

QCD相図の非一様カイラル相転移におけるクォーク
質量および量子-熱揺らぎの効果について

京都大学原子核理論研究室

柄澤 真太郎

概要

量子色力学 (QCD) によって記述される多体系の物理は、クォーク・グルーオンプラズマやコンパクト天体内部といった様々な物理現象で支配的であり、その相構造の解明は理論的・実験的両側面において重要である。量子色力学の特徴的な性質として、カイラル対称性の自発的破れが挙げられる。近年 QCD 相図研究において、カイラル非一様相と呼ばれる、空間的異方性を持った秩序変数で特徴づけられた相の存在が示唆され、活発に研究が進められている。これまでの研究から、外部磁場無し・カイラル極限といった下で、平均場近似での計算により、低温・中密度領域においてカイラル非一様相が出現することが知られている。しかし、このような単純化された系での議論では、カイラル非一様相の理解が十分に得られたとは言いがたい。そこで本論文では、より多様な角度からカイラル非一様相の性質を調べることで、その理解を深める試みについて議論する。

まず始めに、裸のクォーク質量が存在する系におけるカイラル非一様相の性質について考察する。カイラル極限の場合、カイラル対称性が自発的に破れた相では熱力学関数がワインボトル型となる為、系の基底状態はカイラル円周と呼ばれる無数の等価な最小点の任意の 1 点で与えられる。一方クォーク質量が有限である場合、系の基底状態はカイラル円周の特定の 1 点で与えられる。この違いにより、空間非一様な秩序変数 (非一様構造) に定性的な差が現れる。具体的には、カイラル極限の場合カイラル円周に等価に巻き付くような関数形であった非一様構造が、カイラル円周の最小点に偏在化して巻き付く非一様構造へと変化する。従って、有限質量効果はカイラル非一様相の構造を定性的に変化させると考えられる。実際本研究では、カイラル非一様相内で非一様構造は温度の上昇と共に単調に偏在化していくことを示す。また相転移の次数について、カイラル極限では非一様・回復相間の相転移線 (終境界線) の次数は 2 次であったが、有限質量効果によって 1 次相転移へと変化することを示す。

続いて、非一様カイラル相転移における、揺らぎの効果について考察する。これまで凝縮系物理学やパイオン凝縮の研究において、秩序変数の量子または熱揺らぎの効果が相転移の次数を 2 次から 1 次へと変化させることが知られている。一方カイラル非一様相の研究においては、典型的な非一様構造に対して終境界線は 2 次相転移であることが知られているものの、これまで揺らぎの効果は十分に議論されてこなかった。相境界上ではその転移の次数に応じて得られる物理的応答が変化するので、カイラル相転移の次数を正しく理解することは重要である。そこで本研究では先行研究で用いられた手法をさらに発展させ、量子-熱揺らぎの効果を同時に考慮する手法を開発し、具体的に非一様カイラル相転移の次数の定性的・定量的変化について議論する。結果、量子-熱揺らぎの効果によって終境界線は 2 次相転移から 1 次相転移へと変化し、また非一様相の領域が減少することを示す。

目次

第 1 章	はじめに	1
第 2 章	Nambu-Jona-Lasinio 模型	6
2.1	カイラル対称性の自発的破れ	7
2.2	T - μ 平面上での一様な QCD 相図	9
第 3 章	カイラル非一様相に関する初期的研究	11
3.1	1 + 1 次元系での非一様構造	12
3.1.1	Real Kink Crystal	13
3.1.2	Dual Chiral Density Wave	14
3.1.3	Complex Kink Crystal	15
3.2	1 + 3 次元中の非一様構造	16
3.2.1	低次元理論で得た非一様構造の 1 + 3 次元への埋め込み	16
3.2.2	いくつかの具体例	18
3.3	熱力学関数の直接計算を用いない非一様相の解析	22
3.3.1	Generalized Ginzburg-Landau 理論を用いた解析	22
3.3.2	相関関数を用いた解析	23
第 4 章	外部磁場中でのカイラル非一様相	27
4.1	カイラルアノマリーに起因する非一様相の拡大	27
4.2	外部磁場中での一般的な非一様構造	30
4.2.1	熱力学関数の表式	31
4.2.2	数値計算結果および議論	33
第 5 章	有限クォーク質量効果を取り入れたカイラル非一様相	38
5.1	変分法的アプローチ	40
5.1.1	非一様構造の決定	41
5.1.2	熱力学関数の表式	43
5.2	数値計算結果および議論	44
5.2.1	始境界線について	44

5.2.2	終境界線について	48
5.2.3	Dual Chiral Density Wave 相について	51
5.3	相関関数を用いた議論	54
第 6 章	量子-熱揺らぎの効果を取り入れたカイラル非一様相	58
6.1	量子および熱揺らぎの導入	60
6.1.1	伝播関数の表式	61
6.1.2	熱力学関数の表式	64
6.1.3	揺らぎの効果を検討した頂点関数	66
6.1.4	λ の決定について	72
6.2	数値計算結果および議論	73
6.2.1	一様-回復相転移について	73
6.2.2	非一様-回復相転移について	76
第 7 章	まとめと展望	84
付録 A	$\Pi_{ps}^0(\omega_n, \mathbf{q})$ の計算	88
付録 B	$T \rightarrow 0$ での $\Pi_{ps}^{0,med}$ の表式	90
付録 C	(6.1.19) 式における松原振動数の和	92

第1章 はじめに

量子色力学 (QCD) とは強い相互作用を記述する基礎理論 [1, 2] であり、理論・実験的両側面から活発に研究が進められている。QCD は局所的なカラー対称性 ($SU(N_c)$) および大域的なフレーバー対称性 ($SU(N_f)$) を持ち、そのラグランジアンはクォーク場 (ψ) およびゲージ (グルーオン) 場 A を用いて、以下のように与えられる：

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - M_q)\psi, \quad (1.0.1)$$

ここで M_q は各フレーバーの質量を表す行列である。また、 $a, b, c = 1, \dots, N_c^2 - 1$ ($A, B = 1, \dots, N_c$) は $SU(N_c)$ の基本 (随伴) 表現の添字を表し、ギリシャ文字 $\mu, \nu = 0, \dots, 3$ でローレンツベクトルの添字を表す。また、 $F_{\mu\nu}^a$ は曲率テンソルであり、次式で定義される：

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c,$$

ここで g および f_{abc} は理論の結合定数、 $SU(N_c)$ の構造定数をそれぞれ表している。最後に共変微分 $(D_\mu)_{AB}$ は次式で定義されている：

$$(D_\mu)_{AB} = \delta_{AB}\partial_\mu - i\frac{g}{2}(\lambda^a)_{AB}A_\mu^a,$$

ここで $(\lambda^a)_{AB}$ は $SU(N_c)$ の基本表現である ($N_c = 3$ ならば Gell-Mann 行列)。本論文は QCD の低エネルギー領域における熱力学的性質に関して主に議論する。従って、本論文ではカラーおよびフレーバー数として $N_c = 3, N_f = 2$ を選ぶ。

QCD はそのシンプルなラグランジアンにも関わらず、多様な興味深い物理現象を記述する。QCD を理解するための実験的アプローチとしては様々な手法が確立している。まず挙げられるのは低エネルギー散乱実験を用いたハドロンの性質の解明である。ハドロンはクォークおよびグルーオンから構成される複合粒子と考えられている為、QCD の低エネルギー励起状態を解明する為に重要であると考えられる。また、高エネルギー重イオン衝突実験を通じた高温領域における QCD の凝縮系物理学的側面の解明も意義深い。高温領域では閉じ込め・非閉じ込め相転移が起こり、クォークとグルーオンがプラズマ状態となっている (QGP) [3] ことが強く示唆されているが、このような系はビッグバン直後の初期宇宙にも存在していたと考えられており、QGP からもたらされる物理を理解することは自然を理解する上で重要である。さらには、中性子星などのコンパクト天体の冷却過程や超新星爆発、連星合体といっ

た実際に宇宙で起こるイベントの観測からも QCD を理解する試みが進められている [4]。例えば、中性子星のコア付近の温度・密度領域ではクォーク多体系が実現していると考えられ、そこから得られる情報は天体の状態方程式や冷却過程に影響を与えていることが期待されている。

一方、理論的には QCD は閉じ込め・非閉じ込め相転移によるクォーク・グルーオン自由度の解放や、カイラル対称性の自発的破れによる南部-ゴールドストーン (NG) 粒子の出現、アノマリーに起因する対称性の量子効果による破れなどを中心に、QCD の真空の含めた熱力学的側面の解明が進められている。QCD を解明するということは、端的に言えば、QCD のエネルギースペクトルを非摂動的に求め、その系の時間発展を把握できるようになるということである。しかしながら、現時点では系の時間発展を追うことはおろか、QCD のエネルギースペクトルを求めることも極めて困難である。QCD は理論の非可換ゲージ理論であるために、漸近的自由な理論であることが知られている [5,6]。以上で挙げた理論的に興味深い現象は比較的低エネルギー領域で起こる為、理論の結合定数が大きく摂動的計算ですら破綻してしまう。さらには、以上で挙げたような実験・観測から得られる QCD の情報は摂動計算が困難なエネルギー領域と対応している。従って、何らかの形で計算の困難さを回避する手法が必要であると言える。

この問題を克服する一つの方法としては、大規模数値計算を通じて QCD の分配関数を第一原理的に計算してしまう、格子 QCD が挙げられる [7,8]。しかしながら、格子 QCD による計算は低温・高密度領域では符号問題と呼ばれる困難が生じることが知られており [9,10]、今のところ根本的な解決には至っていない。特に本研究で主に議論する物理現象は、この問題が厳しく出現する領域で観測されると考えられている為、異なるアプローチが必要である。

次善の策の一つとしては、QCD の特定の側面を記述する有効模型を用いた解析が挙げられる。本論文では、カイラル対称性およびその自発的破れに関連する物理現象を主たる研究対象としている。これを記述する有効模型として、例えば南部-Jona-Lasinio (NJL) 模型が知られている [11]。NJL 模型は、QCD との対応関係は完全に解明された訳ではないものの、(1.0.1) 式においてグルーオン自由度を積分することにより得られる模型であると解釈されており、QCD の低エネルギー領域におけるカイラル対称性の自発的破れに起因する現象を良く記述することが知られている [12,13]。NJL 模型は特定の近似の下で分配関数を解析的に計算することが可能である為、これを用いて QCD 相図を有効的に求めることが可能である。

図 1.1 は特定の簡単化された系を用いて描いた QCD 相構造を表す概略図である。水色の斜線領域はカイラル対称性が自発的に破れている相であり、茶色の領域はカイラル対称性が回復した相である。また、先に挙げたような実験・観測的アプローチはそれぞれ図 1.1 に記されているような領域と理論的に対応している。例えば、QGP や初期宇宙は高温、低-中密度領域で実現していると考えられており、ハドロン散乱実験で生成される核物質は低温、低密

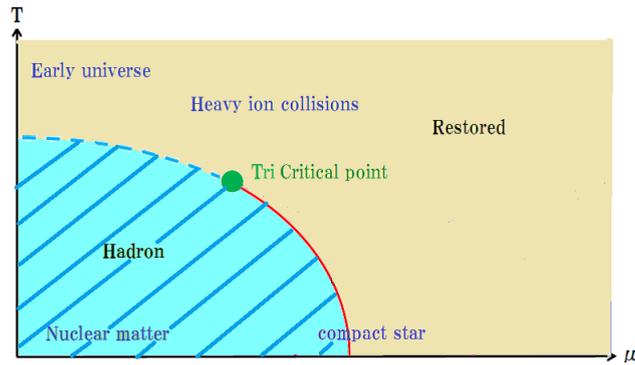


図 1.1: 温度 (T)-バリオン数化学ポテンシャル (μ) 平面上の一様な QCD 相図。赤実線および青点線はカイラル対称性の自発的破れに関する 1 次および 2 次相転移線をそれぞれ表す。緑点は 3 重臨界点 (TCP) と呼ばれる 2 次相転移点を表す。

度領域に対応すると考えられている。また、コンパクト天体のコア部分は低温、中密度領域に相当すると考えられている。

図 1.1 で記述される QCD 相図は、様々な制限の下で与えられていることに注意する。QCD 相構造の研究は様々な新しい視点を取り入れ、活発に進展している。例えば、クォーク対が凝縮系物理学における Cooper 対のように凝縮することで特徴づけられるカラー超伝導 [14, 15] の研究が挙げられる。さらに、モデルを改良することで、より現実の QCD 相図へと近づける試みもある。例えば、カラー閉じ込めの効果を有効的に NJL 模型に取り入れることで構成される Polyakov loop extended NJL (PNJL) 模型 [16] などは新たな進展と言える。

近年の QCD 相構造研究の大きな進展として、秩序変数の空間的異方性を考慮した QCD 相図の拡張が挙げられる。図 1.1 は様々な制限の下で描かれていると述べたが、その状況の一つとして「秩序変数は空間的に一様である」という前提がある。本来、このような前提を定める必然性は特に無く、空間的異方性を考慮した秩序変数を用いて QCD 相図を再構築することは、理論的に意義深い。実際、物性物理学では秩序変数が空間的異方性を持つ相 (非一様相) が様々な物理系において現れることが確認されており、活発に研究が進められている。例えば、Cooper 対が運動量を持つような Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov (FFLO) 超伝導 [17, 18] や、電子のスピン密度や電荷密度が周期的に変調した秩序状態を持つスピン密度波 [19, 20] や電荷密度波 [21] などが良く知られている。本論文では、これらの研究の本質である非一様性の概念を QCD におけるカイラル対称性の自発的破れに導入し、QCD 相図に対する新たな知見を得る。

図 1.2 は秩序変数の非一様性を考慮した QCD 相構造を表す概略図である。図の赤色の縦線領域は非一様なカイラル秩序変数が熱力学的に優位である相であり、カイラル非一様相と呼ばれる。カイラル非一様相は低温、中密度領域に現れるため符号問題が厳しく、従って有

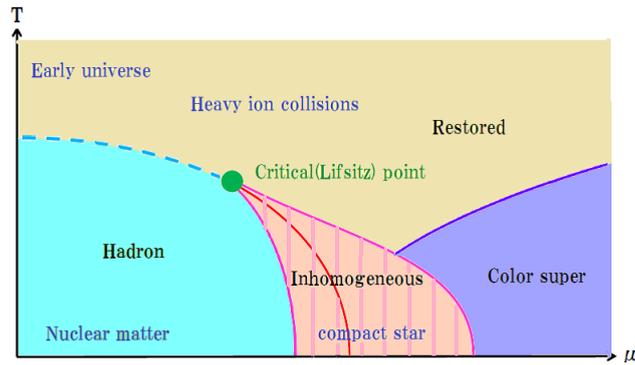


図 1.2: 秩序変数の非一様性を考慮した温度 (T)-化学ポテンシャル (μ) 平面上の QCD 相図。赤実線および青点線は図 1.1 と同様。ピンク実線はカイラル非一様相の相境界。緑点は一様凝縮・非一様凝縮・回復相の共存する 3 重点であり、Lifshitz 点と呼ばれる。

効模型を用いた計算が(少なくとも現時点では)必要とされる。また、カイラル非一様相における一様相-非一様相および非一様相-回復相の相境界(始境界線および終境界線)の終点は図 1.1 における TCP と共通しており、この点は Lifshitz 点 (LP) と呼ばれている。

カイラル非一様相から得られる物理的知見は、様々な実験・観測に特徴的な示唆を与える。例えば、図 1.2 はカイラル非一様相がコンパクト天体のコア部分において実現することを示唆しているが、非一様性に起因するコンパクト天体の冷却過程が理論的に予言されている [22]。さらには、高エネルギー重イオン衝突後のハドロン化の過程は TCP の下方を通過する可能性があるが、その際非一様性に起因するクォーク数感受率の特徴的な振る舞いが示唆されている [23]。以上の観点から、カイラル非一様相の研究は QCD 相構造の実験的解明に対しても大きな影響を与えることが理解できる。

