代数幾何学シンポジウム記録
2014年度 pp.107-113

箙の関係式のモジュライ空間

植田 一石
大阪大学大学院理学研究科

概 要

傾斜対象を持つ代数多様体の連接層の導来圏は関係付き箙を用いて記述されるが，この関係式を変形することで，代数多様体の可換とは限らない変形を調べることが出来る．ここでは，Tarig Abdelgadir 氏と大川新之介氏との共同研究に基いて，射影平面の非可換変形と Beilison 箙の関係式のモジュライ空間の関係について議論する．

The derived category of coherent sheaves on an algebraic variety admitting a tilting object is described in terms of a quiver with relations, and one can study not necessarily commutative deformations of the algebraic variety by deforming the relations. In this proceeding, we discuss our joint work with Tarig Abdelgadir and Shinnosuke Okawa on the relation between non-commutative projective planes and moduli space of relations of the Beilinson quiver.

1 導入

箙 (quiver) とは有向グラフのことであり，形式的には

- 頂点 (vertex) の集合 Q_0
- 矢印 (arrow) の集合 Q_1
- 矢印の根本 (source) と先端 (target) を対応させる写像 $s, t \colon Q_1 \to Q_0$

からなる組 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ として定義される．典型的な例としては，1 つの頂点と 1 つの矢印からなる Jordan 箙や，3 つの頂点と 6 本の矢印からなる Beilinson 箙などがある．

任意の $i = 1, \dots, k-1$ に対して $s(a_{i+1}) = t(a_i)$ を満たす矢印の列 $(a_k, \dots, a_2, a_1)$ を長さ (length) が k の道 (path) と呼ぶ．また，各頂点 $v \in Q_0$ に対し，v で始まって v で終わる長さ 0 の元 e_v を考えて，これも道と呼ぶ．道の張るベクトル空間に

$$(a_k, \dots, a_1) \cdot (b_l, \dots, b_1) = \begin{cases} (a_k, \dots, a_1, b_l, \dots, b_1) & s(a_1) = t(b_l) \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{1.1}$$

で積を入れたものを道代数 (path algebra) と呼び，$\mathbb{C}Q$ で表す．頂点に付随する長さ 0 の道はこの代数の冪等元になる．箙 Q とその道代数の両側イデアル $I \subset \mathbb{C}Q$ の組 (Q, I) を関係付き箙 (quiver with relations) と呼ぶ．例えば，Jordan 箙の道代数は 1 変数多項式環 $\mathbb{C}[x]$ であり，

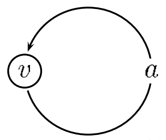

図 1.1: Jordan 箙

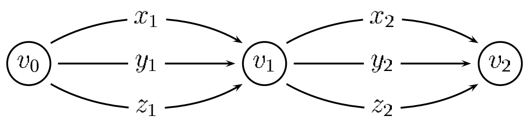

図 1.2: Beilinson 箙

その関係式は$\mathbb{C}[x]$のイデアルである．Beilison 箙の道代数は有限次元の非可換環であり，その関係式として

$$I_0 = (y_2 z_1 - z_2 y_1, z_2 x_1 - x_2 z_1, x_2 y_1 - y_2 x_1) \tag{1.2}$$

を考えると，三角圏の同値

$$D^b \operatorname{coh} \mathbb{P}^2 \cong D^b \operatorname{mod} \mathbb{C}Q/I_0 \tag{1.3}$$

が存在する [Beĭ78]．より一般に，代数多様体Xが傾斜対象を持てば，ある関係付き箙(Q, I)と三角圏の同値

$$D^b \operatorname{coh} X \cong D^b \operatorname{mod} \mathbb{C}Q/I \tag{1.4}$$

が存在する [Bon89, Ric89]．この同値を用いて，X上のベクトル束のモジュライ空間 (より正確には，偏屈連接層のモジュライ空間) を箙の表現を用いて記述できる．

