代数幾何学シンポジウム記録
2008年度 pp.15-23

THOMAE'S FORMULA FOR TRIPLE COVERING AND BINARY GRAPH (松本圭司氏との共同研究)

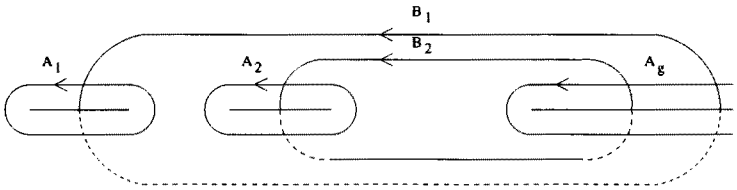
寺杣 友秀

1. INTRODUCTION-超楕円曲線の THOMAE の公式

g を2以上の自然数とし $\lambda_1,\ldots,\lambda_{2g+1}$ を $\lambda_1<\cdots<\lambda_{2g+1}$ なる実数とする。C を

$$C: y^2=\prod_{i=1}^{2g+1}(x-\lambda_i)$$

で定まる超楕円曲線とし、C の上の homology の symplectic base $A_1,\ldots,A_g,B_1,\ldots,B_g$ を下の図のように定める。



また $\omega_i=\dfrac{x^{i-1}dx}{y}$ とおくと $\omega_1,\ldots,\omega_g$ は正則微分形式の基底となる。さらにこれらの基底に関する周期行列 P_A,P_B を

$$P_A=\left(\int_{A_i}\omega_j\right)_{i,j=1,\ldots,g},\quad P_B=\left(\int_{B_i}\omega_j\right)_{i,j=1,\ldots,g} \tag{1.1}$$

として定め、正規化された周期行列 τ を

$$\tau=P_A\cdot P_B^{-1} \tag{1.2}$$

と定める。このとき τ は $\tau={}^t\tau, Im(\tau)>0$ を満たし、g 次の Siegel 上半空間の点を定める。$\Lambda=(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{2g})=(\Lambda',\Lambda'')\in\mathbf{Q}^g\oplus\mathbf{Q}^g$ に対して characteristic が Λ の Theta constant$\vartheta(\tau,\Lambda)$ を

$$\vartheta(\tau,\Lambda)=\sum_{n\in\mathbf{Z}^g}\exp(2\pi\sqrt{-1}(\frac{1}{2}(n+\Lambda')\tau^t(n+\Lambda')+(n+\Lambda')^t\Lambda''))$$

と定める。$2\Lambda\in\mathbf{Z}^{2g}$ であれば $\vartheta^4(\tau,\Lambda)$ は Λ の $\mathbf{Z}^{2g}$ による剰余類のみで定まる。$2\Lambda\in\mathbf{Z}^{2g}$ のとき $4\Lambda'\cdot{}^t\Lambda''$ の偶奇によりそれぞれ Λ を even theta characgeristic, odd theta charcteristc という。odd theta characteristic Λ に対する theta constant は消えている。even theta characteristic のうちで消えてい

ないものの値を与えるのがThomaeの公式である。半整数の theta characteristic に対して $\{1,\ldots,2g+1\}$ の部分集合集合 S が [M],p.106 によるやり方でただ一通りに定まる。$U=\{1,3,5,\cdots,2g+1\}$ とおき、$\{1,2,\cdots,2g+1\}$ の部分集合 P,Q に対しての対称差 $P\circ Q$ を $(P-Q)\cup(Q-P)$ によって定義する。

定理 1.1 (Thomaeの公式 [T],[F],[M]). $\#S\circ U=g+1$ とする。以上の記号のもとで次の式が成立する。

$$\vartheta(\tau,\Lambda)^4=\frac{\pm 1}{(2\pi)^g}\det(P_B)^2\prod_{p,q\in S\circ U,p<q}(\lambda_p-\lambda_q)\cdot\prod_{p,q\notin S\circ U,p<q}(\lambda_p-\lambda_q)$$

2. Bershadski-Radul-Nakayashiki による triple cyclic covering に対する Thomae の公式

Bershadski-Radul-Nakayashiki により $\mathbf{P}^1$ の特別なタイプの d-重巡回被覆における Thomae の公式の類似物が与えられた。ここでは $d=3$ のときに限ってそれを紹介しよう。