しかしながら、これまでの研究から非一様カイラル相転移の全貌が明らかにされたとは言い難い。以上の先行研究は荷電対称・外部電磁場無し・カイラル極限の前提の下で得られた結果であり、また相図の計算自体も平均場近似 (MFA) の下で行われていることに注意する。物質の性質を明らかにする際には、例えば系に電磁場を与えてその応答を調べるといった手法が取られるだろう。同様に考えると、非一様カイラル相研究においては、簡単化された理論的枠組みを本質的に発展させることで、その定性的および定量的変化を通じてカイラル非一様相への理解を深めることが重要である。

試みの 1 つとしては、外部磁場を系に導入することが挙げられる。外部磁場の存在はクォークの運動方程式 (EOM) を変化させ、結果クォークのエネルギースペクトルは Landau レベルを構成し離散化される。外部磁場の影響はゼロ温度の場合に Frolov らによって初めて議論され、磁場の存在によってカイラル非一様相が大きく広がることが示された [24]。一方我々は磁場の存在によって最低 Landau 準位に非一様性に起因する非対称性が現れることに着目し、

カイラルアノマリーによって異常なクォーク粒子数密度が出現すること、この寄与が新たなLPを出現させることを示した [25]。さらに我々は Frolov らの議論をさらに発展させ、より一般の非一様構造の関数形を用いて μ - B 平面上の QCD 相図を構築した [26]。このように、外部磁場の存在はカイラル非一様相の性質を定性的に変化させる。従って、 T - μ - B 平面上でのカイラル非一様相構造を解明することは、非一様カイラル相転移の物理の理解を進める上で重要な課題である。他の試みとしては、Iwata らによる荷電非対称性を考慮したカイラル非一様相の議論が挙げられる [27]。Iwata らは LP 付近の解析を行うことにより、アイソスピン非対称性が新たな非一様相および臨界点を誘起することを示した。

本論文ではカイラル非一様相の理論的知見を得る新たな試みとして、有限の裸のクォーク質量 (current quark mass) を持つような系について議論し [28]、さらに MFA を超えた取扱いとして、量子-熱揺らぎが QCD 相図へ与える影響を議論する [29]。

本論文は以下の構成で議論を進める。第2章では QCD の有効模型として、NJL 模型の持つ基本的性質および熱力学をレビューする。第3章ではカイラル非一様相研究の導入として、単純化された系におけるカイラル非一様相の基本的性質および熱力学をレビューする。第4章では、外部磁場が存在する系におけるカイラル非一様相について議論する。特に、このような系ではカイラルアノマリーに起因して非一様相の領域が大きく拡大することを、解析的・数値的両側面から議論する。第5章では、current quark mass の存在によるカイラル非一様構造の変化について議論する。特に、質量項の存在によって非一様構造の関数形が変化すること、また熱力学的特徴が定性的に変化することを見る。第6章では、秩序変数の量子-熱揺らぎがカイラル非一様相に与える効果について議論する。特に、これらの揺らぎの効果は終境界線の相転移の次数を変化させ、さらにその相境界の位置を変化させることを見る。

第2章 Nambu-Jona-Lasinio 模型

本章では QCD のカイラル対称性を尊重した有効模型として、NJL 模型の基本的性質およびその熱力学をレビューする [12, 13]。前章で述べたように、カイラル非一様相は QCD の直接計算が困難な領域で出現することが示唆されている。従って、有効模型を用いた計算が主たる解析手法となるが、本論文では主に NJL 模型を用いて議論を進める。

まず始めに QCD の対称性の議論から NJL 模型の持つべきラグランジアンについて議論する。出発点は $N_c = 3, N_f = 2$ の QCD ラグランジアン ((1.0.1) 式) である。(1.0.1) 式はカイラル極限では以下のような左手/右手系クォークの大域的 $SU(2)_{L/R}$ 回転に関して不変であることに注意する：

$$\psi_{L/R} \rightarrow \exp\left(-i\theta_{L/R}^a \frac{\tau^a}{2} - i\delta_{L/R}\right) \psi_{L/R},$$

ここで $\psi_{L/R}$ は左手/右手系のクォーク場を表し、 $\tau^a (a = 1, \dots, 3)$ は $SU(2)_{L/R}$ の生成子である。また $\theta_{L/R}^a (\delta_{L/R})$ は $SU(2)_{L/R} (U(1)_{L/R})$ の回転角を表している。以上から、QCD の持つ大域的対称性は $SU(2)_L \times U(1)_L \times SU(2)_R \times U(1)_R$ であることが分かった。ここで、 $U(1)_L \times U(1)_R$ は軸性アノマリーに起因するインスタントンの効果によって $U(1)_V$ に破れていることに注意 (ここで添え字 V は左手/右手系を同時に回転させるベクトル的変換を意味している) [30]。同様に、 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ は、後に見るように、特定の条件下ではカイラル対称性の自発的破れが起こり $SU(2)_V$ のみが対称性として残る。

以上で見た QCD の大域的対称性を尊重した有効模型を構成する。我々はカイラル対称性とその自発的破れに興味があるが、これらクォークの持つ対称性に起因する量であることに注意する。従って、有効模型のラグランジアンはクォーク自由度のみによって構成されれば良い、このことは即ち QCD ラグランジアンからグルーオン自由度を積分してしまったものと解釈される。左手/右手系のクォークの変換性の下で不変になるようなラグランジアンは、カイラル極限の場合最も簡単な形としては次のように与えられる：

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\psi}i\not{\partial}\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau\psi)^2]. \quad (2.0.1)$$

ここで G は任意の定数であり、クォークの 4 点接触相互作用の強さを表す結合定数である。カイラル対称性が自発的に破れた場合、南部-ゴールドストーン (NG) 定理により 0 質量 NG 粒子が現れ、これはパイオンと呼ばれている。 G の値は真空中での構成子クォーク質量やパ

イオン崩壊定数を基に決定される。また、クォークの質量項を考慮する場合、ラグランジ안의表式は以下の通り：

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\psi}(i\partial - M_q)\psi + G[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau\psi)^2]. \quad (2.0.2)$$

(2.0.2) 式では質量項の存在の為にカイラル対称性はあらわに破れていることに注意する。従って、カイラル極限の場合と異なり、NG 粒子はもはや近似的であり、実際有限質量となって現れる。実際、パイオンは真空中で 138MeV と有限質量を持つことが知られている。

我々はカイラル対称性の自発的破れに興味がある為、以下では簡単のため $SU(2)_V, SU(2)_A$ を用いて $SU(2)_L \times SU(2)_R \sim SU(2)_V \times SU(2)_A$ と書く。ここで $SU(2)_V (SU(2)_V)$ はアイソスピン (カイラル) 対称性をそれぞれ表している。アイソスピン (カイラル) 変換によってクォークは $\psi \rightarrow \exp(i\theta_V^a \tau^a / 2)\psi$ ($\psi \rightarrow \exp(i\gamma_5 \theta_A^a \tau^a / 2)\psi$) と変換される。最後に、以上の記法はあくまで簡便的なものであり、群論的には正しくはないことに注意する。何故ならば、 $SU(2)_A$ は変換に関して閉じていないからである。

2.1 カイラル対称性の自発的破れ

ラグランジアンが構成できたので、カイラル対称性の自発的破れについて議論する。本節ではまずは導入として真空 ($T = \mu = 0$) に関して議論する。NG 定理により、カイラル対称性の秩序変数は $SU(2)_A$ の変換の生成子と非可換な演算子の真空期待値 (VEV) として同定されることに注意。簡単な計算により、クォークの双 1 次形式の期待値 $\langle \psi\bar{\psi} \rangle$ および $\langle \psi i\gamma_5 \tau_a \psi \rangle$ がこれに該当することが分かる。

NJL 模型はクォーク自由度で記述された理論であるため、ボソンの演算子の期待値を直接計算することには不向きである。以下では理論をボソンの自由度で書き換える。NJL 模型の生成汎関数は以下のように与えられる：

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{NJL}} \right]. \quad (2.1.1)$$

理論をボソン化する為に補助場 (ϕ'_0, ϕ'_a) を導入し、生成汎関数に以下の恒等式を挿入する：

$$1 = \int \mathcal{D}\phi'_0 \mathcal{D}\phi'_a \exp \left[i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4G} (\phi'_0(x)^2 + \phi'_a(x)^2) \right\} \right].$$

汎関数積分は積分する場の定関数シフトに関して不変であるので、 $\phi'_0 \rightarrow \phi_0 + 2G\bar{\psi}\psi$, $\phi'_a \rightarrow \phi_a + 2G\bar{\psi}i\gamma_5\tau_a\psi$ と場を再定義する。生成汎関数の表式は

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\phi_0 \mathcal{D}\phi_a \exp \left[i \int d^4x \left\{ \bar{\psi}i\partial\psi - \frac{1}{4G} (\phi_0^2 + \phi_a^2) - \bar{\psi}(\phi_0 + i\gamma_5\tau_a\phi_a)\psi \right\} \right]. \quad (2.1.2)$$

となる。 $\phi_0(x), \phi_a(x)$ に関する EOM から、これらは秩序変数と関係する量であることが分かる； $\phi_0 = -2G\bar{\psi}\psi$, $\phi_a = -2G\bar{\psi}i\gamma_5\tau_a\psi$ 。従って、以下では $\phi_0(x), \phi_a(x)$ の VEV が有限に存在するか否かでカイラル対称性の自発的破れを判定する。(2.1.2) 式はクォーク場に関して双 1 次形式になっているので、クォーク場に関しては汎関数積分をあらわに実行できる：

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi_0 \mathcal{D}\phi_a \exp[iN_f N_c S], \quad (2.1.3)$$

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4G}(\phi_0^2 + \phi_a^2) \right] - i \log \text{Det}[i\cancel{\partial} - (\phi_0 + i\gamma_5\tau_a\phi_a)].$$

ここで S は $\phi_0(x), \phi_a(x)$ に関する有効作用である。クォーク自由度が積分されたため、生成汎関数はもはやボソン自由度のみで与えられていることに注意。一般的に、フェルミオン 4 点相互作用を持つ理論をボソンの自由度のみで書き換える手続きは Hubbard-Stratonovich 変換と呼ばれ [31,32]、主に凝縮系物理学の分野などで広く用いられている。しかしながら、(2.1.3) 式をボソン自由度に関して解析的に解くことは依然として難しい。ここでは MFA を (2.1.3) 式に用いて計算を進める。さらに冒頭で述べたように、本章では一様な凝縮に限定して議論を進める。即ち、 $\phi_0(x), \phi_a(x)$ の VEV は空間的異方性を持たないとする： $\langle\phi_0(x)\rangle = \phi_0, \langle\phi_a(x)\rangle = \phi_a$ 。以上の下で、有効ポテンシャルの表式を次のように得る：

$$V_{\text{eff}}(\phi_0, \phi_a) = \frac{1}{4G}(\phi_0^2 + \phi_a^2) + 2iN_f N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \log(\phi_0^2 + \phi_a^2 - p^2). \quad (2.1.4)$$

(2.1.4) 式は $\phi_0^2 + \phi_a^2$ の関数で与えられている為、 $\phi_0^2 + \phi_a^2 = \text{const.}$ (chiral surface と呼ばれる) を守るような変換に関して値を変えないことに注意。このような変換は $SU(2)_A$ 変換に対応している。もし有効ポテンシャルが $\phi_0 = \phi_a = 0$ で最小値を取るならば、真空はこの点で与えられるので $SU(2)_A$ 変換に関して真空は不変である。従って、この場合カイラル対称性は保たれている。一方で、もし有効ポテンシャルがワインボトル型をしている、つまり $\phi_0^2 + \phi_a^2 \neq 0$ で最小値を取る場合、系は無数個の縮退した真空を持ち、またこれらは $SU(2)_A$ 変換によって互いに移り変わりあう。従って、この場合カイラル対称性は自発的に破れており、chiral surface に平行なソフトモードが存在する。このような 0 質量モードがパイオンであり、一方 chiral surface に垂直な振動モードに対応する有限質量粒子がシグマメソンである。以下では簡単の為荷電中性を要請する ($\phi_1 = \phi_2 = 0$)。また、縮退した真空はどれも等価であるので、特に $\phi_0 = 0$ としても一般性は失われない。(2.1.2) を見れば分かるように、 ϕ_0 は対称性の自発的破れによって得られた構成子クォーク質量に対応している。これをあらわに示すため、以下では $\phi_0 = m$ と表す。以上の準備の下で (2.1.4) 式の積分を実行すると

$$V_{\text{eff}} = -2N_f N_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{p^2 + m^2} + \frac{1}{4G} m^2. \quad (2.1.5)$$

を得る。(2.1.5) 式の右辺第 1 項は Dirac の海からの寄与を表す項であるが、この積分は発散している。NJL 模型は繰り込み不可能な模型であるため、理論の適応限界であるカットオフ

を人為的に導入する必要がある。ここでは以下のような3次元運動量切断を導入する：

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{p^2 + m^2} \rightarrow \int^{p^2 \leq \Lambda^2} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{p^2 + m^2}.$$

ここで Λ は理論のカットオフである。このとき有効ポテンシャルは解析的に積分を実行することができる。結果は

$$\frac{V_{\text{eff}}}{\Lambda^4} = -\frac{3}{2\pi^2} + \frac{m^2}{2} \left[\frac{1}{G^2} - \frac{3}{\pi^2} \right] + \mathcal{O}(m^4 \log m). \quad (2.1.6)$$

である。(2.1.6)式において、 $\mathcal{O}(m^2)$ 項の係数の符号によって、有効ポテンシャルの最小値を与える m の値が変化することに注意。 $G > 3/\pi^2$ が満たされる場合、有限の m で有効ポテンシャルは最小値を与える。即ち有効ポテンシャルは無限の縮退した真空を持ち、カイラル対称性は自発的に破れている。

2.2 T - μ 平面上での一様なQCD相図

本節では有限温度-化学ポテンシャルでの一様なQCD相図について議論する。真空で定義された理論を有限温度-化学ポテンシャルに拡張する手法はいくつかあるが、本論文では平衡系を扱うので、最も簡単に議論できる虚時間法を用いて議論を進める。

始めに理論を有限温度系へ拡張する。まずは時間方向に虚時間 $\tau \equiv it$ を導入し、積分領域を $\tau \in [0, \beta = 1/T]$ とする。ここで T は系の温度である。さらに、ボソン(フェルミオン)について、虚時間方向に(反)周期境界条件を課す。以上の手続きによって、生成汎関数は熱力学における分配関数として与えられる：

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[\text{fields}] \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right] \rightarrow \text{Tr} \int \mathcal{D}[\text{fields}] \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E \right].$$

ボソンまたはフェルミオンの境界条件によって、虚時間方向に関するFourier変換は離散化され、これは松原周波数と呼ばれる：

$$\omega_n = \begin{cases} 2n\pi T & (\text{Boson}) \\ (2n+1)\pi T & (\text{Fermion}) \end{cases},$$

この操作により、エネルギー方向の積分は松原周波数に関する無限和で置き換えられる。

次に有限化学ポテンシャルへの拡張を考える。化学ポテンシャルは粒子数(N)に関して熱力学的に双対な量であり、この効果はハミルトニアンに次のように与えられる： $\tilde{\mathcal{H}} = -\mu N$ 。QCDにおいて粒子数演算子は $N = \psi^\dagger \psi = \gamma_0 \bar{\psi} \psi$ で与えられるので、 μ を理論に導入する為にはラグランジアンを次のように変形すればよい：

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \mu \bar{\psi} \gamma_0 \psi.$$

以上の拡張を考慮して一様な場合のカイラル極限での熱力学関数の表式を求めると

$$\frac{\Omega}{V} = \frac{N_f N_c}{8\pi^2} \int_1^\infty \frac{dx}{x^3} e^{-M^2 x} + \frac{M^2}{4G} - \frac{N_f N_c T}{\pi^2} \int_0^\infty dy y^2 \left[\log(e^{-\beta(\sqrt{y^2+M^2}-\mu)} + 1) + \log(e^{-\beta(\sqrt{y^2+M^2}+\mu)} + 1) \right]. \quad (2.2.1)$$