それでは，X上のベクトル束ではなくX自身のモジュライ空間も箙の言葉を用いて書けるのだろうか．射影平面に対しては，この問いは次のような答を持つ：

定理 1.1 ([AOUb])**.**

1. 塩田の楕円モジュラー曲面の自然なコンパクト化$S(3)$の Hesse 群G_{216}による商空間$\overline{M}_{\mathrm{nc}\mathbb{P}^2}$は非可換射影平面のコンパクトなモジュライ空間を与える．
2. Beilinson 箙の関係式のコンパクトなモジュライ空間$\overline{M}_{\mathrm{rel}} = \mathrm{Gr}_3(\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3) /\!/ \mathrm{SL}(\mathbb{C}^3) \times \mathrm{SL}(\mathbb{C}^3)$は$\mathbb{P}(6, 9, 12)$と同型になる．
3. 自然な双有理射$\overline{M}_{\mathrm{nc}\mathbb{P}^2} \to \overline{M}_{\mathrm{rel}}$が存在して，$\overline{M}_{\mathrm{nc}\mathbb{P}^2}$の有理直線を一点に潰し，その外側では同型になっている．

2 次曲面 [OUa] や 3 次曲面 [AOUa] に対しても類似の結果が成り立つ．特に，3 次曲面の場合の箙の関係式のモジュライ空間は 8 次元のトーリック多様体$(\mathbb{P}^2)^9 /\!/ (\mathbb{C}^\times)^{18}$になり，$\mathbb{P}^2$の一般の位置にある 6 点の配置空間を 4 次元の局所閉部分スキームとして含んでいる．

2 非可換射影平面

準連接層のアーベル圏や連接層の導来圏の観点から見ると，代数多様体の変形を代数多様体の範囲に限定して考えることは必ずしも自然ではない．圏の変形の接空間は 2 次の Hochschild コホモロジーで与えられるが，Hochschild-Kostant-Rosenberg 同型により，代数多様体Xの 2 次の Hochschild コホモロジーは直和$H^0(\Lambda^2 \mathcal{T}_X) \oplus H^1(\mathcal{T}_X) \oplus H^2(\mathcal{O}_X)$で与えられることが知ら

れている．この直和分解の第 2 成分 $H^1(\mathcal{T}_X)$ は小平-Spencer 理論により通常の (あるいは「可換な」) 変形の接空間になっているが，残りの 2 つの成分 $H^0(\Lambda^2\mathcal{T}_X)$ と $H^2(\mathcal{O}_X)$ は代数多様体の通常の意味での変形から来ない圏の変形の接空間になっており，それぞれ構造層を非可換にする方向 (Poisson 変形，あるいは狭義の非可換変形) および層の貼り合わせ条件を一般化する方向 (gerbe への変形) に対応している．

代数多様体の概念の拡張として，Artin-Zhang[AZ94] は可換とは限らない次数付き結合代数 A に対し

$$\operatorname{Qgr} A := \operatorname{Gr} A / \operatorname{Tor} A \tag{2.1}$$

の形のアーベル圏を考えて，これを非可換射影多様体とみなすことを提案した．ここで $\operatorname{Gr} A$ は A 上の次数付き右加群のなすアーベル圏で，$\operatorname{Tor} A$ は上に有界な加群の余極限として与えられる加群たちのなす充満部分圏である．$\operatorname{Tor} A$ が $\operatorname{Gr} A$ の Serre 部分圏なので，商圏 $\operatorname{Qgr} A$ もアーベル圏になる．

次数付き環 $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty}$ が連結性 $A_0 = \mathbb{C}$ を満たし，しかも右加群 $\mathbb{C} = A/A^{>0}$ が

$$0 \to A(-3) \to A(-2)^{\oplus 3} \to A(-1)^{\oplus 3} \to A \to \mathbb{C} \to 0 \tag{2.2}$$

の形の射影分解を持つ時，3 次元の 2 次 AS 正則環 (quadratic AS-regular algebra of dimension 3) と呼ばれる [AS87]．3 次元の 2 次 AS 正則環の同型類は，$\mathbb{P}^2$ の 3 次曲線 X，その自己同型 $\sigma \in \operatorname{Aut} X$，それに X 上の次数 3 の直線束 L の組 (X, σ, L) で適当な条件を満たすものの同型類と 1 体 1 に対応する [ATVdB90]．ここで組 (X, σ, L) と (X', σ', L') は，同型写像 $\varphi \colon X \to X'$ が存在して $L \cong \varphi^* L'$ かつ $\varphi \circ \sigma = \sigma' \varphi$ が成り立つ時に，同型であると定義される。

3 次元の 2 次 AS 正則環 A を用いて $\operatorname{Qgr} A$ の形に書けるアーベル圏を非可換射影平面 (non-commutative projective plane) と呼ぶ．非可換射影平面の同型はアーベル圏の同値として定義される．2 つの AS 正則環 A と A' が同型であれば対応する非可換射影平面 $\operatorname{Qgr} A$ と $\operatorname{Qgr} A'$ は同型になるが，逆は必ずしも成立しない．

