times E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

となる．$L_1, L_2 \in NS(A)$ に対し

$$j(L_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix},\ j(L_2) = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix},$$

とおけば, 交点数は

$$(L_1, L_2) = \alpha_1\delta_2 + \alpha_2\delta_1 - \gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1.$$

で与えられる．

$m : E \times E \to E$ を $E$ の加法とし,

$$\Delta = \mathrm{Ker}\ m.$$

とおけば $\Delta = \{(P, -P) \ \mid \ P \in E\}$ である. 2 つの自己準同型写像 $a_1, a_2 \in \mathcal{O} = \mathrm{End}(E)$ に対し

$$\Delta_{a_1,a_2} = (a_1 \times a_2)^* \Delta.$$

とおく. とくに, $\Delta = \Delta_{1,1}$ である. このとき, 次が成り立つ (cf. [6]).

**定理 2.2.**

$$j(\Delta_{a_1,a_2}) = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 a_1 & \bar{a}_1 a_2 \\ \bar{a}_2 a_1 & \bar{a}_2 a_2 \end{pmatrix}$$

$E$ の自己準同型写像 $g \in \mathrm{End}(E)$ のグラフを $\Phi_g$ とかく. ここで, $A = E \times E$ 上の代数曲線と $\Phi_g$ の交点数を計算する公式を求める. $C$ を種数 $g \geq 1$ の非特異代数曲線,

$$\eta_i : C \longrightarrow E \quad (i = 1, 2)$$

を finite morphisms とし

$$\eta = (\eta_1, \eta_2) : C \longrightarrow E \times E = A.$$

なる写像を考える. $\eta$ の像を $\Gamma[\eta]$ と書く. $\eta$ が $C$ から $\Gamma[\eta]$ への双有理写像とすると

$$(\Gamma[\eta], E \times \{P_\infty\}) = \deg \eta_2, \quad (\Gamma[\eta], \{P_\infty\} \times E) = \deg \eta_1. \tag{1}$$

である. 加法 $m : E \times E \longrightarrow E$ から因子 $\Delta = \mathrm{Ker}\ m = \{(P, -P) \mid P \in E\}$ を得るが, isogeny $g \in \mathrm{End}(E)$ に対し $\Phi_g = ((-g) \times \mathrm{id})^* \Delta$ となる. 合成写像

$$\theta : \quad C \quad \xrightarrow{\eta} \quad E \times E \quad \xrightarrow{(-g)\times \mathrm{id}} \quad E \times E \quad \xrightarrow{m} \quad E.$$

を考えれば, $\Gamma[\eta]$ と $\Phi_g$ の交点数は次で与えられる:

**命題 2.3.** $\eta$ が $C$ から $\Gamma[\eta]$ への双有理写像であるとする. このとき, $(\Gamma[\eta], \Phi_g) = \deg \theta$ となる.

*Proof.*

$$\begin{aligned}
(\Gamma[\eta], \Phi_g) &= \deg \eta^* \Phi_g = \deg(\eta^* \circ ((-g) \times \mathrm{id})^* \Delta) \\
&= \deg(\eta^* \circ ((-g) \times \mathrm{id})^* \circ m^{-1}(P_\infty)) \\
&= \deg((m \circ ((-g) \times \mathrm{id}) \circ \eta)^* (\mathrm{P}_\infty)). \\
&= \deg \theta.
\end{aligned}$$

□

## 3 標数 5 の楕円曲線

$k$ を標数 5 の代数的閉体とすれば, $k$ 上の超特異楕円曲線は, 同型を除いてただ 1 つ存在し,

$$y^2 = x^3 - 1.$$

で与えられる. $E$ をその非特異完備モデルとする. アフィンモデルで $E$ 上の 2 点 $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ の加法は

$$\begin{aligned} x &= -x_1 - x_2 + \frac{(y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}, \\ y &= y_1 + y_2 - \frac{(y_2 - y_1)^3}{(x_2 - x_1)^3} + \frac{3(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{(x_1 - x_2)}. \end{aligned} \tag{2}$$