を得る。ここで V は系の体積を表している。(2.2.1) 式では松原周波数に関する和をあらわに実行していることに注意 [33]。また、右辺第一項は真空からの寄与を表しているが、真空の場合と同様発散を除去する為に正則化を行っている。ここでは後の便利の為、proper time regularization (PTR) [34] を真空部分に用いている。以上は全てカイラル極限に限って議論をしたが、current quark mass が存在する場合でも全く同様に計算できる。

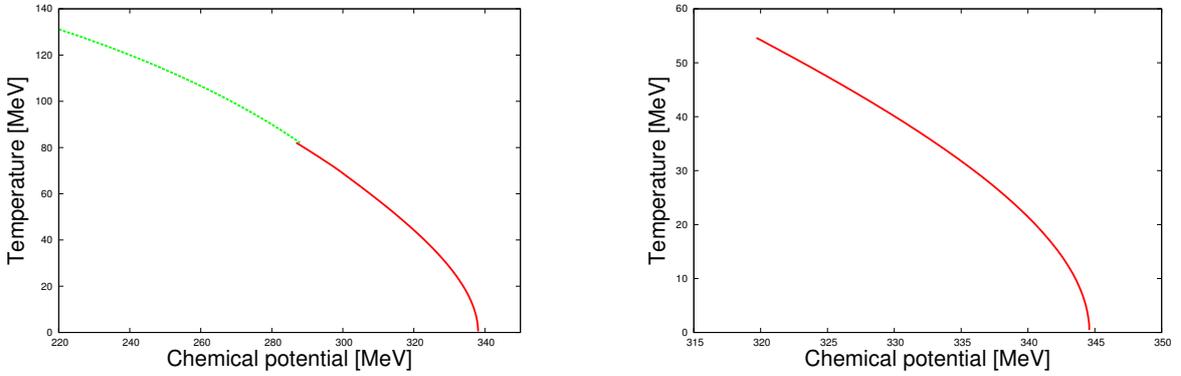


図 2.1: T - μ 平面上での QCD 相図 (左 : カイラル極限、右 : $m_c = 5\text{MeV}$)。

図 2.1 は一様相に限った場合の T - μ 平面上の QCD 相図である。赤線 (実線) は 1 次相転移線、緑線 (点線) は 2 次相転移線を表している。カイラル極限の場合、赤線と緑線の交点は TCP を表している。一方、current quark mass が有限の場合、2 次相転移線は失われ、クロスオーバーになる。このとき、1 次相転移線の終点は臨界終点 (CEP) と呼ばれる 2 次相転移点となる。

第3章 カイラル非一様相に関する初期的研究

第2章で行われた議論は全て、秩序変数が空間的に一様な定数であるという前提の下で行われてきた。しかしながら、導入でも述べたように、秩序変数が一様である必然性は存在しない。実際、物性物理学の分野では非一様な秩序変数によって特徴づけられた物理系が存在するし、以下で見るように QCD 相図研究においてもカイラル非一様相が一様相-回復相の相境界における低温・中密度領域に現れることが分かる。

本章では、カイラル非一様相研究の導入として、議論を簡単化するいくつかの制限を課した上で、カイラル非一様相の性質およびその熱力学に関してレビューする [35]。以下では議論を簡単化する制限として、アイソスピン対称・外部電磁場無し・カイラル極限を系に課し、かつ計算は全て MFA の下で行う。カイラル非一様相が出現する領域は符号問題が厳しいため、NJL 模型のような QCD の有効模型を用いて議論を進める。

上述の制限の下での 1+3 次元の NJL 模型のラグランジアンは (2.0.1) 式で与えられ、これを Hubbard-Stratonovich 変換を用いてボソン化された生成汎関数は (2.1.3) 式で与えられている。ここで、一般化されたカイラル対称性の秩序変数を以下のように定義する：

$$\begin{aligned}\Phi(x) &\equiv \langle\phi_0(x)\rangle + i\langle\phi_3(x)\rangle \equiv \Delta(x)e^{i\theta(x)}, \\ \langle\phi_1(x)\rangle &= \langle\phi_2(x)\rangle = 0.\end{aligned}$$

ここで荷電対称性を課している為、 ϕ_1, ϕ_2 に関しては VEV は消えている。また、 $\Delta(x)$ および $\theta(x)$ は非一様構造の振幅および位相にそれぞれ対応している。以上の記法において、MFA の下での熱力学関数の表式は以下の通り：

$$\Omega_{\text{MF}} = -T \text{Tr} \text{Log} \left[\not{p} + \mu\gamma_0 + \frac{1}{2}(1 + \gamma_5\tau_3)\Phi + \frac{1}{2}(1 - \gamma_5\tau_3)\Phi^* \right] + \frac{1}{4G} \int d^4x |\Phi(x)|^2. \quad (3.0.1)$$

非一様な秩序変数は任意の関数形を持つことはできないことに注意。(3.0.1) 式の EOM の解となるような $\Phi(x)$ のみを取り得る関数形として許される：

$$\frac{\delta\Omega_{\text{MF}}}{\delta\Phi(x)} = 0. \quad (3.0.2)$$

EOM の解には例えば構成子クォーク質量といった、いくつかの任意定数が含まれている。これらの得られた非一様構造の関数形で張られる関数空間に関して Ω_{MF} を各 T, μ ごとに最小化することで、非一様構造を考慮に入れた QCD 相図を求めることができる。

当然ながら、(3.0.2) 式は汎関数微分方程式であるため、解析的に解くことは容易ではない。先駆的な研究として、Nakano-Tatsumi によって (3.0.2) 式を満たす非一様構造の解が発見的に求められた [36,37]。彼らによって導出された非一様構造は Dual Chiral Density Wave(DCDW) と呼ばれている。その後、NJL₂(1+1次元での NJL 模型)におけるより一般的な非一様構造の関数形が Basar らによって導出された [38–40]。彼らの研究に関しては Sec. 3.1 でレビューする。NJL₂ はあくまで 1+1 次元系での理論であり、同様の議論が 1+3 次元において成立するか否かは非自明である。Nickel は NJL₂ で得られた非一様構造を 1+3 次元における NJL 模型に「埋め込む」手法を開発した [41]。実際、NJL₂ における解を埋め込むことにより、1+1 次元での解の 1 つと DCDW とが対応していることが分かる。彼の研究に関しては Sec. 3.2 でレビューする。

以上の議論は全て熱力学関数の直接的な計算によって導出されているが、これ以外にも特定の模型に依存しないような手法が存在する。1 つは generalized Ginzburg-Landau (gGL) 理論を用いたアプローチである。この手法は、LP 付近のカイラル非一様相の性質を研究する際に、有効な手法であることが知られている [42]。本手法では熱力学関数の関数形を理論の持つ対称性のみから決定する為、模型の詳細に依存せずに議論できることに注意する。もう 1 つは相関関数を用いたアプローチである。この手法では対称性が回復した相から相関関数の極の振る舞いを調べ、これを非一様相側へ外挿していくことにより終境界線を決定する [37,43,44]。これらの手法に関しては Sec. 3.3 で議論する。

3.1 1 + 1 次元系での非一様構造

本節では NJL₂ での非一様構造の決定法についてレビューする [38–40]。ここでは簡単の為 $N_f = 1$ として議論する。NJL₂ のラグランジアンは以下のように与えられる：

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}_2} = \bar{\psi}_2 i \not{\partial} \psi_2 + G[(\bar{\psi}_2 \psi_2)^2 + (\bar{\psi}_2 i \gamma_5 \psi_2)^2], \quad (3.1.1)$$

ここで ψ_2 は 1+1 次元におけるクォーク場を表している。また、1+1 次元系ではガンマ行列 γ_μ は Pauli 行列で与えられる。具体的には $\gamma^0 = \sigma_1, \gamma^1 = -i\sigma_2, \gamma_5 = \sigma_3$ となる。1+3 次元の場合と同様に一般化されたカイラル対称性の秩序変数を次のように定義する：

$$\Phi_2(x) = -2G(\langle \bar{\psi}_2(x) \psi_2(x) \rangle - i \langle \bar{\psi}_2(x) i \gamma_5 \psi_2(x) \rangle) \equiv \Delta(x) e^{i\theta(x)}. \quad (3.1.2)$$

MFA の下で (3.1.1) 式は以下のように書き換えられる

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}_2}^{\text{MF}} = \bar{\psi}_2 [i \not{\partial} - \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \Phi_2(x) - \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \Phi_2^*(x)] \psi_2 - \frac{|\Phi_2(x)|^2}{4G}. \quad (3.1.3)$$

(3.1.3) 式はクォーク場に関して双 1 次形式になっているので、生成汎関数においてこれに関する汎関数積分を実行することができる。得られる有効作用の表式は

$$\mathcal{S}_{\text{NJL}_2}^{\text{MF}} = -iN_c \log \text{Det} \left[i\partial - \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Phi_2(x) - \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Phi_2^*(x) \right] - \frac{1}{4G} \int |\Phi_2(x)|^2. \quad (3.1.4)$$

である。 $\Phi_2(x)$ に関する EOM は $\delta S_{\text{NJL}_2}^{\text{MF}} / \delta \Phi_2(x) = 0$ より

$$\Phi_2(x) = -4iN_c G \frac{\delta}{\delta \Phi_2^*(x)} \log \text{Det} \left[i\partial - \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Phi_2(x) - \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Phi_2^*(x) \right]. \quad (3.1.5)$$

(3.1.5) 式を解析的に解くことは難しい。そこでまずは (3.1.3) 式の固有方程式からスタートする。この式は Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程式と呼ばれている [45]

$$H_{\text{NJL}_2}^{\text{MF}} \psi_2(x) = E \psi_2(x), \quad (3.1.6)$$

$$\begin{aligned} H_{\text{NJL}_2}^{\text{MF}} &= -i\gamma_5 \frac{d}{dx} + \gamma_0 \left[\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Phi_2(x) - \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Phi_2^*(x) \right] \\ &= \begin{pmatrix} -i\frac{d}{dx} & \Phi_2(x) \\ \Phi_2^*(x) & i\frac{d}{dx} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

非一様構造は (3.1.2) 式で定義されているので、これと (3.1.6) 式が自己無矛盾的に解ければ (Hartree-Fock (HF) 法)、我々は NJL_2 における MFA の下での一般的な非一様構造の関数形を知ることができる。

Basar らは適当な ansatz の下でレゾルベントの性質を用い [46, 47]、構造決定の方程式が Non Linear Schrödinger Equation (NLSE) [48] と呼ばれる方程式に帰着されることを示した。NLSE は Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) ヒエラルキー [49] の存在の為に、可解であることが知られている。以下では NLSE から得られるいくつかの基礎的な非一様構造について紹介する。AKNS ヒエラルキーを用いたより一般的な非一様構造の関数形に関しては、例えば [50–52] で議論されている。

3.1.1 Real Kink Crystal

RKC は NLSE の実解であり、振幅に関して有限の周期を持つ非一様構造である。凝縮系物理学において、RKC は polaron crystal [53–55] や、Larkin-Ovchinnikov タイプの超伝導 [18] などで現れる。RKC の具体的な関数形は以下のように与えられる：

$$\Phi_2(x) = \sqrt{\nu} \frac{2m}{1 + \sqrt{\nu}} \text{sn} \left(\frac{2m}{1 + \sqrt{\nu}} x; \nu \right), \quad (3.1.7)$$

ここで $\text{sn}(\dots)$ は Jacobi の楕円関数を表し、 $0 < \nu < 1$ は楕円関数の母数である。また、 $\text{sn}(x, \nu)$ は周期 $2\mathbf{K}(\nu)$ を持つ。ここで $\mathbf{K}(\nu)$ は第一種完全楕円積分である。

RKC の場合のクォークのエネルギースペクトルを図 3.1 に示した。RKC のスペクトルは $E = 0$ に関して対称であり、特にバンド構造を持つことに注意。 ν の増加に関してバンドの幅は単調に小さくなっている。

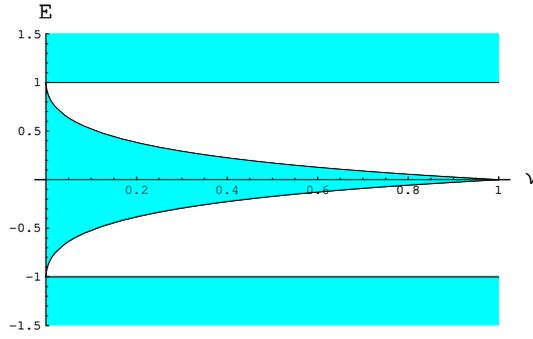


図 3.1: RKC におけるクォークのエネルギースペクトル [38]。横軸は ν を表している。

3.1.2 Dual Chiral Density Wave

DCDW は NLSE の複素解であり、位相に関して有限の周期を持つ非一様構造である。凝縮系物理学において、DCDW は Fulde-Ferrell タイプの超伝導 [17] やスピンまたは電荷密度波 [19–21] などで現れる。DCDW の具体的な関数形は以下のように与えられる：

$$\Phi_2(x) = me^{iqx}, \quad (3.1.8)$$

ここで m および q は非一様構造の振幅および波数をそれぞれ表している。DCDW の場合のクォークのエネルギースペクトルは以下の通り：

$$\text{tr}R = \frac{|E - q/2|}{\sqrt{m^2 - (E - q/2)^2}} \Rightarrow \rho(E) \neq 0 \Leftrightarrow |E - q/2| \geq m. \quad (3.1.9)$$

(3.1.9) を見れば分かるように、DCDW は一様構造のエネルギースペクトルを $q/2$ だけ定数シフトさせることで得られる。このことはクォーク場を以下のように局所的なカイラル回転を用いて再定義することによって理解される。

$$\Phi_2(x) \rightarrow e^{-iqx}\Phi_2(x), \quad \psi_2(x) \rightarrow e^{-iqx\gamma_5/2}\psi_2(x).$$

以上の変換により、DCDW はもはや一様構造へと変換されていることに注意。変換されたクォーク場は BdG 方程式 ((3.1.6) 式) の固有状態になっており、その固有値は $\psi_2(x)$ の固有値 E を用いて $E - q/2$ と書ける。結局、非一様構造における平面波的因子は、エネルギースペクトル全体を定数シフトすることに対応している。

3.1.3 Complex Kink Crystal

CKCはNLSEの複素解であり、振幅・位相両者に関して有限の周期を持つ非一様構造である。CKCの具体的な関数形は以下のように与えられる：

$$\begin{aligned} \Phi_2(x) &= -A(m, \theta, \nu) \frac{\sigma(A(m, \theta, \nu)x + i\mathbf{K}' - i\theta/2)}{\sigma(A(m, \theta, \nu)x + i\mathbf{K}')\sigma(i\theta/2)} \\ &\quad \times \exp[iA(m, \theta, \nu)x(-i\zeta(i\theta/2)) + \text{ins}(i\theta/2) + i\theta\zeta(i\mathbf{K}')/2], \quad (3.1.10) \\ A(m, \theta, \nu) &= -2\text{imsc}(i\theta/4)\text{nd}(i\theta/4), \end{aligned}$$

ここで $\text{sc} = \text{sn}/\text{cn}$, $\text{nd} = 1/\text{dn}$ であり、 sn , cn , dn は Jacobi の楕円関数である。また、 σ および ζ は Weierstrass のシグマおよびゼータ関数であり、 $\mathbf{K}'(\nu) = \mathbf{K}(1 - \nu)$ と定義している。 θ は CKC の winding angle を表し、 ν は楕円関数の母数であり、 m は振幅の最大値を表す。振幅の周期は $L = 2\mathbf{K}(\nu)/A(m, \theta, \nu)$ で与えられており、位相は L で周期的に変化する

$$\begin{aligned} \Phi_2(x + L) &= 2e^{2i\phi}\Phi_2(x), \\ \phi &= \mathbf{K}(-i\zeta(\theta/2) + \text{ins}(i\theta/2)) - \frac{\zeta(\mathbf{K}(\nu))\theta}{2\mathbf{K}(\nu)}. \end{aligned}$$

CKC の場合のクォークのエネルギースペクトルを図 3.2 に示した。図 3.2 から、エネルギースペクトルは $\theta = 2\mathbf{K}'(\nu)$ のとき $E = 0$ に関して対称であることが分かる。実際、直接的な計算により $\theta \rightarrow 2\mathbf{K}'(\nu)$ なる極限で CKC は RKC に帰着することが分かる。また、CKC も RKC と同様バンド構造を持つが、 $\nu \rightarrow 1$ の極限でバンドは 1 点のみの集合となる。1 点のみの集合は熱力学的には影響を与えないので、このとき CKC は一様構造と等価になる。