$\lambda_1,\ldots,\lambda_{3n}$ を $\mathbf{C}$ の異なる点として $\mathbf{P}^1$ の 3 次の巡回被覆 C を

$$C:y^2=\prod_{i=1}^{3n}(x-\lambda_i)$$

によって定める。このようなタイプの 3 次被覆を branching index $(1/3^{3n})=(1/3,\ldots,1/3)$ の被覆という。このとき C の種数は $g=3n-2$ となる。C の正則微分形式の基底として次の微分形式 $\omega_1,\cdots,\omega_{3n-2}$ がとれる。

$$\omega_i=\begin{cases}\dfrac{x^{i-1}dx}{y} & \text{for } i=1,\ldots,n-1\\[2ex] \dfrac{x^{i-n}dx}{y^2} & \text{for } i=n,\ldots,3n-2.\end{cases}\tag{2.1}$$

C には $\mu_3=\{\omega\in\mathbf{C}\mid\omega^3=1\}$ が $x\mapsto x, y\mapsto\omega y$ によって作用するので $H_1(C,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ にも μ_3 が作用する。$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ として定まる自己同型を ρ と書き、$H_1(C,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ の $(1-\rho)$-torsion point を $H_1(C,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{(1-\rho)}$ と書く。$H_1(C,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{(1-\rho)}$ 構造は次のように記述される。$\mathbf{P}^1$ の起点 b をとりそれを C に持ち上げたものを $\tilde{b}$ と書く。b を起点として λ_i のまわりを反時計廻りに小さくまわってもとに戻る道を γ_i とする。ただし $\gamma_1,\cdots,\gamma_{3n}$ を合成したものは可縮であるようにとっておく。γ_i を $\tilde{b}$ を起点として C に持ち上げたものを $\tilde{\gamma}_i$ とかく。このとき $\frac{1}{3}(1-\rho)(\tilde{\gamma}_i-\tilde{\gamma}_{3n})$ は $H_1(C,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{(1-\rho)}$ の元を与える。$e_i(i=1,\ldots,3n)$ を基底とする $\mathbf{F}_3$ 上のベクトル空間 $\oplus_{i=1}^{3n}\mathbf{F}_3e_i$ の部分空間

$$Z=\{k_ie_i\mid\sum_i k_i\equiv 0(\bmod 3)\}$$

の元 e_i-e_{3n} に対して $\frac{1}{3}(1-\rho)(\tilde{\gamma}_i-\tilde{\gamma}_{3n})$ を対応させることにより $Z\to H_1(C,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{(1-\rho)}$ なる写像が定まる。この対応により次の同型写像を得る。

$$H(\mathbf{F}_3\xrightarrow{\alpha}\oplus_{i=1}^{3n}\mathbf{F}_3e_i\xrightarrow{\beta}\mathbf{F}_3)\simeq H_1(C,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{(1-\rho)}$$

ここで α は $1 \mapsto \sum_{i=1}^{3n} e_i$ で与えられる写像、β は $\sum_i k_i e_i \mapsto \sum_i k_i$ で与えられる写像で H は homology を表す。$\widetilde{\Lambda} = \sum_i k_i e_i$ を Z の元とするとき $\widetilde{\Lambda}_j \subset \{1, \ldots, 3n\}$ $(j = 0, 1, 2)$ を

$$\widetilde{\Lambda}_j = \{i \in \{1, \ldots, 3n\} \mid k_i \equiv j \pmod 3\}$$

と定める。

次に $\Lambda \in H_1(C, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{(1-\rho)}$ に対応する差積 $\Delta(\Lambda)$ を次のように定義する。まず Λ の Z へのもちあげ $\widetilde{\Lambda}$ をとってきて $\widetilde{\Lambda}_j$ $(j = 0, 1, 2)$ を上のように定義する。そして $(\widetilde{\Lambda}_i, \widetilde{\Lambda}_j)$ を

$$(\widetilde{\Lambda}_i, \widetilde{\Lambda}_j) = \begin{cases} \prod_{p \in \widetilde{\Lambda}_i, q \in \widetilde{\Lambda}_j} (\lambda_p - \lambda_q) & \text{if } (i \neq j) \\ \prod_{p, q \in \widetilde{\Lambda}_i, p < q} (\lambda_p - \lambda_q) & \text{if } (i = j) \end{cases}$$