で与えられ, 2 倍写像 $[2]_E$ は

$$x = x_1 + 1/y_1^2, \quad y = 2y_1 - 1/y_1 + 1/y_1^3$$

で与えられる. $\omega = 2 + 3\sqrt{2}$ とおけば, $\omega$ は 1 の原始 3 乗根であり, 2 等分点は

$$P_\infty = (0, \infty), P_0 = (1, 0), P_1 = (\omega, 0), P_2 = (\omega^2, 0).$$

で与えられる. ここに, $P_\infty$ は $E$ の零点である. 2 等分点 $P_0$ による translation $T_{P_0}$ は

$$T_{P_0}^*(x) = \frac{x+2}{x-1}, \quad T_{P_0}^*(y) = \frac{2y}{(x-1)^2}.$$

で与えられる.

$$u = 2(x + T_{P_0}^*(x) - 1), \quad v = 2\sqrt{2}(y + T_{P_0}^*(y)).$$

とおけば, $u, v$ は $T_{P_0}^*$ 不変であり, $u$ は $v$ は方程式 $v^2 = u^3 - 1$ を満たす. したがって,

$$u = \frac{2x^2 + 3x + 1}{(x-1)}, \quad v = \frac{2\sqrt{2}y(x^2 + 3x + 3)}{(x-1)^2}.$$

は商写像

$$\begin{array}{cccc} \phi_{E,2}: & E & \longrightarrow & E \\ & (x, y) & \mapsto & (u, v). \end{array}$$

を与える. 直接計算によって

$$\phi_{E,2}^2 = -[2]_E.$$

となる. $E$ は自己同型 $\gamma$: $\gamma : x \mapsto \omega x,\ y \mapsto -y$ を持ち, $\gamma^6 = \mathrm{id}$ となる. ここに, id は $E$ の恒等写像である. $B = \mathrm{End}^0(E) = \mathrm{End}(E) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ は discriminant 5 の division algebra であり, $\mathcal{O} = \mathrm{End}(E)$ はその maximal order で, その $\mathbf{Z}$ 上の基底は

$$\omega_1 = 1,\ \omega_2 = \gamma,\ \omega_3 = \phi_{E,2},\ \omega_4 = \gamma\phi_{E,2}.$$

で与えられる. $A=E\times E$ 上の因子

$$B_1=E\times\{P_\infty\},\ B_2=\{P_\infty\}\times E,\ B_3=(-\mathrm{id}\times\mathrm{id})^*\Delta,\ \mathrm{B}_4=(-\gamma\times\mathrm{id})^*\Delta,$$
$$B_5=(-\phi_{E,2}\times\mathrm{id})^*\Delta,\ \mathrm{B}_6=(-\gamma\phi_{\mathrm{E},2}\times\mathrm{id})^*\Delta$$

を考える. 第 2 章の定理を用いれば

$$j(B_1)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad j(B_2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad j(B_3)=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},$$
$$j(B_4)=\begin{pmatrix}1&-\gamma^5\\-\gamma&1\end{pmatrix},\quad j(B_5)=\begin{pmatrix}2&\phi_{E,2}\\-\phi_{E,2}&1\end{pmatrix},$$
$$j(B_6)=\begin{pmatrix}2&-\phi_{E,2}\gamma^2\\-\gamma\phi_{E,2}&1\end{pmatrix}.$$

となる. ここに, $\mathcal{O}=\mathrm{End}(E)$ の元として, id を 1, inversion $\iota_E$ を $-1$ と書く.

**定理 3.1.** *Néron-Severi* 群 $\mathrm{NS}(A)$ の基底は, $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$, $B_6$ で与えられる.

Néron-Severi 群 $\mathrm{NS}(A)$ の基底 $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$, $B_6$ に関する Gram 行列は

$$\begin{bmatrix}0&1&1&1&2&2\\1&0&1&1&1&1\\1&1&0&1&3&4\\1&1&1&0&2&3\\2&1&3&2&0&2\\2&1&4&3&2&0\end{bmatrix}. \tag{3}$$

であり, その行列式は $-5^2$ である.