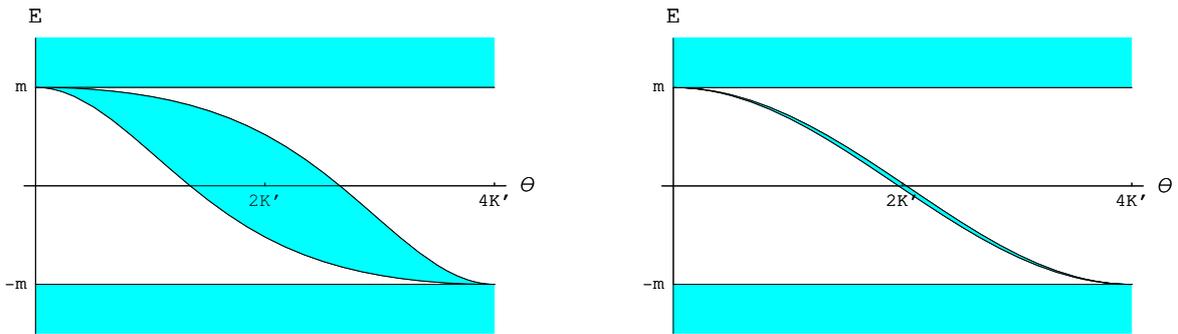


図 3.2: CKC のエネルギースペクトルを θ の関数として描いた [38]。左 (右) 図は $\nu = 0.1(0.9)$ の場合を表す。

最後に、以上の解は局所的なカイラル回転によって得られるエネルギースペクトルの定数シフトは、簡単の為無視していることに注意する。一般には DCDW のような位相因子を CKC に付け加えても再び NLSE の解となることが知られており、文献によっては位相因子を付け加えたものを CKC と呼ぶこともある。この場合、CKC は特定の極限の下で RKC・DCDW と一致する解となっていることが分かる。

3.2 1 + 3次元中の非一様構造

本節では低次元の理論で発見された非一様構造を1 + 3次元の理論へ「埋め込む」手法についてレビューする。この手法は Nickel によって開発され、1 + 2次元以下の理論の任意の $n (\leq 2)$ 次元の構造 (独立な空間 n 次元方向に空間変調した非一様構造) に対して一般に適用することができる [41]。本節では前節で得られた非一様構造を1 + 3次元に埋め込み、その熱力学的性質を議論することを念頭におく為、特に1 + 1次元の理論で得られた1次元の構造の埋め込みについて解説する。

3.2.1 低次元理論で得た非一様構造の1 + 3次元への埋め込み

始めに、1 + 1次元における非一様構造について、後の便利のために熱力学関数の表式およびギャップ方程式をあらわに書き下しておく。これまでと同様に、以下では NJL 模型を用いた解析を行う。(3.0.1) 式において、松原振動数に関する振動数をあらわに書けば

$$\Omega_{\text{MF}} = -\frac{TN_c}{V} \sum_n \text{Tr}_{D,f,V} \log \left(\frac{1}{T} \left(i\omega_n + \tilde{H}_{\text{MF}} - \mu \right) \right) + \frac{1}{4GV} \int_V d^3x |\Phi(\mathbf{x})|^2. \quad (3.2.1)$$

を得る。ここで V は系の体積を表し、 $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ ($n \in \mathbb{Z}$) はフェルミオンに関する松原振動数である。また \tilde{H}_{MF} は

$$\tilde{H}_{\text{MF}} = -i\gamma^0 \gamma^i \partial_i + \gamma^0 \left(\frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \tau_3) \Phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \tau_3) \Phi^*(\mathbf{x}) \right).$$

で与えられる。 \tilde{H}_{MF} は τ_3 の上下成分によってテンソル分解できる； $\tilde{H}_{\text{MF}} = H_{\text{MF},+} \otimes H_{\text{MF},-}$ 。クォークのエネルギースペクトルの集合を $\{E_n\}$ とすると、松原振動数の和を実行することで(3.2.1) 式は

$$\Omega_{\text{MF}} = -\frac{2TN_c}{V} \sum_{E_n} \ln \left(2 \cosh \left(\frac{E_n - \mu}{2T} \right) \right) + \frac{1}{4GV} \int_V d^3x |\Phi(\mathbf{x})|^2. \quad (3.2.2)$$

のように書き換えられる。

熱力学関数を具体的に計算する為には、エネルギースペクトルを具体的に求めなくてはならない。しかし、本章の冒頭でも述べたように、エネルギースペクトルは1 + 1次元の場合と1 + 3次元の場合で一般に異なる。実際、クォークのエネルギー固有状態に関して仮に z 方向の運動が同じであっても x, y 方向の運動が異なれば、それらの波動関数は異なった状態として分類されるだろう。そこで、本節では自己無撞着的な1次元の構造が得られた前提の下、Lorentz ブーストを用いて各 z 方向のエネルギー固有状態で $\{E_n\}$ を分類する。

以下で具体的に $\{E_n\}$ の分類法を述べる。Lorentz 変換の生成子を $S(\Lambda)$ とすると、4元運動量演算子 P^μ の変換性は

$$S(\Lambda)P^\mu S(\Lambda)^{-1} = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu.$$

である。ここで $P_\perp \equiv \sqrt{(P^x)^2 + (P^y)^2}$ とし、固有値を \mathbf{p}_\perp とする。明らかに P_\perp と \tilde{H}_{MF} は可換であるので、 $\psi_{\lambda, \mathbf{p}_\perp}$ をこれらの同時固有状態とすると、 $\psi_{\lambda, \mathbf{0}}$ は

$$\tilde{H}_{\text{MF}}\psi_{\lambda, \mathbf{0}} = \lambda\psi_{\lambda, \mathbf{0}}, \quad P_\perp\psi_{\lambda, \mathbf{0}} = 0,$$

を満たす。ここで λ は静止系におけるエネルギー固有状態を表す。Lorentz ブーストによってこれらの固有値は $(\lambda, \mathbf{0})$ から $(\lambda\sqrt{1 + \mathbf{p}_\perp^2/\lambda^2}, \mathbf{p}_\perp)$ へと移る。ここで $\psi_{\lambda\sqrt{1 + \mathbf{p}_\perp^2/\lambda^2}, \mathbf{p}_\perp}$ を

$$\psi_{\lambda\sqrt{1 + \mathbf{p}_\perp^2/\lambda^2}, \mathbf{p}_\perp} \equiv \left(\sqrt{1 + \mathbf{p}_\perp^2/\lambda^2} \right)^{-\frac{1}{2}} S^{-1}(\Lambda)\psi_{\lambda, \mathbf{0}}.$$

と定めると、これは P^μ の固有状態であり、その固有値は以下の通り：

$$P^\mu\psi_{\lambda\sqrt{1 + \mathbf{p}_\perp^2/\lambda^2}, \mathbf{p}_\perp} = \left(\lambda\sqrt{1 + \mathbf{p}_\perp^2/\lambda^2}, \mathbf{p}_\perp \right)^\mu \psi_{\lambda\sqrt{1 + \mathbf{p}_\perp^2/\lambda^2}, \mathbf{p}_\perp}. \quad (3.2.3)$$

従って、 $\{E_n\}$ は Lorentz ブーストによって λ および \mathbf{p}_\perp のラベルに分類されることが分かった。特に E_n に関する和は

$$\sum_{E_n} = \sum_\lambda \int \frac{d\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^{d_\perp}}.$$

となる。ここで d_\perp は垂直方向の次元の数である。

以上で $\{E_n\}$ を λ の値によって分類できたので、この系の熱力学を調べるためには $\psi_{\lambda, \mathbf{0}}$ の具体的な関数形が分かれば十分である。そこで次に、1+1次元系で得られた1次元的構造は $\psi_{\lambda, \mathbf{0}}$ の具体例として援用できることを示す。 $P_\perp\psi_{\lambda, \mathbf{0}} = 0$ に注意すると、 $H_{\text{MF},+}$ は Weyl 表現の下で

$$H_{\text{MF};1D} = \begin{pmatrix} i\partial_z & 0 & \Phi(z) & 0 \\ 0 & -i\partial_z & 0 & \Phi(z) \\ \Phi(z)^* & 0 & -i\partial_z & 0 \\ 0 & \Phi(z)^* & 0 & i\partial_z \end{pmatrix}. \quad (3.2.4)$$

与えられる。ここでは $\mathbf{p}_\perp = 0$ なる部分空間にハミルトニアンを制限しているため異なる記号を用いている。(3.2.4) 式に適当なユニタリ変換を施すことで $H_{\text{MF};1D} = H_{1D}(\Phi(z)) \otimes H_{1D}(\Phi(z)^*)$ と書ける。ここで $H_{1D}(\Phi(z))$ は

$$H_{1D}(\Phi(z)) = \begin{pmatrix} -i\partial_z & \Phi(z) \\ \Phi(z)^* & i\partial_z \end{pmatrix}. \quad (3.2.5)$$

で与えられている。(3.2.5) 式は (3.1.6) 式で与えられる $H_{\text{NJL}_2}^{\text{MF}}$ と完全に同じ形をしていることに注意。 $\mathcal{H}_{\text{MF},-}$ についても全く同様のことが言えるので、従って \tilde{H}_{MF} は 1+1 次元系でのハミルトニアン (のテンソル積) と同型であることが示せた。

3.2.2 いくつかの具体例

前節で 1+1 次元系における非一様構造が 1+3 次元系でそのまま用いられることが分かったので、本節では典型例として RKC および DCDW に関して QCD 相図を求める。前節で得た $\{E_n\}$ の分解を用いて熱力学関数の表式は以下のように与えられる：

$$\Omega_{\text{MF}} = -\frac{2TN_c}{V_{\parallel}} \sum_{\lambda} \int \frac{d\mathbf{p}_{\perp}}{(2\pi)^{d_{\perp}}} \log \left(2 \cosh \left(\frac{\lambda \sqrt{1 + \mathbf{p}_{\perp}^2 / \lambda^2} - \mu}{2T} \right) \right) + \frac{1}{4GV} \int_V |\Phi(\mathbf{x})|^2. \quad (3.2.6)$$

(3.2.6) 式を具体的に計算する為に、以下で準備を行う。

エネルギースペクトルに関する和は状態密度を用いて書き換えられることに注意。具体的には、 $f(\lambda)$ は任意のエネルギーの関数、 $\rho(\lambda)$ は状態密度とすると従って

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_{\parallel}} \sum_{\lambda} \int \frac{d^2\mathbf{p}_{\perp}}{(2\pi)^2} f \left(\lambda \sqrt{1 + \mathbf{p}_{\perp}^2 / \lambda^2} \right) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int \frac{d^2\mathbf{p}_{\perp}}{(2\pi)^2} \rho(\lambda) f \left(\text{sign}(\lambda) \sqrt{\lambda^2 + \mathbf{p}_{\perp}^2} \right) \\ &= \int_0^{\infty} dE \tilde{\rho}(E) \tilde{f}(E), \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

を得る。ここで $\lambda = Eu$, $\lambda^2 + \mathbf{p}_{\perp}^2 = E^2$ と変数変換した。 $\tilde{\rho}(E)$ は

$$\tilde{\rho}(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 du E^2 \rho(Eu).$$

と定義されている。(3.2.7) 式を (3.2.6) 式に代入すると、 Ω_{MF} の表式は

$$\Omega_{\text{MF}} = -2N_c \int_0^{\infty} dE \tilde{\rho}(E) \tilde{f}_{\text{bare}}(E) + \frac{1}{4GL} \int_0^L dz |\Phi(z)|^2, \quad (3.2.8)$$

となる。ここで L は非一様構造の周期であり、 $\tilde{f}_{\text{bare}}(E)$ は次のように定義される：

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\text{bare}}(E) &= T \log \left(2 \cosh \left(\frac{E - \mu}{2T} \right) \right) + T \log \left(2 \cosh \left(\frac{E + \mu}{2T} \right) \right) \\ &= \tilde{f}_{\text{UV}}(E) + \tilde{f}_{\text{medium}}(E), \end{aligned}$$

$$\tilde{f}_{\text{UV}}(E) = E,$$

$$\tilde{f}_{\text{medium}}(E) = T \log \left(1 + \exp \left(-\frac{E - \mu}{T} \right) \right) + T \log \left(1 + \exp \left(-\frac{E + \mu}{T} \right) \right).$$

\tilde{f}_{UV} および $\tilde{f}_{\text{medium}}$ はそれぞれ真空および有限な T, μ からの寄与を表している。(3.2.8) 式を各 T, μ ごとに任意定数 (例えば DCDW では m, q) に関して最小化することで、 T - μ 平面上での QCD 相図を求めることができる。

A Real Kink Crystal

RKC の関数形は (3.1.7) 式で与えられていた。 $\tilde{\rho}(E)$ の表式は以下の通り：

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(E) = & \theta(\sqrt{\tilde{\nu}m} - E) \frac{\mathbf{E}(\tilde{\theta}|\tilde{\nu}) + (\mathbf{E}(\nu)/\mathbf{K}(\nu) - 1)\mathbf{F}(\tilde{\theta}|\tilde{\nu})}{\pi^2} Em \\ & + \theta(E - \sqrt{\tilde{\nu}m})\theta(m - E) \frac{\mathbf{E}(\tilde{\nu}) + (\mathbf{E}(\nu)/\mathbf{K}(\nu) - 1)\mathbf{K}(\tilde{\nu})}{\pi^2} Em \\ & + \theta(E - m) \frac{\mathbf{E}(\theta|\tilde{\nu}) + \mathbf{E}(\nu)/\mathbf{K}(\nu)\mathbf{F}(\theta|\tilde{\nu}) - \mathbf{F}(\theta\tilde{\nu}) + \sqrt{(E^2 - m^2)(E^2 - \tilde{\nu}m^2)}/(Em)}{\pi^2} Em, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

ここで $\tilde{\nu} = 1 - \nu$, $\tilde{\theta} = \arcsin(E/(\sqrt{\tilde{\nu}m})$, $\theta = \arcsin(m/E)$ である。また、 $\mathbf{F}(\theta|\nu)$ および $\mathbf{E}(\theta|\nu)$ は第一種および第二種の楕円積分を表す。(3.2.9) 式を (3.2.8) 式に代入し、 m, ν に関して各 T, μ ごとに最小化することで、RKC に関する QCD 相図を得る。

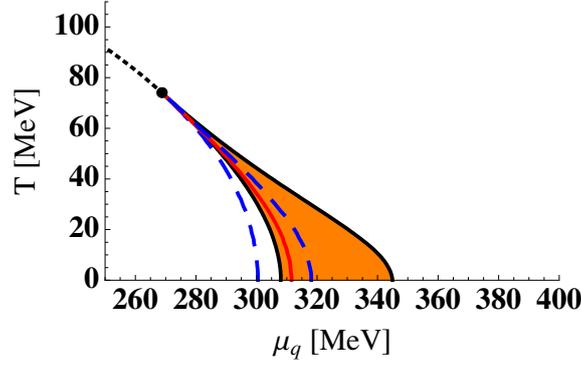


図 3.3: RKC の場合の QCD 相図 [41]。赤実線および黒点線は、一様構造に限定した場合に得られる一様相と回復相の間の 1 次および 2 次相転移線をそれぞれ表す。青点線は spinodal 領域が存在する境界を表し、オレンジ色の領域は非一様相を表す。

まず始めに T - μ 平面上での QCD 相図を図 3.3 に描いた。熱力学関数は真空部分に発散を持つので、ここでは Pauli-Villars 正則化を真空部分に与えている [56]。RKC で定められる非一様相が一様-回復相間 TCP(=LP) より低温領域において現れていることが分かる。