と定義し、

$$\Delta(\Lambda) = (\widetilde{\Lambda}_0, \widetilde{\Lambda}_1)(\widetilde{\Lambda}_1, \widetilde{\Lambda}_2)(\widetilde{\Lambda}_2, \widetilde{\Lambda}_0)(\widetilde{\Lambda}_0, \widetilde{\Lambda}_0)^3 (\widetilde{\Lambda}_1, \widetilde{\Lambda}_1)^3 (\widetilde{\Lambda}_2, \widetilde{\Lambda}_2)^3$$

と定めると、これは持ち上げ $\widetilde{\Lambda}$ の取り方によらない事がわかる。

最後に C の symplectic base $A_1, \cdots, A_g, B_1, \ldots, B_g$ を固定して theta constant との関係をのべることにしよう。

$$\mathbf{Z}^{2g} \xrightarrow{\simeq} H_1(C, \mathbf{Z}) : (a_i, b_i)_i \mapsto \sum_{i=1}^{g} (a_i A_i + b_i B_i)$$

なる同型が定まるので、この同型により

$$H_1(C, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{(1-\rho)} \subset (\frac{1}{3}\mathbf{Z})^{2g}/\mathbf{Z}^{2g}$$

なる単射ができる。このときリーマン定数 ρ が $(\frac{1}{2}\mathbf{Z})^{2g}/\mathbf{Z}^{2g}$ の元として定まる。上の symplectic base $A_1, \ldots, A_g, B_1, \ldots, B_g$ と正則微分形式 (2.1) を使って式 (1.1) により P_A, P_B を定め、これらを用いて正規化された周期行列 τ を式 (1.2) により定める。

上の記号の準備のもとで Bershadski-Radul-Nakayashiki による Thomae の定理の類似は次のように述べられる。

定理 2.1 (Bershadski-Radul-Nakayashiki). 上記の記号のもとで $\#\Lambda_0 = \#\Lambda_1 = \#\Lambda_2 (= n)$ とする。このとき

(1) $\Lambda + \rho \in (\frac{1}{6}\mathbf{Z})^{2g}/\mathbf{Z}^{2g}$ の $\mathbf{Q}^{2g}$ への持ち上げを $\tilde{l}$ とすると $\vartheta(\tau, \tilde{l})^6$ はその持ち上げ方によらない。この $\vartheta(\tau, \tilde{l})^6$ を $\vartheta(\tau, \Lambda + \rho)^6$ と書く。

(2)
$$\vartheta(\tau, \Lambda + \rho)^6 = C_\Lambda \det(P_B)^3 \cdot \Delta(\Lambda)$$
が成り立つ。ここで C_Λ は曲線 C によらない絶対定数である。

この報告では次の問題を考える。

Problem 2.2. (1) 上の定理に現れる絶対定数はいくつになるか？

(2) *branching index* が $(1/3^{3n})$ でない一般の場合ではどうなっているか？

3. $\mathbf{P}^1$ の巡回3重被覆と BINARY TREE

この章以降は一般の branching index の場合を考える。$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を相異なる複素数とする。さらに $a_1, \ldots, a_n \in \{1, 2\}$ で $\sum_{i=1}^n a_i \equiv 0 \pmod 3$ を満たすものとする。C を

$$y^3 = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)^{a_i} \tag{3.1}$$

によって定義された曲線とする。この曲線の λ_i における branching index を $a_i/3$ と定義する。このタイプの曲線を branch index が $(a_1/3, \ldots, a_n/3)$ の曲線という。

前章と同様にして $H_1(C, \mathbf{Z})$ に μ_3 の作用が自然に定まるので、その生成元の作用 ρ も同様に定まる。$H_1(C, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ の $(1-\rho)$-torsion element の集合をやはり同様に $H_1(C, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{(1-\rho)}$ と書く。まずこの群を分岐点の集合を用いて記述する。$\mathbf{F}_3$ 線形写像 α, β を

$$\alpha : \mathbf{F}_3 \to \oplus_{i=1}^n \mathbf{F}_3 e_i : 1 \mapsto \sum_{i=1}^n e_i$$

$$\beta : \oplus_{i=1}^n \mathbf{F}_3 e_i \to \mathbf{F}_3 : \sum_{i=1}^n k_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