## 4 超特殊 K3 曲面上の有理曲線の配置

以上の考察に基づいて, 主定理を簡潔に述べる. $k$ を標数 5 の代数的閉体, $E$ を前節に与えられた $k$ 上の超特異楕円曲線とする. アーベル曲面 $A=E\times E$ を考え, $\iota$ をその involution, $A/\iota$ を商曲面とする. $A/\iota$ の 16 個の有理特異点を解消して得られる kummer 曲面を $Km(A)$ と記せば, $Km(A)$ は, 同型を除いて $k$ 上の唯一の超特殊 K3 曲面である.

$Km(A)$ の上に 96 本の非特異有理曲線を構成するために, 種数 2 の代数曲線

$$F: v^2=u^6-1$$

と, 種数 5 の代数曲線

$$G: v^2=\sqrt{2}\,(u^{12}+2\,u^8+2\,u^4+1),$$

を考え, 正則写像

$$
\begin{aligned}
&\phi_{E,2}: E \to E && (u,v) \mapsto \left( \frac{2u^2+3u+1}{u-1},\ \frac{2\sqrt{2}\,v\,(u^2+3u+3)}{(u-1)^2} \right),\\
&\phi_{F,2}: F \to E && (u,v) \mapsto \left( u^2,\ v \right),\\
&\phi_{F,3}: F \to E && (u,v) \mapsto \left( \frac{2\,u}{u^3-1},\ \frac{v\,(2\,u^3+1)}{(u^3-1)^2} \right),\\
&\phi_{G,3}: G \to E && (u,v) \mapsto \left( \frac{4\sqrt{2}\,(u+3\sqrt{2}+4)^2\,(u+2\sqrt{2}+4)}{f},\ \frac{(4+4\sqrt{2})\,v}{f^2} \right),\\
& && \text{ただし,}\quad f := (u+\sqrt{2})(u+4\sqrt{2}+1)\,(u+3\sqrt{2}+2),\\
&\phi_{G,4}: G \to E && (u,v) \mapsto \left( \frac{u^4+(1+4\sqrt{2})u^2+2}{g},\ \frac{v\,u}{g^2} \right),\\
& && \text{ただし,}\quad g := u^4+(1+2\sqrt{2})u^2+(4+\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

をとる. また, 自己同型写像

$$
\begin{aligned}
&\gamma: E \to E && (x,y) \mapsto (\omega x, -y),\\
&h_F: F \to F && (u,v) \mapsto \left( \frac{2\sqrt{2}\,u+4}{u+2\sqrt{2}},\ \frac{v}{(u+2\sqrt{2})^3} \right),\\
&h'_F: F \to F && (u,v) \mapsto \left( \frac{2\sqrt{2}\,u+1}{u+3\sqrt{2}},\ \frac{v}{(u+3\sqrt{2})^3} \right),\\
&h_G: G \to G && (u,v) \mapsto \left( \frac{2u+3}{u+1},\ \frac{4v}{(u+1)^6} \right)
\end{aligned}
$$

を考える. また, $\tau$ を $(P,Q) \mapsto (Q, \iota_E(P))$ で与えられる $A$ の自己同型写像とする. $A$ 上の曲線 $\Gamma$ に対し, $\Gamma$ を 2 等分点 $A_2$ によって translate した曲線全体の集合を $\mathcal{T}(\Gamma)$ と書く.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{01} &:= \mathcal{T}(\Gamma[(\phi_{F,2}, \phi_{F,2} \circ h_F)]\,),\\
\mathcal{L}_{02} &:= \mathcal{T}(\Gamma[(\phi_{F,3}, \phi_{F,3} \circ h'_F]\,),\\
\mathcal{L}_{10,(4,3)} &:= \mathcal{T}(\Gamma[(\phi_{G,4}, \phi_{G,3})]\,),\\
\mathcal{L}_{10,(4,4)} &:= \mathcal{T}(\Gamma[(\gamma^2 \circ \phi_{G,4}, \gamma \circ \phi_{G,4} \circ h_G)]\,),\\
\mathcal{L}_{10} &:= \mathcal{L}_{10,(4,3)} \cup \tau(\mathcal{L}_{10,(4,3)}) \cup \mathcal{L}_{10,(4,4)} \cup \tau(\mathcal{L}_{10,(4,4)}),\\
\mathcal{L}_{11,(1,2)} &:= \mathcal{T}(\Gamma[(\gamma^2, \gamma^2 \circ \phi_{E,2})]\,),\\
\mathcal{L}_{11,(2,2)} &:= \mathcal{T}(\Gamma[(\phi_{E,2} \circ \gamma, \gamma \circ \phi_{E,2})]\,),\\
\mathcal{L}_{11} &:= \mathcal{L}_{11,(1,2)} \cup \tau(\mathcal{L}_{11,(1,2)}) \cup \mathcal{L}_{11,(2,2)} \cup \tau(\mathcal{L}_{11,(2,2)}),\\
\mathcal{L}_{12} &:= \mathcal{T}(B_1) \cup \mathcal{T}(B_2) \cup \mathcal{T}(B_4) \cup \mathcal{T}(\Gamma[(\mathrm{id}, \gamma^2)]\,).
\end{aligned}
$$