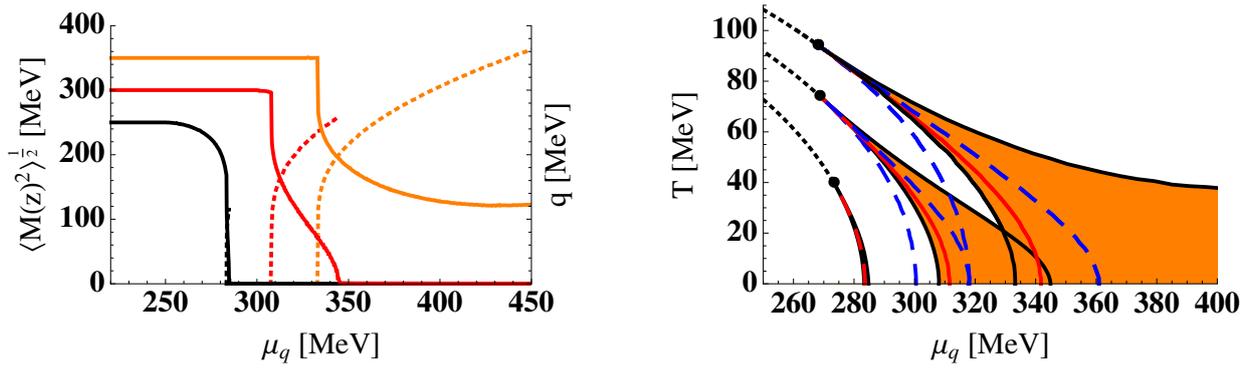


図 3.4: 真空での構成子クォーク質量を 250, 300, 350MeV となるようにカットオフを変化させた際の物理量および非一様相の変化 [41]。左：波数 (点線) および構成子クォーク質量 (実線) の $T = 0\text{MeV}$ での変化。黒線、赤線、黄線は 250, 300, 350MeV の場合にそれぞれ対応する。右：カットオフを変化させたことによる非一様相の変化。250, 300, 350MeV と増えるに従って、非一様相の領域は単調に広がる。

図 3.4 はいくつかのカットオフパラメータでの物理量および QCD 相図を表している。左図では $T = 0$ での波数および構成子クォーク質量変化を μ の関数として描いた。いずれのカットオフでも一様-非一様相境界 (始境界線) 上で、波数および構成子クォーク質量の μ 微分は不連続に変化している。これらの物理量は熱力学関数の 1 階微分によって与えられているので、始境界線はカットオフの値に依らず 2 次相転移線であることを表している。構成子クォーク質量に関しては、非一様-回復相境界 (終境界線) でも同様の振る舞いが見られる。一方、波数に関しては終境界線上で不連続に変化している。この振る舞いは一見 1 次相転移を示唆しているように思われるが、実際は 2 次相転移である。終境界線上で構成子クォーク質量が 0 になっていることに注意する。振幅が 0 である以上波数がどのような値であっても無関係であるので、従って波数は熱力学的に有意な量とはならない。

右図ではカットオフの変化による QCD 相図の変化を描いた。真空の構成子クォーク質量が上昇するに従って、非一様相の領域は単調に増加していることが分かる。

B Dual Chiral Density Wave

DCDW の関数形は (3.1.8) 式で与えられていた。 $\tilde{\rho}(E)$ の表式は以下の通り：

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(E) = & \frac{E\sqrt{(E-q)^2 - m^2}}{2\pi^2}\theta(E-q-m) + \frac{E\sqrt{(E+q)^2 - m^2}}{2\pi^2}\theta(E-q+m)\theta(E+q-m) \\ & + \frac{E(\sqrt{(E+q)^2 - m^2} - \sqrt{(E-q)^2 - m^2})}{2\pi^2}\theta(q-m-E). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

(3.2.10) 式を (3.2.8) 式に代入し、 m, q に関して各 T, μ ごとに最小化することで、DCDW に関する QCD 相図を得る。

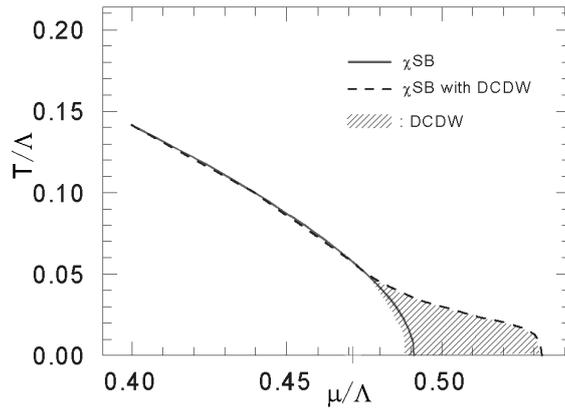


図 3.5: DCDW の場合の QCD 相図 [37]。斜線領域は非一様相を表し、黒線は一様構造に限定した場合に得られる一様相と回復相の間の 1 次相転移線をそれぞれ表す。

まず始めに T - μ 平面上での QCD 相図を図 3.5 に描いた。熱力学関数は真空部分に発散を含むので、ここでは PTR を真空部分に用いて正則化した。RKC の場合と同様、DCDW で定められる非一様相が一様-回復相間 TCP(=LP) より低温領域において現れていることが分かる。

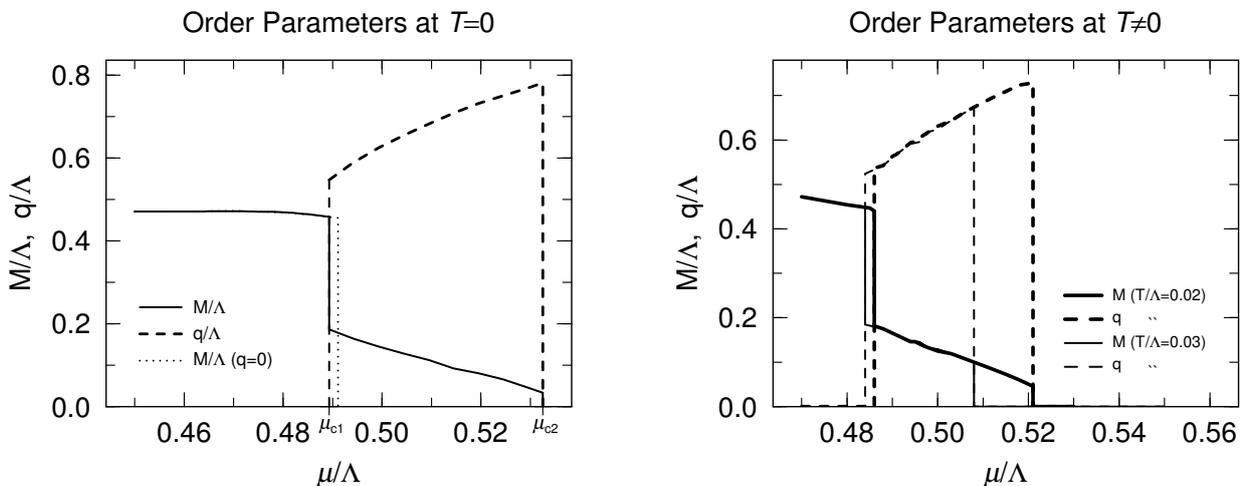


図 3.6: T 一定の下での構成子クォーク質量 (実線) および波数 (点線) の変化を μ の関数として描いた [37]。左 (右) 図は $T = 0 (\neq 0)$ での変化を表している。

次に T 一定の下での構成子クォーク質量および波数の変化を、 μ の関数として図 3.6 に描いた [37]。RKC の場合と異なり、いずれの図でも始境界線では構成子クォーク質量および波数が共に不連続に変化している。実際、任意の温度領域においてこの不連続性は保たれており、従って DCDW の場合始境界線は 1 次相転移を示している。一方、終境界線ではいずれの図でも RKC の場合と同様に、構成子クォーク質量は連続的に (または微小に不連続に) 消えて

いることが分かる。実際、任意の温度領域において同様の振る舞いが見られ、従って DCDW の場合終境界線は 2 次相転移 (または弱い 1 次相転移) を示している。

3.3 熱力学関数の直接計算を用いない非一様相の解析

ここまでは NJL 模型といった QCD の有効模型の熱力学関数を直接計算することで、カイラル非一様相の熱力学的性質を調べてきた。しかし、有効模型はあくまで QCD とは異なるので、何らかの異なる手法を用いて得られた結果をより確かなものとする必要がある。そこで本節では有効模型を介さずに非一様相を解析する手法についてレビューする。

3.3.1 Generalized Ginzburg-Landau 理論を用いた解析

本小節では generalized Ginzburg-Landau 理論 (gGL) を用いた解析法をレビューする。一般に、Ginzburg-Landau (GL) 理論とは、熱力学関数を秩序変数およびその微分のべきで表し、これを用いて相構造を決定する手法である [57]。カイラル非一様相研究においては、まず [58] によって 1 + 1 次元系において議論され、その後 Nickel によって 1 + 3 次元系に一般化された [42]。このような一般化された GL は gGL と呼ばれている。

GL にせよ gGL にせよ、熱力学関数の関数形は系に要求されている対称性のみによって決定される。従って、gGL に基づいた熱力学関数の表式は有効模型の詳細なラグランジアンに依存せずに決定される。一般には gGL によって得られる熱力学関数は秩序変数およびその微分の無限次まで含まれるが、もしもこれらの大きさが十分小さければ、有効的に適当なべきの次数まで取り込めば十分である。特に LP 近傍では、秩序変数の大きさおよびその微分は理論のカットオフと比べて十分に小さいので、こうして得られた gGL による熱力学関数は系の相構造を正しく記述していると期待される。この意味において、gGL は LP 近傍で妥当なアプローチと考えられている。

以下では秩序変数とその微分 (即ち非一様構造の「波数」) が同程度の大きさであることを仮定する。実際、LP 付近では有効模型を用いた解析はこの仮定が妥当であることを支持している。対称性の要求から、熱力学関数の表式は以下の通り：

$$\Omega_{\text{gGL}} = \frac{\beta_2}{2} |\Phi(z)|^2 + \frac{\beta_{4a}}{4} |\Phi(z)|^4 + \frac{\beta_{4b}}{4} |\partial\Phi(z)|^2 + \frac{\beta_{6a}}{6} |\Phi(z)|^6 + \frac{\beta_{6b}}{6} |\Phi^2(z)| |\partial\Phi(z)|^2 + \frac{\beta_{6c}}{6} |\partial^2\Phi(z)|^2. \quad (3.3.1)$$

LP 近傍を考える為、ここでは秩序変数およびその微分の 6 次まで考慮した。一般に、 Ω_{gGL} の各次数の係数の表式は具体的な理論の詳細に依存してしまうが、NJL 模型を考える場合、

これらの係数の間に次の恒等式が成立することが知られている：

$$\begin{aligned}\beta_{4a} &= \beta_{4b} \equiv \beta_4, \\ \beta_{6a} &= \frac{1}{5}\beta_{6b} = 2\beta_{6c} \equiv \beta_6.\end{aligned}$$

このとき、(3.3.1) 式より熱力学関数の表式は次のように与えられる：

$$\Omega_{\text{gGL}} = \frac{\beta_2}{2} |\Phi(z)|^2 + \frac{\beta_4}{4} [|\Phi(z)|^4 + |\partial\Phi(z)|^2] + \frac{\beta_6}{6} \left[|\Phi(z)|^6 + 5|\Phi(z)|^2 |\partial\Phi(z)|^2 + \frac{1}{2} |\partial^2\Phi(z)|^2 \right]. \quad (3.3.2)$$

以下では (3.3.2) 式を解析することにより、非一様構造を考慮した場合の QCD 相図を求める。具体的な非一様構造の関数形として、ここでは DCDW を考える； $\Phi(z) = me^{iqz}/\sqrt{2}$ 。(3.3.2) 式に代入し、1 周期分に関して平均化すると $\tilde{\Omega}_{\text{gGL}} \equiv \Omega_{\text{gGL}}/V$ として

$$\tilde{\Omega}_{\text{gGL}} = \left[\frac{\beta_2}{4} m^2 + \frac{\beta_4}{16} m^4 + \frac{\beta_6}{6} m^6 \right] + \left(\frac{\beta_4}{8} m^2 + \frac{\beta_6}{8} m^4 \right) q^2 + \frac{\beta_6}{24} m^2 q^4. \quad (3.3.3)$$

を得る。(3.3.3) 式において、右辺第 2・3 項は秩序変数の空間的異方性に起因して現れていることに注意する。 m, q に関して $\tilde{\Omega}_{\text{gGL}}$ を最小化する条件を求めれば、非一様構造を考慮した場合の QCD 相図が求まる。結果を以下にまとめる。

- (A) $\beta_4 > 0$ ならば、2 次相転移が $\beta_2 = 0$ で起こる。
- (B) $\beta_4 < 0$ において、2 次相転移が $\beta_4 = 8\beta_2\beta_6/3$ で起こる。
- (C) $\beta_4 < 0$ において、1 次相転移が $\beta_4 = 99\beta_2\beta_6/17$ で起こる。

具体的な模型を用いて係数の値を求めることで、(B),(C) はそれぞれ終境界線、始境界線に対応していることが分かる。(A) に関しては一様構造の場合と同様で、一様-回復相間の 2 次相転移を表している。これら 3 つの相境界は $(\beta_2^c, \beta_4^c) = (0, 0)$ で同時に終点を迎えるが、これは LP を表している。一様構造での GL を用いた議論と比較すると、gGL は TCP と LP が QCD 相図上の同じ座標で与えられていることを示すことが分かる。

3.3.2 相関関数を用いた解析

相関関数を用いた手法は、例えばカイラル対称性の自発的破れにおけるソフトモードの解析 [59, 60] などにおいて、広く用いられている。本小節では相関関数を用いた終境界線の決定についてレビューする [37]。以下で見ると、本手法は相境界が 2 次相転移である場合に対して有効である。RKC や DCDW といった典型的な非一様構造によって得られる終境界線は全て 2 次相転移であることが熱力学関数の直接計算および gGL によって示されているので、本手法は相境界の解析に有効であると言える。

基本的な相関関数を用いた解析法は以下の通りである。まず始めに、回復相におけるクォーク伝播関数を用いて、外線運動量 (q_0, \mathbf{q}) の秩序変数の相関関数を構成する (以下ではこれを $C(q_0, \mathbf{q})$ と表す)。この相関関数を用いることで、回復相から非一様相との相境界へと外挿することを考える。実際、相関関数は静的極限 $q_0 \rightarrow 0$ の下で秩序変数の感受率と関係することが知られおり、これが発散する点を以って2次相転移が起こったと理解できる。物性物理学においては、スピンまたは電荷密度波の解析においてその有用性が確かめられている [43, 44]。相関関数と感受率との関係性については以下のように理解できる。以下ではフェルミオンの4点接触相互作用を持つ任意の理論を考え、その結合定数を G とする。まず、相関関数をフェルミオンの分極関数 $\Pi^0(q_0, \mathbf{q})$ で表すことを考える。乱雑位相近似 (RPA) の下では、相関関数は分極関数の直列的な無限和で与えられ、具体的には

$$C(q_0, \mathbf{q}) = \frac{\Pi^0(q_0, \mathbf{q})}{1 - 2G\Pi^0(q_0, \mathbf{q})}, \quad (3.3.4)$$

で与えられる。一方、理論をボソン化した後 RPA の下で $\langle |\Phi(\mathbf{q})|^2 \rangle$ を求めると、これは

$$\Gamma(0, \mathbf{q}) \equiv \langle |\Phi(\mathbf{q})|^2 \rangle = \frac{2G}{1 - 2G\Pi^0(0, \mathbf{q})}, \quad (3.3.5)$$

となる [61]。(3.3.5) 式は熱力学関数の $\mathcal{O}(|\Phi(\mathbf{q})|^2)$ の係数、即ち感受率と対応している：

$$\Omega(\Phi) = \Omega|_{\Phi=0} + \frac{1}{2!}\Gamma^{-1}(0, \mathbf{q})|\Phi(\mathbf{q})|^2. \quad (3.3.6)$$

(3.3.5) 式および (3.3.4) 式より $2GC(0, \mathbf{q}) = \Pi^0(0, \mathbf{q})\Gamma(0, \mathbf{q})$ なる関係があることが分かる。従って (3.3.6) 式より、感受率が発散する点で2次相転移が起こるので、従って相関関数が発散する点を以って2次相転移と考えられる。