によって定めると列

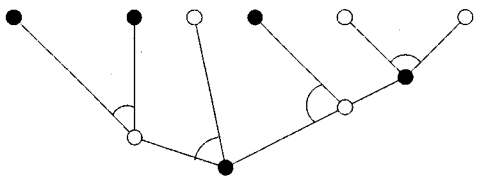
$$\mathbf{F}_3 \xrightarrow{\alpha} \oplus_{i=1}^n \mathbf{F}_3 e_i \xrightarrow{\beta} \mathbf{F}_3$$

は complex となるが、この complex を用いて

$$H(\mathbf{F}_3 \xrightarrow{\alpha} \oplus_{i=1}^n \mathbf{F}_3 e_i \xrightarrow{\beta} \mathbf{F}_3) \simeq H_1(C, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{(1-\rho)} \tag{3.2}$$

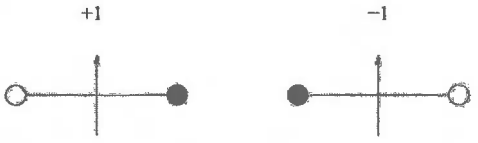
なる同型を得る。

次に binary tree と C の homology の symplectic base について述べよう。ここで tree は planar tree つまり各頂点には巡回順序が定まっている tree であって、trivalent、すなわち各内頂点 (inner vertex) からは丁度3本の edge が出ていているものを言う。さらに binary というのは各頂点に2つの色 (ここでは白と黒) がついていて edge で結ばれている頂点には異なる色がつけられているものとする。また binary tree の marking とは各内頂点から出ている3本の edge のうちの2つの edge が指定されているものとする。この指定は図形的には孤を結ぶことによってあらわす。下は maked binary tree の例である。

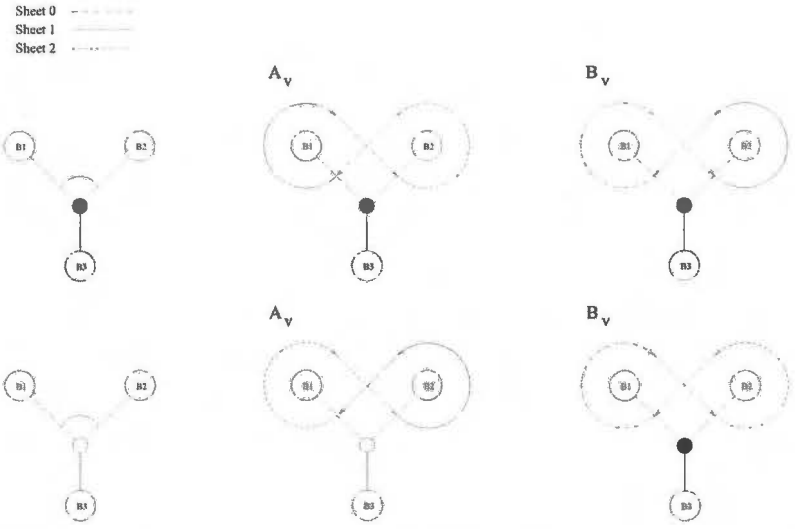


marked binary tree を端頂点 (outer vertex) が丁度 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ になるように $\mathbf{C}$ の上に書く。ただし λ_i の branching index が 1/3 の時は白い頂点、2/3 の時は黒い頂点が書かれているようになっているものとする。$\mathbf{P}^1$ のコピー3枚を (コ

ピーは $\mathbf{Z}/3$ によって番号付けされているものとする) このグラフに沿って切れ目をいれて、貼り付ける。このときの貼り合わせのルールは黒い頂点を左に見ながら edge を横切る時にはコピーの番号を一つ増やし、右に見ながら横切る時にはひとつ減らすように別のシートに移ってゆくというものである。(下図) このようにして貼り付けたものが C を与えている。



上の表示を用いて C の symplectic base を構成しよう。まず、各 inner vertex v に対して、そこでの marking を用いて C の topological cycle A_v, B_v を定義する。vertex v の色に応じて定義は異なるが、その定義を下に図示する。ここで一点鎖線、実線、点線はそれぞれ 0 番目、1 番目、2 番目のシートの上の道を表す。



このとき $\{A_v, B_v\}_v$ は symplectic base となり、v が白い inner vertex であれば $\rho^2(A_v) = B_v$、黒ならば $\rho(A_v) = B_v$ となる。inner vertex の数が C の genus $g(C)$ となり、下の同型が得られる。

$$\iota : \mathbf{Z}^g \oplus \mathbf{Z}^g \to H_1(C, \mathbf{Z}) : (p_v, q_v)_{v:\text{inner vertex}} \mapsto \sum_v (p_v A_v + q_v B_v) \tag{3.3}$$