非可換射影平面の同型類は，3 次元の 2 次 AS 正則 $\mathbb{Z}$ 代数の同型類と 1 対 1 に対応する [SvdB01]．ここで，$\mathbb{Z}$ 代数は次数付き環の拡張であり，その AS 正則性も自然に定義される．3 次元の 2 次 AS 正則 $\mathbb{Z}$ 代数の同型類は、$\mathbb{P}^2$ の 3 次曲線 X とその上の次数 3 の直線束 2 つの組 (X, L_0, L_1) で適当な条件を満たすものの同型類と 1 対 1 に対応する [BP93]．ここで組 (X, L_0, L_1) と (X', L_0', L_1') は，$\varphi^* L_0' \cong L_0$ と $\varphi^* L_1' \cong L_1$ を満たす同型 $\varphi \colon X \to X'$ が存在する時に，同型であると定義される．

3　3 つ組のコンパクトなモジュライ空間

3 次曲線の Hesse 族

$$S(3) := \{((x:y:z),(t_0:t_1)) \in \mathbb{P}^2_{x:y:z} \times \mathbb{P}^1_{t_0:t_1} \mid t_0(x^3+y^3+z^3) + t_1 xyz = 0\} \to \mathbb{P}^1_{t_0:t_1} \tag{3.1}$$

は，$\mathbb{P}^2$ を Hesse 束 (Hesse pencil) の基点 $p_0, \ldots, p_8$ で爆発して得られる有理楕円曲面である:

$$S(3) \cong \operatorname{Bl}_{p_0,\ldots,p_8} \mathbb{P}^2. \tag{3.2}$$

例外曲線は位数3の点からなる切断を与える．$SL_2(\mathbb{Z})$ のレベル3の主合同部分群を

$$\Gamma(3) = \ker\left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\right) \tag{3.3}$$

とおくと，$\Gamma(3) \ltimes \mathbb{Z}^2$ は

$$(\gamma, m, n) \colon (\tau, z) \mapsto \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z + m\tau + n}{c\tau + d}\right). \tag{3.4}$$

によって $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ に自然に作用するが，この作用による商を塩田の楕円モジュラー曲面と呼ぶ：

$$S'(3) := (\mathbb{H} \times \mathbb{C})/(\Gamma(3) \ltimes \mathbb{Z}^2) \to X'(3) := \mathbb{H}/\Gamma(3). \tag{3.5}$$

Hesse 族 $S(3)$ は楕円モジュラー曲面 $S'(3)$ の射影モデルになっている．Hesse 群

$$G_{216} := \left(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \left(\frac{1}{3}\mathbb{Z}\right)^2\right) \Big/ (\Gamma(3) \ltimes \mathbb{Z}^2) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}/3)^2 \tag{3.6}$$

の $S'(3)$ への自然な作用は $S(3)$ に延長され，爆発 (3.2) を通して $\mathbb{P}^2$ の双有理自己同型を引き起こす．この双有理自己同型が実は双正則であり，G_{216} が $\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^2 \cong \mathrm{PSL}_3(\mathbb{C})$ の Hesse 束を束として保つ元たちからなる部分群に一致することが容易に分かる．$S(3)$ の一般の点 p に対し，$(E_p, \mathcal{O}_{E_p}(3p_0), \mathcal{O}_{E_p}(3p))$ は [BP93] によって3次元の2次 AS 正則 $\mathbb{Z}$ 代数に対応する．ここで，$p \in S(3)$ の属する楕円ファイバーを E_p で表した．$S(3)$ の一般の2点 p, q に対し，$(E_p, \mathcal{O}_{E_p}(3p_0), \mathcal{O}_{E_p}(3p))$ と $(E_{p'}, \mathcal{O}_{E_{p'}}(3p_0), \mathcal{O}_{E_{p'}}(3p'))$ が同型になるための必要十分条件は，ある $g \in G_{216}$ に対して $p' = g \cdot p$ となることである．このことから，