以下ではカイラル対称性における非一様相転移において、相関関数による解析を考える。回復相において、非一様相転移を引き起こす秩序変数の候補としては ϕ_0, ϕ_3 が挙げられる。しかし、回復相においてはこれらは秩序変数として等価であるので、分極関数の表式はいずれの場合でも同じである。従って、以下では擬スカラーチャンネルを用いて計算を進める。相関関数の表式は

$$\Gamma_{\text{ps}}(0, \mathbf{q}) = \frac{2iG}{1 - 2G\Pi_{\text{ps}}^0(0, \mathbf{q})}.$$

であり、 $\Pi_{\text{ps}}^0(0, \mathbf{q})$ は

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{ps}}^0(0, \mathbf{q}) &= \Pi_{\text{ps}}^{0, \text{vac}}(0, \mathbf{q}) + \Pi_{\text{ps}}^{0, \text{med}}(0, \mathbf{q}), \\ \Pi_{\text{ps}}^{0, \text{vac}}(0, \mathbf{q}) &= \frac{N_f N_c}{(2\pi)^2} \Lambda^2 - 2iN_f N_c |\mathbf{q}|^2 I(|\mathbf{q}|^2) \\ \Pi_{\text{ps}}^{0, \text{med}}(0, \mathbf{q}) &= \frac{N_f N_c}{2\pi^2} \int_0^\infty p dp \frac{1}{e^{\beta(p+\mu)} + 1} \left(2 - \frac{|\mathbf{q}|}{2p} \log \left| \frac{|\mathbf{q}| + 2p}{|\mathbf{q}| - 2p} \right| \right) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

と書ける。ここで $\Pi_{\text{ps}}^{0,\text{vac}}(0, \mathbf{q})$, $\Pi_{\text{ps}}^{0,\text{med}}(0, \mathbf{q})$ はそれぞれ真空からの寄与および有限な T, μ からの寄与をそれぞれ表す。 $\Pi_{\text{ps}}^{0,\text{vac}}(0, \mathbf{q})$ に関しては PTR を用いて正則化する。 Λ は正則化における理論のカットオフであり、本小節では真空中での構成子クォーク質量およびパイオンの崩壊定数を再現する $\Lambda = 660.37 \text{ MeV}$, $G\Lambda^2 = 6.35$ を採用する。 $I(|\mathbf{q}|^2)$ の表式は以下の通り：

$$I(|\mathbf{q}|^2) \equiv \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dt \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-|\mathbf{q}|^2 t(1-t)\tau}.$$

我々は回復相から非一様相の相境界を外挿していることに注意する。そこで T を固定し μ を変化させることで、相境界を決定することを考える。まず、回復相では熱力学関数の $\mathcal{O}(|\Phi(\mathbf{q})|^2)$ の係数は常に正であることを注意する。しかし、 $\Gamma^{-1}(0, \mathbf{q})$ は $|\mathbf{q}|^2$ の関数であるため、いずれかの $|\mathbf{q}| = q_c$ で最小値を与える。この値に着目すると、 μ の減少に伴い、少なくとも相境界近傍では単調に減少するだろう。最終的にいずれかの T, μ にて $\Gamma_{\text{ps}}^{-1}(0, \mathbf{q}_c) = 0$ が成立する。これは波数 q_c を持った非一様構造を考えると、熱力学関数の $\mathcal{O}(|\Phi(\mathbf{q}_c)|^2)$ の係数が 0 であることを意味しており、即ち $|\mathbf{q}| = q_c$ を持った非一様相との 2 次相転移を表している。以上を式で表すと、2 次相転移の相境界は次の条件式によって定められる：

$$1 - 2G\Pi_{\text{ps}}^0(0, \mathbf{q})|_{|\mathbf{q}|=q_c} = 0 \quad \text{and} \quad \partial_q \Pi_{\text{ps}}^0(0, \mathbf{q})|_{|\mathbf{q}|=q_c} = 0. \quad (3.3.8)$$

最後に、以上は終境界線の相転移について議論してきたが、本手法は一様相-回復相間の 2 次相転移についても議論できることに注意する。実際、一様相とは $q_c = 0$ で特徴付けられているので、(3.3.8) 式において $q_c = 0$ となる領域は自然に一様-回復相間の相転移と対応する。

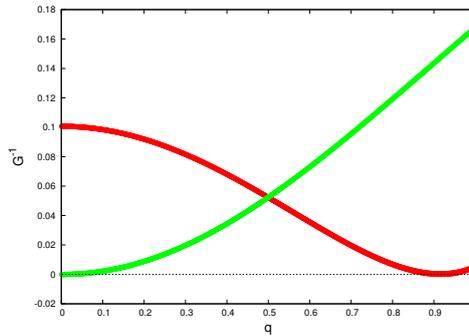


図 3.7: いくつかの T, μ で $\Gamma_{\text{ps}}^{-1}(0, \mathbf{q})$ を $|\mathbf{q}|$ の関数として描いた。赤線(緑線)は非一様相(一様相)と回復相との相境界近傍での振る舞いであり、 $T = 0.001(0.27)\Lambda\text{MeV}$ である。

以下では具体的な数値計算結果について議論する。固定された T, μ の下での $\Gamma_{\text{ps}}^{-1}(0, \mathbf{q})$ の振る舞いを図 3.7 に描いた。赤線は $T = 0.001\Lambda$ における相境界上での $\Gamma_{\text{ps}}^{-1}(0, \mathbf{q})$ の振る舞いを表している。熱力学関数の直接計算によれば、この領域では非一様-回復相転移が起こっているはずである。実際、赤線は $q_c \neq 0$ で $\Gamma_{\text{ps}}^{-1}(0, \mathbf{q}_c) = 0$ が実現しており、これは 2 次の非一様-回復相転移を示している。一方緑線は、 $T = 0.27\Lambda$ における相境界上での $\Gamma_{\text{ps}}^{-1}(0, \mathbf{q})$ の振る

舞いを表している。熱力学関数の直接計算によれば、この領域では一様-回復相転移が起こっているはずである。実際、赤線は $q_c = 0$ で $\Gamma_{ps}^{-1}(0, \mathbf{q}_c) = 0$ が実現しており、これは2次の一様-回復相転移を示している。

図 3.8 は $\Gamma_{ps}^{-1}(0, \mathbf{q})$ を $T = 0$ の下でいくつかの μ に関し $|\mathbf{q}|$ の関数として描いたものである。回復相に属する μ では、任意の $|\mathbf{q}|$ に対して $\Gamma_{ps}^{-1}(0, \mathbf{q})$ は常に正である。しかし、 μ が減少する、即ち μ が非一様-回復相境界の値に近づくに従って、 $\Gamma_{ps}^{-1}(0, \mathbf{q})$ の最小値は単調に減少し、最終的には2次相転移へと至ることが分かる。

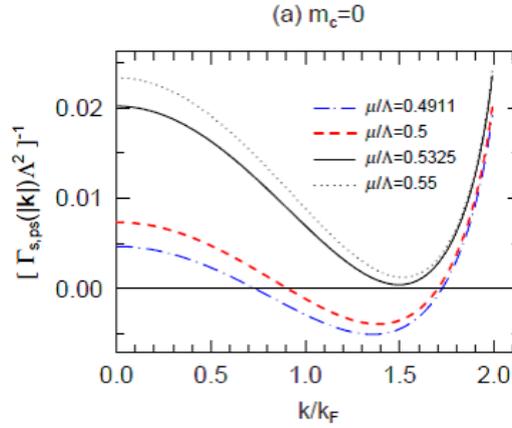


図 3.8: $T = 0$ の下で $\Gamma_{ps}^{-1}(0, \mathbf{q})$ の振る舞いをいくつかの μ について描いた [37]。

本小節の最後に、本手法と後の章との関連について述べておく。

第5章では current quark mass の効果による非一様構造および相構造の変化について議論するが、相関関数は終境界線を決定する目安を与える。Current quark mass を考慮すると、一般に (3.3.6) 式において $\mathcal{O}(|\Phi(\mathbf{q})|)$ の項の係数が波数に依存する関数として有限に残る為、相関関数の方法をそのまま用いることはできない。しかしながら、この係数の値は $\mathcal{O}(m_c)$ の量であるため、近似的には相境界を求める指標となる。特に終境界線は数値的に厳密に求めることが容易ではないので、相関関数を用いてその目安を与えることは有意義である。

第6章では揺らぎの効果による終境界線の相転移の次数の変化を考察するが、そのとき基礎となるのは (3.3.6) 式である。即ち、回復相における伝播関数を相関関数から構成し、揺らぎの効果がカイラル非一様相へ与える影響について議論する。本節では2次相転移の位置について考察するので、外線運動量 $(0, \mathbf{q})$ に対する相関関数を通じて Γ^{-1} の符号を調べれば十分であった。一方揺らぎの効果を考慮すると Γ に関するループ積分を実行する必要がある、相関関数を外線運動量 (ω_n, \mathbf{q}) に関して定式化しなくてはならない。実際ループ積分を実行し、熱力学関数を $\Phi(z)$ の次数で展開すると、 Γ^{-1} は常に正定値となり、また $|\Phi(\mathbf{q})|^4$ の係数の符号が変化する。従って、揺らぎの効果で終境界線の次数は2次から1次へと変化する。

第4章 外部磁場中でのカイラル非一様相

第3章では、様々な制限の下でのカイラル非一様相の先駆的研究についてレビューした。本章では、これらの議論を単純化する制限を外し、非一様カイラル相転移の全貌の解明に向けた本質的な試みの1つとして、外部磁場を導入する。

磁場効果はカイラル非一様相研究に限らず、様々な理論的側面において活発に議論されている。例えば、強磁場系の物理はカイラル磁気効果 [65]、magnetic catalysis [66–70]、magnetic inhibition [71–75] といった様々な現象について活発に研究されている。さらには、 $\mu = 0$ では外部磁場があっても符号問題が発生しない為、格子 QCD を用いた第一原理計算に基づいた研究も進められている [76]。このような研究の流れを鑑みるに、カイラル非一様相における外部磁場の効果を議論することは、非常に自然であると言える。

外部磁場の効果を考慮することは、理論的興味に留まらず実験的側面においても意義深い。例えば、コンパクト天体内部や高エネルギー重イオン衝突実験において発現しているクォーク物質は、強い外部磁場中に置かれていることが知られている [62–64]。これらの物理的対象の温度・密度領域では、カイラル非一様相が発現すると考えられており、現象論的研究を推し進める上でも本研究項目は重要である。

カイラル非一様相において外部磁場の効果を取り扱った議論としては、Frolov らによる先行研究が挙げられる [24]。彼らは非一様構造の関数形として DCDW を用いて議論し、結果外部磁場の影響によって $T = 0$ で DCDW 相が広範囲の密度領域に広がること、非一様構造の振幅および波数が de Hass-van Alphen 効果 [77, 78] によって特徴的な振る舞いを示すことを明らかにした。そこで本研究では、磁場の影響による非一様相の拡大はカイラルアノマリーに起因していることを示し [25]、さらに DCDW を含むより一般の非一様構造に対して $T = 0$ での外部磁場の影響を考察する [26]。

4.1 カイラルアノマリーに起因する非一様相の拡大

本研究ではカイラルアノマリーによって、 $B = 0$ で一様相であったような領域でも非一様相が出現することを示す [25]。議論を始めるにあたり、まずは $1 + 1$ 次元系で知られている性質を紹介する [38–40]。鍵となるのはカイラルアノマリーとネスティング効果である。ネスティング効果とは、対を形成する粒子のフェルミ面を $q = 2k_F$ だけずらすことで、有限の波

数を持った粒子対が構成されることに起因する。実際、1+1次元系では平行移動した2つのフェルミ面が1点で重なるのでエネルギーを損することなく粒子対を形成することが可能であり、かつ低温領域では一様構造よりも熱力学的に常に優位になることが知られている。 $T=0$ でのNJL₂での解析によると、カイラルアノマリーの効果によって異常バリオン数密度 $\rho_B = \mu/\pi$ が出現し、ネスティング効果を反映して非一様構造の波数は $q = 2\mu$ の関係を持つ [38]。ここで $\rho_B = -\partial\Omega/\partial\mu$ を思い出すと、これらの式から波数を持った非一様構造が常に出現することが分かる。ネスティング効果は1+3次元系では不完全であるし、バリオン数密度の表式も変化する。従って、素朴に計算した非一様なQCD相図は1+1次元系でのそれとは大きく異なってしまふ。しかし、外部磁場を与えて磁場に垂直な方向の運動量をLandau量子化してしまえば、最低Landau準位 (LLL) では系は1+1次元系と等価になる。即ち、外部磁場が与えられているような状況では、1+1次元系でのみ成立していた特徴的な性質が出現することが期待できる。

磁場の効果を議論するに当たり、本研究では外場が導入されたNJL模型を用いる。MFAの下でラグランジアンを表式は次の通り：

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}}^G = \bar{\psi} \left[-i\gamma^\mu D_\mu + \frac{1 + \tau_3\gamma^5}{2}\Phi + \frac{1 - \tau_3\gamma^5}{2}\Phi^* \right] \psi - \frac{|\Phi|^2}{4G}, \quad (4.1.1)$$

ここで $D_\mu = \partial_\mu - ie_f A_\mu$ (e_f は各フレーバーの電荷) であり、 $\Phi(z)$ は適当な1次元的な非一様構造の関数形である。以下では磁場の効果のみを考え、かつ磁場は空間的に一様かつ z 軸に平行であるとする。Dirac演算子の表式は

$$H_D^G = \alpha \cdot \mathbf{\Pi} + \gamma^0 \Phi \frac{1 + \gamma^5}{2} + \gamma^0 \Phi^* \frac{1 - \gamma^5}{2}, \quad (4.1.2)$$

ここで $\mathbf{\Pi}$ は正準運動量である； $\Pi_i = -i\partial_i + eA_i$ 。以下では簡単の為 $N_f = N_c = 1$ として議論を進める。クォーク場をWeinberg変換によって再定義する； $\psi \rightarrow \psi_W = \exp(i\gamma_5\tau_3\theta(z)/2)\psi$ 。このときDirac演算子は

$$\tilde{H}_D^G = \alpha \cdot \mathbf{\Pi} + \gamma_0\Delta(z) - \gamma_0\gamma_5\gamma\nabla\theta(z)/2,$$

で与えられる。

以下ではカイラルアノマリーが引き起こす熱力学関数に対する影響を議論する。 H_D^G の固有値を λ_k とすると、クォーク数演算子の熱平均は

$$\langle \hat{N} \rangle = -\frac{1}{2}\eta_H + \sum_k \text{sign}(\lambda_k) [\theta(\lambda_k)n_F(\lambda_k - \mu) + \theta(-\lambda_k)(1 - n_F(\lambda_k - \mu))], \quad (4.1.3)$$

で与えられる [79]。ここで n_F はフェルミオンの分布関数である。(4.1.3) 式の右辺第1項はAtiyah-Patodi-Singerの η 不変量と呼ばれる位相不変量であり、カイラルアノマリーと関係

している [80] :

$$\eta_H = \lim_{s \rightarrow 0^+} \eta_H(s), \quad \eta_H(s) = \sum_k \text{sign}(\lambda_k) |\lambda_k|^{-s}. \quad (4.1.4)$$

(4.1.4) 式は $\{\lambda_k\}$ が $\lambda_k = 0$ に関して非対称であるときのみ有限の値を持つことに注意。即ち、状態密度が図 4.1 で与えられるような場合を指す。

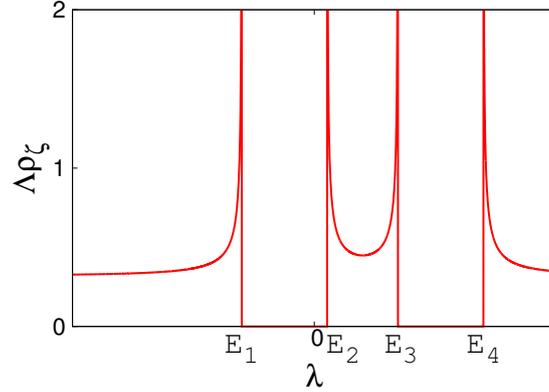


図 4.1: $\lambda_k = 0$ に関して非対称な状態密度。

エネルギースペクトルが非対称になるのは DCDW のような位相が空間変調した構造であったことを思い出すと、カイラルアノマリーに起因する熱力学関数の補正項は DCDW タイプの非一様構造によって与えられる。Mellin 変換を $\eta_H(s)$ に施すと

$$\eta_H(s) = \frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{s\pi}{2}\right) \int_0^\infty d\omega \omega^{-s} \int d^3x \text{tr} [R_E(\mathbf{x}, i\omega) + \text{c.c.}], \quad (4.1.5)$$