$A$ 上の曲線群 $\mathcal{L}_{\nu i}$ を $Km(A)$ 上に移した曲線群を $\mathcal{S}_{\nu i}$ と書く. さらに, $A/\iota$ の特異点解消から得られる 16 個の例外曲線の集合を $\mathcal{S}_{00}$ とおく. このとき, 次の定理を得る.

**定理 4.1.** $Km(A)$ 上に, *16* 個の互いに交わらない非特異有理曲線からなる *6* 個の集合

$$\mathcal{S}_{00}, \mathcal{S}_{01}, \mathcal{S}_{02}, \mathcal{S}_{10}, \mathcal{S}_{11}, \mathcal{S}_{12}$$

が存在して, 次の性質を持つ:

(a) $i \neq j$ ならば, $\nu = 0, 1$ に対し, $\mathcal{S}_{\nu i}$ と $\mathcal{S}_{\nu j}$ は $(16_6)$-*configuration* をなす.

(b) $i = 0, 1, 2$ に対し, 集合 $\mathcal{S}_{0i}$ と $\mathcal{S}_{1i}$ は $(16_{12})$-*configuration* をなす.

(c) $i \neq j$ ならば, $\mathcal{S}_{0i}$ と $\mathcal{S}_{1j}$ は $(16_4)$-*configuration* をなす.

# 5 格子理論との関係

$L$ を index $(1, 25)$ の even unimodular lattice とする. このような lattice は unique であり, $\Lambda$ を Leech lattice, $H$ を rank 2 の hyperbolic lattice とするとき,

$$\Lambda \cong H \oplus \Lambda$$

となることが知られている. dual lattice $L^\vee := \mathrm{Hom}(L, \mathbf{Z})$ を, extended symmetric bilinear form をもつ $L \otimes \mathbf{Q}$ の lattice とみなす. また, cone

$$\{x \in L \otimes \mathbf{R} \mid x^2 > 0\}.$$

は 2 つの連結成分からなるが, その一方を positive cone と呼び, $\mathcal{P}_L$ と書く.

$$\mathcal{R}_L = \{v \in L \mid v^2 = -2\}$$

とおく. $\mathcal{R}_L$ の元 $r$ は $L$ の reflection

$$S_r : x \mapsto x + \langle x, r \rangle r$$

を定義する. $W(L)$ を $\{s_r \mid r \in \mathcal{R}_L\}$ によって生成される群とする. hyperplanes の族 $\mathcal{R}_L^* = \{(v)^\perp \mid v \in \mathcal{R}_L\}$ を考え、

$$\mathcal{P}_L \setminus \bigcup_{v \in \mathcal{R}_L} (v)^\perp$$

の connected component の $\mathcal{P}_L$ での closure を $\mathcal{R}_L^*$-chamber という. Weyl 群 $W(L)$ が $\mathcal{P}_L$ の上に作用するが, $\mathcal{R}_L^*$-chamber はその基本領域である. index $(1, 25)$ の even unimodular lattice $L$ の $\mathcal{R}_L^*$-chamber を Conway chamber と呼ぶ.