また Riemann constant は $\rho = \dfrac{1}{2}\sum_v (A_v + B_v)$ で与えられる。A_v, B_v からなる symplectic base は Riemann constant ρ は marked binary tree の取り方に depend する。以下 marked binary tree は fix して考える。

4. 微分形式と周期行列

C の微分形式について述べる。λ_i における branching index を $a_i/3$ とし、$b_i = 3 - a_i$ とおく。方程式 (3.1) における y を y_1 とおいて、$y_2 = \dfrac{1}{y}\prod_i (x-\lambda_i)$ とおく。すなわち

$$y_2^3 = \prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)^{b_i}$$

となる。いま $d_1 = \sum_i (a_i/3) - 1, d_2 = \sum_i (b_i/3) - 1$ とおくと、$d_1 + d_2$ 個の微分形式 η_j を

$$\eta_j = \frac{x^{i-1}dx}{y_1} \quad \text{for } j = 1, \ldots, d_1$$
$$\eta_{j+d_1} = \frac{x^{i-1}dx}{y_2} \quad \text{for } j = 1, \ldots, d_2.$$

と定めると、これらは C の正則微分形式の基底となることがわかる。したがって $H^0(C, \Omega^1_C)$ の次元は $d_1 + d_2$ で $\dim(H^0(C, \Omega^1_C)(\chi) = d_2, \dim(H^0(C, \Omega^1_C)(\overline{\chi}) = d_1$ となる。ここで χ は μ_3 の自然な指標、$H^0(C, \Omega^1_C)(\chi)$ は指標 χ で作用する $H^0(C, \Omega^1_C)$ の部分空間等である。d_1, d_2 は白あるいは黒の inner vertex の数にもなっている。前章で定義した symplectic base および微分形式 η_i $(i = 1, \ldots, g = d_1 + d_2)$ を用いて周期行列 P_A, P_B、および正規化された周期行列 τ を式 (1.1),(1.2) によって定義する。

5. 3次巡回被覆に対する THOMAE の公式

それでは Thomae の公式を述べることにしよう。同型 (3.2), (3.3) より得られる次の写像を考える。

$$\text{(5.1)} \qquad \mathrm{Ker}(\beta) \to H_1(C, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{(1-\rho)} \overset{\subseteq}{\to} H_1(C, \frac{1}{3}\mathbf{Z}/\mathbf{Z})_{(1-\rho)} \overset{\iota^{-1}}{\simeq} (\frac{1}{3}\mathbf{Z})^{2g}/\mathbf{Z}^{2g}$$

$\widetilde{\Lambda} = \sum_i k_i e_i$ を $\mathrm{Ker}(\beta)$ の元とする。$\widetilde{\Lambda}^{\pm}$ を

$$\widetilde{\Lambda}^{\pm} = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid a_i = \pm 1 \pmod 3\}$$

と定義し、さらに $\widetilde{\Lambda}^{\pm}_j$ を

$$\widetilde{\Lambda}^{\pm}_j = \{i \in \widetilde{\Lambda}^{\pm} \mid k_i = j \pmod 3\}$$

と定義する。S_1, S_2 を $\widetilde{\Lambda}^{\pm}_j$ のどれかとして (S_1, S_2) を

$$(S_1, S_2) = \begin{cases} \prod_{p \in S_1, q \in S_2}(\lambda_p - \lambda_q) & \text{if } S_1 \neq S_2 \\ \prod_{p,q \in S_1, p<q}(\lambda_p - \lambda_q) & \text{if } S_1 = S_2 \end{cases}$$

と定義する。このとき $\widetilde{\Lambda} \in \mathrm{Ker}(\beta)$ に対して

$$\Delta(\widetilde{\Lambda}) = \prod_i (\tilde{\Lambda}_i^+, \tilde{\Lambda}_i^+)^3 (\tilde{\Lambda}_i^-, \tilde{\Lambda}_i^-)^3 \prod_{i \neq j} (\tilde{\Lambda}_i^+, \tilde{\Lambda}_j^-)^2$$
$$\prod_{i<j} (\tilde{\Lambda}_i^+, \tilde{\Lambda}_j^+)(\tilde{\Lambda}_i^-, \tilde{\Lambda}_j^-)$$