を得る。ここで R_E はユークリッド空間でのリゾルベントであり表式は

$$R_E(\mathbf{x}, i\omega) \equiv \left\langle \mathbf{x} \left| \frac{1}{\tilde{H}_D - i\omega} \right| \mathbf{x} \right\rangle = \langle \mathbf{x} | \gamma_0 S(i\omega) | \mathbf{x} \rangle,$$

である。ここで $S(i\omega)$ は伝播関数であり、一様な場合の外場を含む伝播関数 $S_A(i\omega)$ を用いて $S^{-1}(i\omega) = S_A^{-1}(i\omega) + \delta S$ と書ける。 δS は $\langle \mathbf{x} | \delta S | \mathbf{y} \rangle = \gamma_5 \gamma \cdot \nabla \theta(z) / 2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ を満たすことに注意。上でも述べたように、アノマリーに効果が表れるのは DCDW タイプの非一様構造である。以下では $\Delta(z) \sim \Delta$ と近似して考える。 $S_A(x, y) = \exp(ie \int_y^x d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}) \tilde{S}_A(x - y)$ と書くと、 $\tilde{S}_A(x - y)$ の Fourier 変換 $\tilde{S}_A(k)$ は Landau 準位を用いて展開できる [81] :

$$\tilde{S}_A(k) = ie^{-\mathbf{k}_\perp^2 / (|eB|)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n D_n(eB, k)}{(k^0)^2 - (k^3)^2 - \Delta^2 - 2|eB|n}.$$

$D_n(eB, k)$ はスピン射影演算子 $\mathcal{P}_\pm = (1 \pm i\gamma^1 \gamma^2 \text{sign}(eB))$ および Laguerre 多項式 $L_n^\alpha(x)$ を用いて

$$D_n(eB, k) = (k_0 \gamma^0 - k^3 \gamma^3 + \Delta) [\mathcal{P}_- L_n^0(u) - \mathcal{P}_+ L_{n-1}^0(u)] + 4(k^1 \gamma^1 + k^2 \gamma^2) L_{n-1}^1(u),$$

と書ける。ここで $u = 2\mathbf{k}_\perp^2/|eB|$ とした。

$\tilde{S}(i\omega)$ を $\tilde{S}_A(i\omega)$ の周りで展開すると

$$\text{tr}R_E(\mathbf{x}, i\omega) = -e/(4\pi)\Delta^2/(\Delta^2 + \omega^2)^{3/2}\mathbf{B} \cdot \nabla\theta(z) + \dots$$

を得る。これを (4.1.5) に代入すれば

$$\eta_H = \lim_{s \rightarrow 0} \eta_H(s) = -\frac{e}{2\pi^2} \int d^3x \mathbf{B} \cdot \nabla\theta(\mathbf{x}) + \dots \quad (4.1.6)$$

従って、(4.1.3) 式より、クォーク数密度の表式は以下の通り：

$$\rho_B^{\text{anom}} = \frac{e}{4\pi^2} \mathbf{B} \cdot \nabla\theta(z) + \dots \quad (4.1.7)$$

(4.1.7) 式はいくつの特徴を持っている。まず、右辺第 1 項はモデルの詳細に依存しない。実際、ゲージ化された Wess-Zumino-Witten 模型を用いて全く同じ項が Son, Stephanov によって導出されている [82]。さらに、この項は Δ に依存しない。即ち、この項は非一様構造の位相方向の変調のみによって決定される。

以下ではカイラルアノマリーに起因した熱力学関数の表式を求める。熱力学関係式より $\rho_B^{\text{anom}} = -\partial\Omega_{\text{anom}}/\partial\mu$ であるので次の表式を得る：

$$\Omega_{\text{anom}} = -\frac{e\mu}{4\pi^2} \int d^3x \mathbf{B} \cdot \nabla\theta(z) + \dots \quad (4.1.8)$$

(4.1.8) 式より明らかなように、 Ω_{anom} は非一様構造に波数が存在するときに常に負の寄与を与える。従って $\mathbf{B} \neq 0$ であるならば、有限の Δ さえ持てば常に非一様相が出現する。以上より、カイラルアノマリーは非一様相の領域を大きく拡大することが分かった。

4.2 外部磁場中での一般的な非一様構造

前節では外部磁場の存在とカイラルアノマリーによって、非一様相の領域が大きく拡大されることを見た。そこで本節では、より具体的な非一様構造を用いて非一様構造の拡大を数値的に確かめる [26]。DCDW についての先行研究は Frolov らによって既に行われている [24]。しかしながら、Sec. 3.3 でも見たように、議論を単純化する制限を課した場合 DCDW は RKC と比べて熱力学的に不利であることが知られている。従って、これらを比較する為にも、RKC を含むような非一様構造に対して磁場の効果を議論しなくてはならない。一方で前節で見たように、カイラルアノマリーによって大きく非一様相が拡大されるのは、位相に空間変調を持つような構造に限られている。そこで本研究では、RKC と DCDW をあらわに包含するような非一様構造に対して磁場の効果を議論する。以下では外場が導入された NJL 模型 ((4.1.1) 式) を用いる。

4.2.1 熱力学関数の表式

熱力学関数の表式を導出するにあたり、本研究では Frolov の議論 [24] を基に Sec. 3.2.1 の議論に従ってクォークスペクトルを導出する。

磁場の導入にあたり、Landau ゲージを採用する； $A^\mu = (0, \mathbf{A})$, $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$ 。ここで $e_f B > 0$ とする。Dirac 演算子の表式は (4.1.2) 式で与えられている。この Dirac 演算子は以下の交換関係を満たすことに注意； $[H_D^G, -i\partial_y] = [H_D^G, (\alpha_\perp \cdot \Pi_\perp)^2] = 0$ 。ここで $\alpha_\perp = (\alpha_x, \alpha_y, 0)$, $\Pi_\perp = (\Pi_x, \Pi_y, 0)$ である。従って、Dirac 演算子の固有関数は $-i\partial_y$ および $(\alpha_\perp \cdot \Pi_\perp)^2$ の同時固有状態で与えられる：

$$\psi_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e_f B)^{1/4} e^{iky} \begin{pmatrix} c_1(z)u_{n-1}(\eta) \\ ic_2(z)u_n(\eta) \\ c_3(z)u_{n-1}(\eta) \\ ic_4(z)u_n(\eta) \end{pmatrix},$$

ここで $\eta = x\sqrt{e_f B} + k/\sqrt{e_f B}$ であり、 $u_n(\eta)$ は Hermite 多項式である [83]。また $u_n(\eta)$ は $(\frac{\partial}{\partial \eta} + i\eta)u_n(\eta) = \sqrt{2n}u_{n-1}(\eta)$ および $(\frac{\partial}{\partial \eta} - i\eta)u_{n-1}(\eta) = -\sqrt{2n}u_n(\eta)$ を満たしており、 $n = 0, 1, 2, \dots$ は Landau 準位に対応している。以上の表式の下で、BdG 方程式 $H_D\psi = \mathcal{E}\psi$ は $n = 1, 2, \dots$ に対しては

$$\begin{pmatrix} -i\partial_z & 0 & \Phi(z) & \sqrt{2e_f Bn} \\ 0 & i\partial_z & \sqrt{2e_f Bn} & \Phi^*(z) \\ \Phi^*(z) & \sqrt{2e_f Bn} & i\partial_z & 0 \\ \sqrt{2e_f Bn} & \Phi(z) & 0 & -i\partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(z) \\ c_2(z) \\ c_3(z) \\ c_4(z) \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} c_1(z) \\ c_2(z) \\ c_3(z) \\ c_4(z) \end{pmatrix}. \quad (4.2.1)$$

であり、 $n = 0$ に対しては

$$\begin{pmatrix} i\partial_z & \Phi^*(z) \\ \Phi(z) & -i\partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2(z) \\ c_4(z) \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} c_2(z) \\ c_4(z) \end{pmatrix}. \quad (4.2.2)$$

である。(4.2.1) 式は Landau 量子化の結果 $p_\perp \rightarrow \sqrt{2e_f Bn}$ と書き換えられている。よって、1次元構造の1+3次元への埋め込みにおいて $p_\perp \rightarrow \sqrt{2e_f Bn}$ とすればよい。一方 (4.2.2) 式は1+1次元における BdG 方程式そのものである。従って、 λ_+ を1+1次元系における BdG 方程式

$$\begin{pmatrix} i\partial_z & \Phi(z) \\ \Phi^*(z) & -i\partial_z \end{pmatrix} \psi = \lambda_+ \psi, \quad (4.2.3)$$

の固有値、 λ_- を (4.2.3) 式において $\Phi(z) \rightarrow \Phi^*(x)$ と変換した式の固有値としたとき、エネルギースペクトル $\mathcal{E}_{n,\zeta}$ ($\xi = \pm$) の表式は

$$\mathcal{E}_{n,\zeta} = \begin{cases} \lambda_\zeta \sqrt{1 + \frac{2e_f B n}{\lambda_\zeta^2}} & n = 1, 2, \dots \\ \lambda_{\zeta=+} & n = 0, \end{cases} \quad (4.2.4)$$

で与えられる。

(4.2.4) 式より、熱力学関数の表式は

$$\Omega[\mu, T, B; \Phi(z)] = \frac{|\Phi(z)|^2}{4G} - TN_c \sum_f \frac{|e_f B|}{2\pi} \sum_{n,\zeta} \int d\lambda \rho_\zeta(\lambda) \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\lambda \sqrt{1 + \frac{2|e_f B| n}{\lambda^2}} - \mu}{2T} \right) \right], \quad (4.2.5)$$

となる。ここで $\rho_\zeta(\lambda)$ は $1+1$ 次元系における状態密度である； $\rho_\zeta(\lambda) = \sum_{\lambda_\zeta} \delta(\lambda - \lambda_\zeta)$ 。

ここまでは特定の非一様構造に関数形を限定せず議論してきた。以下では DCDW を含むより一般の非一様構造に対して、磁場の効果を考察する。典型的な非一様構造は RKC と DCDW で与えられていたことを思い出すと、次のような hybrid chiral condensate (HCC) について考えれば十分である：

$$\Phi(z) = \frac{2m\nu}{1 + \sqrt{\nu}} \operatorname{sn} \left(\frac{2mz}{1 + \sqrt{\nu}}; \nu \right) e^{iqz}. \quad (4.2.6)$$

ここで m, q, ν は任意のパラメータであり、各 μ, B ごとに熱力学関数の値を最小化するように決定される。

(4.2.6) 式は RKC と DCDW を掛け合わせたような関数形をしていることに注意。実際、 $\nu \rightarrow 1$ の極限で HCC は DCDW に帰着され、 $q \rightarrow 0$ の極限で RKC に帰着される。また HCC の解の自己無撞着性について、 $1+1$ 次元系において DCDW は一様構造の BdG 方程式の解と局所的なカイラル回転で繋がっていたことを思い出すと、HCC は明らかに BdG 方程式の解となっている。

DCDW はエネルギースペクトルを平行移動させるような効果を与えるに過ぎなかったことを思い出すと、HCC の状態密度は RKC の状態密度を平行移動させることで求まる：

$$\begin{aligned} \rho_\zeta(\lambda) &= \rho_{\text{RKC}}(\lambda - \zeta q/2) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{|\lambda - \zeta q/2|^2 + m^2 c}{\sqrt{((\lambda - \zeta q/2)^2 - m^2)((\lambda - \zeta q/2)^2 - m^2 \nu')}}. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

ここで $\rho_{\text{RKC}}(\lambda)$ は RKC の状態密度を表す。HCC の状態密度は典型的には図 4.1 で与えられ

る。(4.2.7) 式を (4.2.5) 式に代入すれば、HCC の熱力学関数の表式を得る：

$$\begin{aligned}\Omega[\mu, T, B; m, \nu, q] &= \frac{m^2}{4G} \left(1 - \frac{\mathbf{E}(\nu)}{\mathbf{K}(\nu)} \right) + \Omega_{\text{vac}} + \Omega_{\mu} + \Omega_T \quad (4.2.8) \\ \Omega_{\text{vac}} &= -\frac{1}{2} N_c \sum_f \frac{|e_f B|}{2\pi} \sum_{n, \zeta} \int d\lambda \rho_{\zeta}(\lambda) |\lambda \sqrt{1 + \frac{2|e_f B|n}{\lambda^2}}| \\ \Omega_{\mu} &= -\frac{1}{2} N_c \sum_f \frac{|e_f B|}{2\pi} \sum_{n, \zeta} \int d\lambda \rho_{\zeta}(\lambda) \left[|\lambda \sqrt{1 + \frac{2|e_f B|n}{\lambda^2}} - \mu| - |\lambda \sqrt{1 + \frac{2|e_f B|n}{\lambda^2}}| \right] \\ \Omega_T &= -T N_c \sum_f \frac{|e_f B|}{2\pi} \sum_{n, \zeta} \int d\lambda \rho_{\zeta}(\lambda) \ln \left[1 + \exp\left(-\frac{|\lambda \sqrt{1 + \frac{2|e_f B|n}{\lambda^2}} - \mu|}{T}\right) \right].\end{aligned}$$

ここで Ω_{vac} は発散しているので、PTR を用いて正則化する：

$$\Omega_{\text{vac}} = N_c \sum_{f, \zeta} \frac{|e_f B|}{16\pi^{3/2}} \int_1^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} \coth(\tau |e_f B|) \int d\lambda \rho_{\zeta}(\lambda) \exp(-\tau \lambda^2).$$

4.2.2 数値計算結果および議論

本節では (4.2.8) 式に基づいて μ - B 平面上での QCD 相図について議論する。以下では PTR のカットオフとして $G\Lambda^2 = 6.35$, $\Lambda = 660.37\text{MeV}$ を用いる。これは真空の構成子クォーク質量とパイオンの崩壊定数を再現する数値である。

A RKC での QCD 相図

まず始めに RKC における QCD 相図に対する磁場の効果を議論する。RKC は DCDW とは異なりエネルギースペクトルが $E = 0$ に関して対称であることに注意。Sec. 4.1 で議論したように、エネルギースペクトルの非対称性はカイラルアノマリーに起因する項が熱力学関数に現れる。一方 HCC は DCDW を包含する非一様構造である為、エネルギースペクトルは非対称である。違いを比較する意味でも、まず RKC について議論することは有意義である。

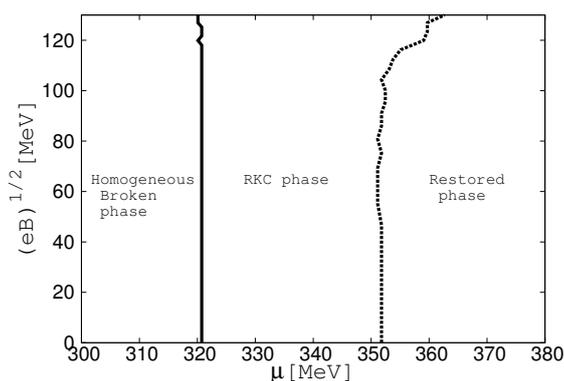
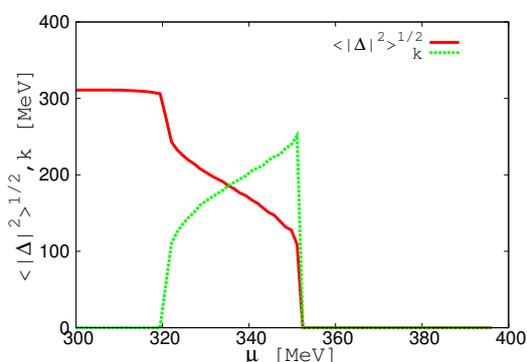
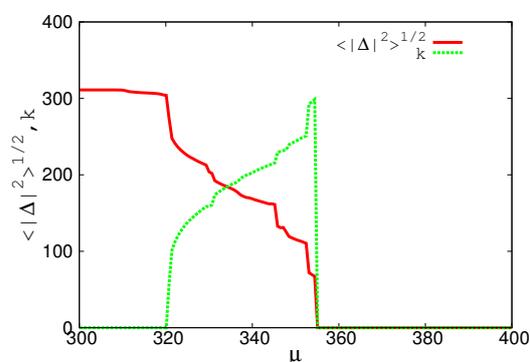