$w \in L$ を $w^2 = 0$ を満たす 0 ではない primitive vector とする. $w$ が次の 2 条件を満たすとき Weyl vector と呼ぶ.

(i) $w$ は $L \otimes \mathbf{R}$ における $\mathcal{P}_L$ の閉包に含まれる.

(ii) $\langle w\rangle^{\perp}/\langle w\rangle \cong \Lambda$.

Weyl vector $w$ に対し,

$$\Delta(w) := \{r \in \mathcal{P}_L \mid (r,w) = 1\}.$$

とおく. このとき, 次が成り立つ (Conway [2], Conway-Sloane [3]).

**定理 5.1.** *$w$ を Weyl vector とすれば,*

$$\mathcal{D}(w) := \{x \in \mathcal{P}_L \ \mid \ (r,x) \geq 0 \ \ r \in \Delta(w)\}$$

*は Conway chamber である. 逆に, Conway chamber $\mathcal{D}$ に対し, $\mathcal{D} = \mathcal{D}(w)$ となるような Weyl vector $w$ がただ一つ存在する.*

$S = \mathrm{NS}(Km(A))$ とおく. lattice $S$ についても, positive cone $\mathcal{P}_S$, $\mathcal{R}_S$, $\mathcal{R}_S^*$-chamber などを lattice $L$ の場合と同様に定義する. 標数 5 のとき, $S$ の $L$ への primitive embedding でその直交補空間 $R$ が次の 2 条件を満たすものが存在する: $R$ 上の discriminant quadratic form $q_R$

$$\begin{array}{rccc} q_R: & R^{\vee}/R & \to & \mathbf{Q}/2\mathbf{Z} \\ & x \bmod R & \mapsto & x^2 \bmod 2\mathbf{Z} \end{array}$$

に対し

(i) $R$ は Leech lattice に埋め込みを持たない.

(ii) 自然な写像 $\mathrm{O}(R) \to \mathrm{O}(q_R)$ は全射になる.

この埋め込みは $O(L)$ の作用を modulo にして一意的である. $\mathcal{P}_S$, $\mathcal{P}_L$ を $Km(A)$ の ample cone を含む方の連結成分とする.

$$\mathrm{NC}(Km(A)) = \{C \in \mathrm{NS}(A) \ \mid \ C^2 > 0, \ (C, C') \geq 0 \text{ for any curve } C' > 0\}$$

とおけば, $\mathrm{NC}(Km(A))$ は $S$ の $\mathcal{R}_S^*$-chamber である（Rudakov-Shafarevich [11]）. また, $x \in L \otimes \mathbf{R}$ に対し,

$$x \mapsto x_S \qquad x \mapsto x_R,$$

を, それぞれ $S \otimes \mathbf{R}$, $R \otimes \mathbf{R}$ への射影とすると, $v \in L$ に対し, $v_S \in S^{\vee}$, $v_R \in R^{\vee}$ となる.

$$\mathcal{R}_{L|S} = \{r_S \ \mid \ r \in \mathcal{R}_L, \ (r_S, r_S) < 0\}, \quad \mathcal{R}_{L|S}^* = \{(r_S)^{\perp} \ \mid \ r_S \in \mathcal{R}_{L|S}\}$$

とおく. $\mathcal{R}_{L|S}^*$ は $S$ の positive cone $\mathcal{P}_S$ で局所有限になる. Conway chamber $\mathcal{D}$ が $S$-nondegenerate とは, $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}_S$ が $\mathcal{P}_S$ の空ではない開集合を含むということである. $\mathcal{D}$ が $S$-nondegenerate Conway chamber ならば, $D := \mathcal{D} \cap \mathcal{P}_S$ は $\mathcal{P}_S$ の $\mathcal{R}_{L|S}^*$-chamber となる. このとき, $D$ を induced chamber という. $\mathcal{P}_L$

は Conway chambers で覆われるから, $\mathcal{P}_S$ は induced chambers で覆われる. $\mathcal{R}_S$ は $\mathcal{R}_{L|S}$ の部分集合だから, $\mathcal{R}_S^*$-chamber は induced chambers の合併となる.