とおくと $\Delta(\widetilde{\Lambda})$ は $H_1(C, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{(1-\rho)}$ における $\widetilde{\Lambda}$ の類 Λ のみによることがわかる。これを $\Delta(\Lambda)$ と書くことにする。

$\mathrm{Ker}(\beta)$ の元 $\widetilde{\Lambda}$ が条件

$$\#\widetilde{\Lambda}_0^+ - \#\widetilde{\Lambda}_0^- = \#\widetilde{\Lambda}_1^+ - \#\widetilde{\Lambda}_1^- = \#\widetilde{\Lambda}_2^+ - \#\widetilde{\Lambda}_2^- \tag{5.2}$$

を満たしているか否かは、その $H_1(C, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{(1-\rho)}$ における類のみにより決定される。$H_1(C, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{(1-\rho)}$ の元 Λ の持ち上げ $\widetilde{\Lambda}$ がこの条件を満たしているとき Λ は equidistributed であるという。

以上の準備のもとで、次の定理が成立する。

定理 5.1 (Matsumoto-T.).

Λ を equidistributed な $H_1(C, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{(1-\rho)}$ の元とする。

(1) Λ を写像 (5.1) によって $(\frac{1}{3}\mathbf{Z})^{2g}/\mathbf{Z}^{2g}$ の元とみる。$\hat{\Lambda}$ を Λ の $(\frac{1}{3}\mathbf{Z})^{2g}$ への持ち上げとする。このとき $\vartheta(\tau, \hat{\Lambda} + \rho)^6$ はその持ち上げの仕方によらない。ここで ρ はリーマン定数である。これを単に $\vartheta(\Lambda + \rho)$ と書く。

(2) (Thomae の公式の類似)

$$\vartheta(\tau, \Lambda + \rho)^6 = \pm C_\Lambda \cdot \det(P_B)^3 \cdot \Delta(\Lambda)$$

が成立する。ここで C_Λ は Λ のみによる absolute constant で

$$C_\Lambda^6 = [(2\pi)^3 3^{3/4} \exp(\frac{11}{12}\pi\sqrt{-1})]^{-6g}.$$

となる。

6. 証明のアウトライン

証明は Bershadski-Radul-Nakayashiki の場合の 3 重被覆の曲線の退化を考え一般の branching index の場合の定理を absolute constant の部分を除いて証明する。Absolute constant を決定する部分についても 3 重被覆の退化を考え楕円曲線の場合に帰着させる。楕円曲線の場合は 1 の 3 乗根における theta constant とガンマ関数の比の計算に帰着する。これは Chowla-Selberg の公式として知られている。

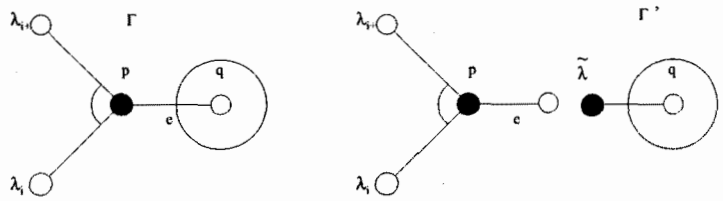
ここでは証明の中心となる曲線の退化の様子についてのべることにしよう。t を 0 に近い複素数として分岐点 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ およびそこに outer vertex をもつ marked binary tree を変形することを考える。ここで簡単のため $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は、この順番で tree の planar graph より導かれる outer vertex の cyclic order の順番になっていて λ_i と λ_{i+1} は inner vertex p に edge で結ばれているとする。$\mathbf{C}$ の点 $\tilde{\lambda}$ を一つ選んで、$k = i, i+1$ として分岐点 $\lambda_k(t)$ を

$$\lambda_i(t) = \tilde{\lambda} + t(\lambda_k - \tilde{\lambda})$$

と変形する。このとき分岐点の変形 $\lambda_1, \cdots, \lambda_i(t), \lambda_{i+1}(t), \cdots, \lambda_n$ に従ってその３次被覆 C も変形する。この変形は原点にも安定曲線に完備化され、特異ファイバーは二つの連結成分をもつ。連結成分の一つは上の座標でただ $t=0$ の極限をとったもので、$\mathbf{P}^1$ 内の $\lambda_1, \cdots, \lambda_{i-1}\tilde{\lambda}, \lambda_{i+2}, \cdots, \lambda_n$ で分岐した３次巡回被覆でこれを C_2 とおく。もう一つの成分は $\xi = (x-\tilde{\lambda})/t$ なる $\mathbf{P}^1$ の座標に変換することにより見やすくなる。この座標変換で分岐点 $\lambda_k(t)$ は $\lambda'_k(t)$ に変換される。ここで