$$\overline{M}_{\mathrm{nc}\mathbb{P}^2} := S(3)/G_{216} \tag{3.7}$$

が双有理的な意味で非可換射影平面の同型類をパラメトライズすることが分かる．Hesse 群の自然な射影 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}_3(\mathbb{C})$ による逆像を G_{648} と書くと，3変数多項式環 $\mathbb{C}[x, y, z]$ の G_{648} による不変式環は次数が6, 9および12の不変式 I_6, I_9, I_{12} によって自由に生成されている [Mas89]:

$$\mathbb{C}[x, y, z]^{G_{648}} \cong \mathbb{C}[I_6, I_9, I_{12}]. \tag{3.8}$$

4 関係式のコンパクトなモジュライ

頂点 v_0 から頂点 v_1 への矢印が張るベクトル空間と頂点 v_1 から頂点 v_2 への矢印が張るベクトル空間をそれぞれ

$$V_1 := \mathrm{span}\{x_1, y_1, z_1\}, \quad V_2 := \mathrm{span}\{x_2, y_2, z_2\}, \tag{4.1}$$

とおくと，(1.2) の関係式 I_0 は $V_1 \otimes V_2$ の3次元部分空間である．関係付き道代数 $\mathbb{C}Q/I_0$ の平坦な変形は、I_0 を $V_1 \otimes V_2$ の別の3次元部分空間に変形することに対応する。関係付き道代数 $\mathbb{C}Q/I$ と $\mathbb{C}Q/I'$ が半単純代数 $\mathbb{C}^{Q_0} = \mathbb{C}e_{v_0} \oplus \mathbb{C}e_{v_1} \oplus \mathbb{C}e_{v_2}$ 上の代数として同型であることの必

要十分条件は，関係式 I と I' が $\mathrm{GL}(V_1) \times \mathrm{GL}(V_2)$ の自然な作用で移り合うことである．幾何学的不変式論的商

$$\overline{M}_{\mathrm{rel}} := \mathrm{Gr}_3(V_1 \otimes V_2) /\!/ \mathrm{SL}(V_1) \times \mathrm{SL}(V_2) \tag{4.2}$$

を関係式のコンパクトなモジュライと呼ぶ．Grassmann 多様体の幾何学的不変式論的な記述

$$\mathrm{Gr}_3(V_1 \otimes V_2) \cong \mathbb{P}(V_0 \times V_1 \times V_2) /\!/ \mathrm{SL}(V_0) \tag{4.3}$$

に注意すると，この商空間は量子情報理論において 3 qutrit の SLOCC モジュライ空間として研究されている

$$\mathbb{P}(V_0 \times V_1 \times V_2) /\!/ \mathrm{SL}(V_0) \times \mathrm{SL}(V_1) \times \mathrm{SL}(V_2) \tag{4.4}$$

と自然に同型になる [OUb]．ただし，V_0 は 3 次元のベクトル空間である．27 変数多項式環 $\mathbb{C}[V_0 \otimes V_1 \otimes V_2]$ の $\mathrm{SL}(V_0) \times \mathrm{SL}(V_1) \times \mathrm{SL}(V_2)$ による不変式環もやはり次数が 6, 9 および 12 の不変式 J_6, J_9, J_{12} によって自由に生成されている [Cha39]:

$$\mathbb{C}[V_0 \otimes V_1 \otimes V_2]^{\mathrm{SL}(V_0) \times \mathrm{SL}(V_1) \times \mathrm{SL}(V_2)} \cong \mathbb{C}[J_6, J_9, J_{12}]. \tag{4.5}$$

(3.8) と (4.5) の関係は，Vinberg [Vin76] による次数付き Lie 環に付随する不変式論の特別な場合になっている．

5　2 次曲面および 3 次曲面

2 次曲面の連接層の導来圏は箙

$$\begin{tikzcd} v_0 \arrow[r, shift left, "a_1"] \arrow[r, shift right, "a_2"'] & v_1 \arrow[r, shift left, "b_1"] \arrow[r, shift right, "b_2"'] & v_2 \arrow[r, shift left, "a'_1"] \arrow[r, shift right, "a'_2"'] & v_3 \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

によって記述され，関係式は $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ の 2 次元の部分空間になる．関係式のコンパクトなモジュライ空間は

$$\begin{aligned} \overline{M}_{\mathrm{rel}} &= \mathrm{Gr}_2(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3) /\!/ \mathrm{SL}(V_1) \times \mathrm{SL}(V_2) \times \mathrm{SL}(V_3) && (5.2) \\ &= \mathbb{P}(V_0 \otimes V_1 \otimes V_2 \otimes V_3) /\!/ \mathrm{SL}(V_0) \times \mathrm{SL}(V_1) \times \mathrm{SL}(V_2) \times \mathrm{SL}(V_3) && (5.3) \end{aligned}$$

で与えられるが，これは量子情報理論において 4 qubit のモジュライ空間として研究されており，不変式環は次数 2, 4, 4, 6 の元で自由に生成される [LT03].