$\mathcal{P}_S$ の chamber NC($Km(A)$) は induced chambers の合併となるが, その中に次のような 3 つの induced chamber が存在する.

$D_0$ : 252 個の $(-2)$-vectors を walls を作るベクトルに含む.

$D_1$ : 168 個の $(-2)$-vectors を walls を作るベクトルに含む.

$D_2$ : 96 個の $(-2)$-vectors を walls を作るベクトルに含む.

$D_0$ と $D_1$ は隣り合っており, 共通の $(-2)$-vectors は 126 個. $D_0$ と $D_2$ も隣り合っており, 共通の $(-2)$-vectors は 48 個. また, $D_0, D_1, D_2$ の $(-2)$-vector 以外の walls を作るベクトルもすべて決定できている. また, $D_2$ の 96 個の $(-2)$-vectors のなす配置は, 前節で幾何学的に構成された smooth rational curves の配置に対応している. $D_0$ の walls として現れる 252 個の $(-2)$-vectors は次の様な幾何学的意味を持つ. $C_F$ を射影平面 $\mathbf{P}^2$ の 6 次の Fermat 曲線とし, $\pi_F : X \to \mathbf{P}^2$ を $C_F$ で分岐する $\mathbf{P}^2$ の double covering とする. このとき, $X$ は超特殊 K3 曲面になる. $C_F$ の上には 126 個の $\mathrm{F}_{25}$-有理点が存在する. その各点における $C_F$ の tangent line をとれば, 126 個の line が得られる. 各 line を $\pi$ で引き戻せば, 1 点で 3 重に接する 2 個の smooth rational curves が得られ, したがって, 126 個の line から $X$ 上の 256 個の smooth rational curves を得る. これらが $D_0$ の walls として出てくる 256 個の $(-2)$-vectors に対応している.

## 参考文献


[1] W. Barth and I. Nieto, Abelian surfaces of type (1, 3) and quartic surfaces with 16 skew lines,

[2] J. H. Conway, The automorphism group of the 26-dimensional even unimodular Lorentzian lattice, J. Algebra 80 (1983), 159–163.

[3] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. Lorentzian forms for the Leech lattice. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6(2):215–217, 1982.

[4] I. Dolgachev, Abstract configurations in algebraic geometry, Proc. of The Fano Conference, Univ. of Torino, 2004, 423–462

[5] I. Dolgachev and S. Kondō,A supersingular K3 surface in characteristic 2 and the Leech lattice, IMRN 2003, (2003), 1–23.

[6] T. Katsura, On the descriminants of intersection form on Néron-Severi group, in "Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of Masayoshi Nagata",Kinokuniya Publ., (1987), 183–201.

[7] T. Katsura and S. Kondo, A note on the supersingular K3 surface with Artin invariant 1 in characteristic 2,In "Geometry and Arithmetic" (C. Faber, G. Farkas, R. de Jong, eds.), EMS, 2012, 243-255.

[8] T. Katsura and S. Kondo, The supersingular K3 surface with Artin invariant 1 in characteristic 3, J. Algebra, 352 (2012), 299-321.

[9] T. Katsura, S. Kondo and I. Shimada, On the supersingular K3 surface in characteristic 5 with Artin invariant 1, arXiv:1312.0687.

[10] I. Shimada, Rational double points on supersingular K3 surfaces, Math. Comp. 73 (2004), 1989–2017 (electronic) .

[11] A. N. Rudakov and I. R. Shafarevich. Surfaces of type $K3$ over fields of finite characteristic. In *Current problems in mathematics, Vol. 18*, pages 115–207. Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Informatsii, Moscow, 1981. Reprinted in I. R. Shafarevich, Collected Mathematical Papers, Springer-Verlag, Berlin, 1989, pp. 657–714.

[12] M. Traynard, Sur les fonctions theta de deux variables et les surfaces hyperelliptiques, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1907, 77-177 .

T. Katsura:
Faculty of Science and Engineering,
Hosei University,
Koganei-shi,
Tokyo,
184-8584 JAPAN
email: toshiyuki.katsura.tk@hosei.ac.jp