$$\lambda'_k(t) = \begin{cases} (\lambda_k - \tilde{\lambda})/t & \text{if } k \neq i, i+1 \\ \lambda_i - \tilde{\lambda} & \text{if } k = i, i+1 \end{cases}$$

である。従って、特異ファイバーのもう一つの成分は $\xi = \lambda_i - \tilde{\lambda}, \lambda_{i+1} - \tilde{\lambda}, \infty$ で分岐する３次巡回被覆 C_1 となる。特異ファイバーはこの二つの成分を C_1(これは楕円曲線となる) の ∞ 上にある分岐点と C_2 の $\tilde{\lambda}$ 上にある分岐点でくっつけたものとなる。このとき曲線 C 上にある marked binary tree も下の図のように分裂する。



従ってこの分解に従って symplectic base もそれぞれの成分上の symplectic base に分解する。

微分形式の方も極限を考えると、差積 $\Delta(\Lambda)$ とキャンセルして有限の値となる。たとえば λ_i, λ_{i+1} が白の outer vertex であるとして、上の図の状況のように innter vertex p につながっていたとすると、B_p 上の $\dfrac{dx}{y_2}$ の積分は

$$\int_{B_p} \frac{dx}{y_2(t)} = \omega^i(1-\omega) \int_{\lambda_i(t)}^{\lambda_{i+1}(t)} \frac{dx}{(x-\lambda_i(t))^{2/3}(x-\lambda_{i+1}(t))^{2/3} \prod_{k\neq i,i+1}(x-\lambda_k)^{b_k/3}}$$

と計算されるが、さらに、上の座標 ξ で変換することにより

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} t^{1/3} \int_{B_p} \frac{dx}{y_2(t)} &= \frac{\omega^i(1-\omega)}{\prod_{k\neq i,i+1}(\tilde{\lambda}-\lambda_k)^{b_k/3}} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{d\xi}{(\xi-\lambda_i)^{2/3}(\xi-\lambda_{i+1})^{2/3}} \\ &= \frac{-\omega^{i'}(1-\omega)}{(\lambda_i-\lambda_{i+1})^{1/3}\prod_{k\neq i,i+1}(\tilde{\lambda}-\lambda_k)^{b_k/3}} B(\frac{1}{3},\frac{1}{3}). \end{aligned}$$

なる極限をえる。P_B のそれぞれの成分に対して上と同様の計算を行うと $\det(P_B)$ は適当な t のべきで割ると有限の値に近づく。差積のほうからも t のべきがでてキャンセルする。

正規化された周期は Siegel 上半空間の中の $(g-1)\times(g-1)$ 行列と 1×1 行列の直和行列に収束するので theta constant はある有限の値に収束する。このことから C に関する Thomae の公式から C_2 に関する Thomae の公式を (absolute

constant の部分を除いて) 得る。さらに C と C_2 の Thomae の公式に関する absolute constant 同士の関係式が得られるので、absolute constant が決定は marked binary tree が inner vertex が 1 個のものに完全に分解されてしまったとき、すなわち $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ を虚数乗法にもつ楕円曲線の時に帰着される。この時は、この公式は Chowla-Selberg の公式に帰着される。

References

[BR] Bershadsky, M. and Radul, A.: Conformal field theories with additional Z_N symmetry, Int. J. Mod. Phys., A2-1 (1987), 165–178.

[F] Fay, J.: *Theta functions on Riemann surfaces,* Lecture note in Math 352. Springer, Berlin-New York, 1973.

[M] Mumford, D.: *Tata lectures on Theta II,* progress in Math 43. Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1984.

[N] Nakayashiki, A.: On the Thomae formula for Z_N curves, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 33 (1997), no. 6, 987–1015

[T] Thomae, J.: Beitrag zur Bestimmung von $\theta(0,\ldots,0)$ durch die Klassenmoduln algebraischer Functionen, J. Für Die reine und angw. Math., Bd. 71 (1870), 201–222.