3 次曲面の連接層の導来圏は箙

$$\begin{tikzcd} v_{0,0} \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & v_{1,0} \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & v_{2,0} \\ v_{0,1} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & v_{1,1} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & v_{2,1} \\ v_{0,2} \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[r] & v_{1,2} \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[r] & v_{2,2}. \end{tikzcd} \tag{5.4}$$

によって記述され，関係式は $i, j = 0, 1, 2$ の各々に対して，$v_{0,i}$ から $v_{2,j}$ への長さ 2 の道のなす 3 次元ベクトル空間の 1 次元部分空間たちからなる．関係式のコンパクトなモジュライ空間は

$$\overline{M}_{\mathrm{rel}} := (\mathbb{P}^2)^9 /\!/ (\mathbb{C}^\times)^{18} \tag{5.5}$$

であり，8 次元のトーリック多様体をなす．$\mathbb{P}^2$ を一般の位置にある 6 点で爆発すると滑らかな 3 次曲面を得るが，モジュライ空間 $\overline{M}_{\mathrm{rel}}$ はこの 6 点の配置空間を 4 次元の局所閉部分スキームとして含んでいる．

参考文献

[AOUa] Tarig Abdelgadir, Shinnosuke Okawa, and Kazushi Ueda, *Compact moduli of non-commutative cubic surfaces*, in preparation.

[AOUb] ———, *Compact moduli of noncommutative projective planes*, arXiv:1411.7770.

[AS87] Michael Artin and William F. Schelter, *Graded algebras of global dimension* 3, Adv. in Math **66** (1987), no. 2, 171–216.

[ATVdB90] M. Artin, J. Tate, and M. Van den Bergh, *Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves*, The Grothendieck Festschrift, Vol. I, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 33–85. MR 1086882 (92e:14002)

[AZ94] M. Artin and J. J. Zhang, *Noncommutative projective schemes*, Adv. Math. **109** (1994), no. 2, 228–287. MR MR1304753 (96a:14004)

[Beĭ78] A. A. Beĭlinson, *Coherent sheaves on* $\mathbf{P}^n$ *and problems in linear algebra*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **12** (1978), no. 3, 68–69. MR MR509388 (80c:14010b)

[Bon89] A. I. Bondal, *Representations of associative algebras and coherent sheaves*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **53** (1989), no. 1, 25–44. MR MR992977 (90i:14017)

[BP93] A. I. Bondal and A. E. Polishchuk, *Homological properties of associative algebras: the method of helices*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **57** (1993), no. 2, 3–50. MR 1230966 (94m:16011)

[Cha39] Josephine H. Chanler, *The invariant theory of the ternary trilinear form*, Duke Math. J. **5** (1939), 552–566. MR 0000221 (1,35e)

[LT03] Jean-Gabriel Luque and Jean-Yves Thibon, *Polynomial invariants of four qubits*, Phys. Rev. A (3) **67** (2003), no. 4, 042303, 5. MR 2039690 (2004k:81098)

[Mas89] Heinrich Maschke, *Aufstellung des vollen Formensystems einer quaternären Gruppe von 51840 linearen Substitutionen*, Math. Ann. **33** (1889), no. 3, 317–344. MR 1510546

[OUa] Shinnosuke Okawa and Kazushi Ueda, *Noncommutative quadric surfaces and noncommutative conifolds*, arXiv:1403.0713.

[OUb] ———, *Quantum entanglement, Calabi-Yau manifolds, and noncommutative algebraic geometry*, arXiv:1402.3768.

[Ric89] Jeremy Rickard, *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc. (2) **39** (1989), no. 3, 436–456. MR MR1002456 (91b:18012)

[SvdB01] J. T. Stafford and M. van den Bergh, *Noncommutative curves and noncommutative surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **38** (2001), no. 2, 171–216. MR 1816070 (2002d:16036)

[Vin76] È. B. Vinberg, *The Weyl group of a graded Lie algebra*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **40** (1976), no. 3, 488–526, 709. MR 0430168 (55 #3175)