図 4.2: μ - B 平面上での RKC の QCD 相図。

図 4.2 に μ - B 平面上での RKC の QCD 相図を描いた。RKC 相は磁場が強くなるにつれて広がる傾向は見れるものの、定性的には $B = 0$ での QCD 相図と大きく変化は無い。相境界の位置について、特に磁場が大きい領域で振動するような振る舞いが見られる。この振る舞いは de Hass-van Alphen 効果からの帰結であると考えられる [77,78]。同様な振る舞いは、一様構造においても見ることができる [84]。



(a) $\sqrt{eB} = 60 \text{ MeV}$



(b) $\sqrt{eB} = 120 \text{ MeV}$

図 4.3: 非一様構造の波数 k および振幅 $\sqrt{\langle |\Phi|^2 \rangle}$ 。

図 4.3 に非一様構造の波数 k および振幅 $\sqrt{\langle |\Phi|^2 \rangle}$ の変化を、いくつかの \sqrt{eB} に関して μ の関数として描いた。ここで k は $k = 2m / [(1 + \sqrt{\nu})\mathbf{K}(\nu)]$ で定義されている。左図について、値の推移は $B = 0$ の場合と定性的に変化しないことが分かる。一方右図について、値の推移は不連続に変化している。これは熱力学関数が m および ν について、複数の極小を持つ為である。

B HCC での QCD 相図

次に HCC での QCD 相図をについて議論する。(4.2.8) 式は松原振動数に関する無限和を含んでおり、RKC との定性的な違いを見るには不便である。そこで本研究では熱力学関数を磁場の最低次まで考慮して相図を描く； $\Omega(B) \simeq \Omega(B=0) + eB\Omega^{(1)}$ 。ここで $eB\Omega^{(1)}$ は

$$eB\Omega^{(1)} = -\frac{1}{4}TN_c \sum_f \frac{|e_f B|}{2\pi} \sum_{l,\zeta} \int d\lambda \rho_\zeta(\lambda) \log [(\omega_l - i\mu)^2 + \lambda^2] \\ - \frac{1}{4}TN_c \sum_f \frac{|e_f B|}{2\pi} \sum_l \int d\lambda [\rho_+(\lambda) - \rho_-(\lambda)] \ln [\omega_l^2 + (\lambda - \mu)^2],$$

で与えられる。実際に (4.2.8) 式を展開して計算すれば分かるが、 $\mathcal{O}(eB)$ は LLL からのみの寄与で与えられる。Sec. 4.1 で見たように、熱力学関数においてカイラルアノマリーに起因する項は LLL が主要な寄与を果たすので、RKC と HCC の定性的な違いを議論するには $eB\Omega^{(1)}$ まで考慮すれば十分である。この近似の妥当性は、(4.2.8) 式を用いて計算した結果と比較することで吟味することができる。結論としては、 $\sqrt{eB} < 0.2\Lambda \simeq 120\text{MeV}$ までならば、得られる相構造はほぼ変化しない。

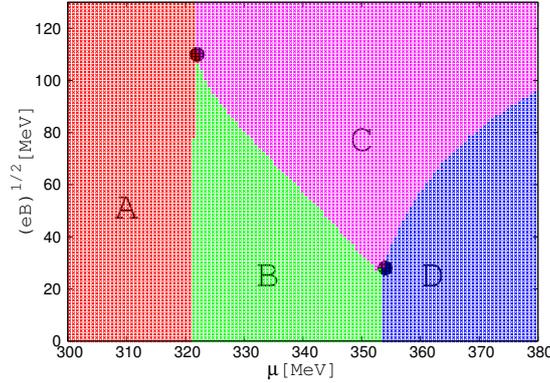


図 4.4: $T=0$ での QCD 相図。A : 弱い DCDW 相、B : HCC 相、C : 強い DCDW 相、D : 回復相。 $B \rightarrow 0$ の極限では A は一様相へ、B は RKC 相へそれぞれ移行する。

図 4.4 に $T=0$ での QCD 相図を μ - B 平面上に描いた。 $B=0$ での相図と異なり、LLL のスペクトル非対称性の帰結としてカイラル対称性が破れている限り波数が有限である。A の「弱い」 DCDW 相とは、非一様構造の波数が小さいことを表す。C の「強い」 DCDW 相とは、 q の値が大きく前章の DCDW 相と同様な相である。図 4.4 はいくつかの 3 重点を持つことに注意。1 つは A・B・C の 3 相共存点であり、 $(\mu, \sqrt{eB}) \sim (320\text{MeV}, 110\text{MeV})$ で与えられる。もう 1 つは B・C・D の 3 相共存点であり $(\mu, \sqrt{eB}) \sim (350\text{MeV}, 30\text{MeV})$ で与えられる。 $B \rightarrow 0$ で A は一様相へ、B は RKC 相へそれぞれ移行する。また、図 4.4 では \sqrt{eB} の増

加に伴い、カイラル対称性が破れた相の領域が広がる。 Ω_{anom} は qB に比例する負の量であるので、これは非一様構造の波数の空間変調の帰結である。

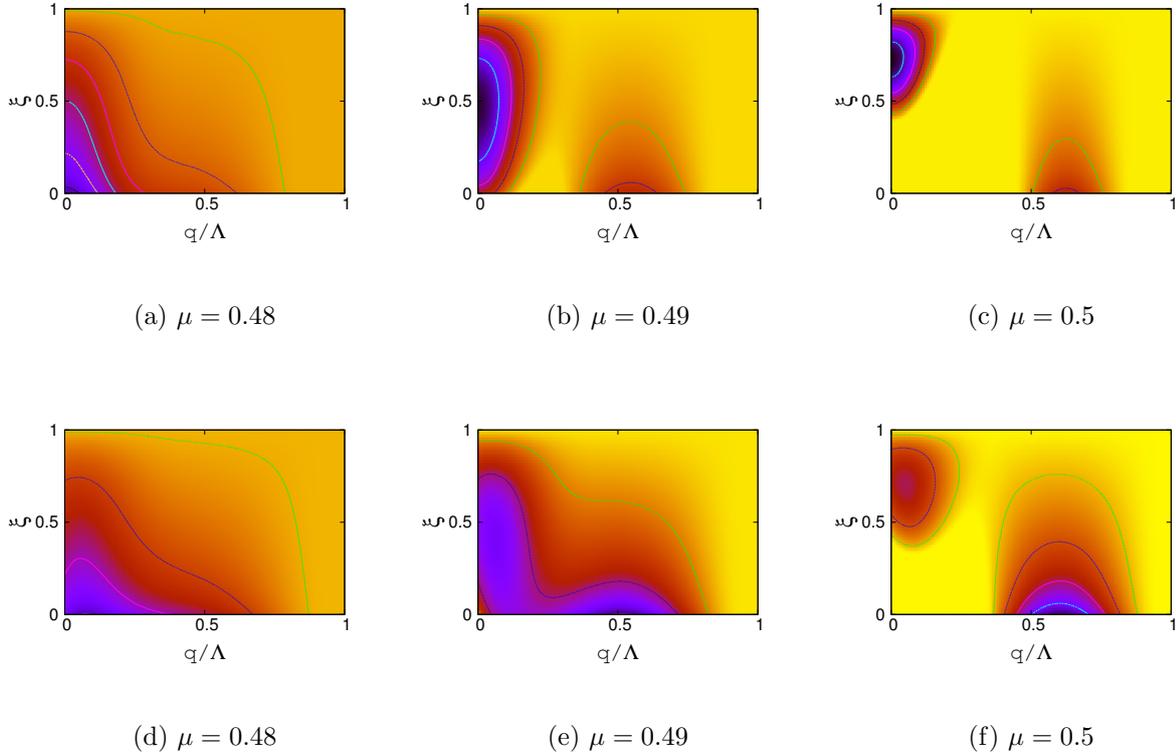
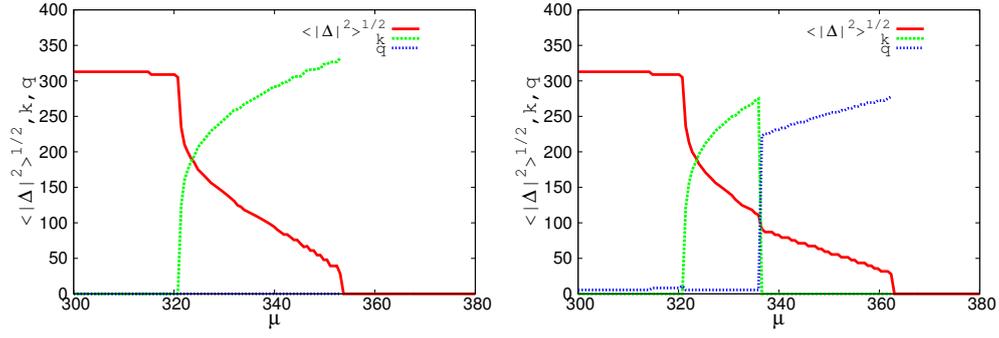


図 4.5: いくつかの \sqrt{eB} と μ における熱力学関数の値。単位は Λ 。(a)-(c) は $\sqrt{eB} = 0$ 、(d)-(f) は $\sqrt{eB} = 0.18$ を表す。

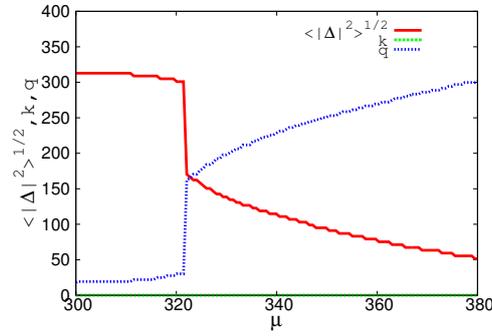
図 4.5 にいくつかの \sqrt{eB} と μ について熱力学関数の値を $\xi = 16^{(1-1/\nu)}$, q の関数として描いた。このとき m に関しては常に最小化している。まず $\sqrt{eB} = 0$ MeV の場合について。熱力学関数は RKC と DCDW に対応する極小を持ち、常に RKC の方が熱力学的に優位である。次に $\sqrt{eB} = 0 \sim 120$ MeV の場合について。2つの極小が熱力学関数に現れるのは同様だが、いずれも $q \neq 0$ である。これはスペクトルの非対称性から来る帰結であり、それぞれ HCC と DCDW に対応する。 μ が小さい領域では小さい q および $\xi = 0$ が最小であり、系は弱い DCDW 相が実現している。一方 μ が大きい領域では大きな q および $\xi = 0$ で最小であり、系は強い DCDW 相が実現している。

本節の最後に各相の間の相転移の次数について議論する。図 4.6 にいくつかの \sqrt{eB} に対して秩序変数の推移を μ の関数として描いた。まず (a) について、系は $B = 0$ であるので RKC が現れる。非一様構造の振幅は連続的に、ただしその微分は不連続に変化しているので、このとき一様-RKC 相・RKC-回復相間の相転移の次数はそれぞれ 2 次である。次に (b) につい



(a) $\sqrt{eB} = 0$

(b) $\sqrt{eB} = 60\text{MeV}$



(c) $\sqrt{eB} = 120\text{MeV}$

図 4.6: いくつかの異なる \sqrt{eB} に対する秩序変数の推移。赤線は非一様構造の振幅 ($\sqrt{\langle |\Phi|^2 \rangle}$)、緑線は振幅の波数 (k)、青線は位相の波数 (q) をそれぞれ表している。

て、このとき $B \neq 0$ であるので最早一様相は現れない。 $\mu < 320\text{MeV}$ では、 q は小さいが有限であるので、弱い DCDW 相が実現している。 $320\text{MeV} < \mu < 336\text{MeV}$ では、振幅方向の波数が有限になるので HCC 相が実現している。 $336\text{MeV} < \mu$ では再び振幅方向の波数は消えるものの、 q は大きな値を取る。従ってこの領域では強い DCDW 相が実現している。相転移については秩序変数の変化の連続性から、弱い DCDW-HCC 相間は 2 次相転移であると分かる。一方、HCC-強い DCDW 相間については、 q の不連続性から、1 次相転移であると結論付けられる。最後に (c) について、この磁場領域では HCC 相は現れず、相転移は弱い DCDW-強い DCDW 相間で起こっている。特に波数の不連続な変化に注目すれば、これは 1 次相転移であることが分かる。

第5章 有限クォーク質量効果を取り入れた カイラル非一様相

第4章では、カイラル非一様相の物理を理解する試みとして、カイラル非一様相における外部磁場の効果を議論した。外部磁場の存在は非一様相な QCD 相図において、カイラルアノマリーに起因する相構造の定性的な変化をもたらした。そこで本章では次の試みとして、current quark mass の効果を取り入れて非一様相について議論する。

第3章では BdG 方程式の解となるように非一様構造の解を決定していたが、これはカイラル極限の下で定式化されていたことに注意。ひとたび current quark mass がスイッチされれば、BdG 方程式の形そのものが変化する。従って、カイラル極限で求められていた非一様構造の関数形は、一般に有限なクォーク質量を持つ系で BdG 方程式の解とはならない。有限クォーク質量効果を議論する為には、我々は current quark mass を方程式に取り入れ、非一様構造の関数形を新たに導出する必要がある。

本研究は $N_f = 2$ の場合を考えているので、その current quark mass は高々 5MeV 程度である。この値は非一様相の現れる化学ポテンシャル領域 ($\mu \sim 300 - 400\text{MeV}$) や構成子クォーク質量 ($m \sim 330\text{MeV}$) と比べて十分小さいので、一見すると有限クォーク質量効果は小さく、無視できてしまうように思われる。しかしながら、以下で見るように、この効果は QCD の相構造を大きく変化させる可能性を持っている。

まず始めに、我々が興味を持っているのはカイラル対称性の自発的破れであり、これを議論する上で重要となる物理的自由度はハドロン物理ではパイオンおよびシグマメソンであることに注意する。カイラル極限ではカイラル対称性は厳密に成立する為、パイオンは 0 質量の NG 粒子であった。しかし、current quark mass が存在する場合、もはやカイラル対称性はあらわに破れており、従ってパイオンは近似的な NG 粒子と考えなくてはならない。実際、この効果によってパイオンは有限質量 ($m_\pi \sim 138\text{MeV}$) となることがカレント代数を用いた議論などで知られている。この値は非一様相が現れる領域の温度・密度の値および構成子クォーク質量に比べ十分小さいとは言い難く、従って current quark mass の効果は無視することができない。特に高温領域における相境界付近では構成子クォーク質量はパイオン質量と同程度まで小さくなるため、素励起としてのパイオンモードは相対的に重要性が増すと考えられる。即ち、LP 付近ではより質量効果による非一様構造の変形が大きくなることが期待される。

カイラル極限の場合、典型的には非一様構造の振幅または位相にのみ空間変調を持つ構造が知られており、それぞれ RKC または DCDW と呼ばれていた。これらのうち、RKC タイプの非一様構造に関しては有限クォーク質量の場合に対しても BdG 方程式の解が知られている [85–87]。これらの研究では、カイラル極限の場合と同様 BdG 方程式を非一様構造の関数形を実際に制限した上で適当な ansatz を課し、NLSE を用いた手法と同様に無矛盾な解を見つけている。有限クォーク質量の場合は、BdG 方程式は Lamé 方程式 [88] に変形され、これは NLSE と同様可解な方程式として知られている [89]。これを無矛盾に解くことで、RKC タイプに対する有限クォーク質量を考慮した解を求めることができる。

一方で、DCDW タイプの有限クォーク質量の解に関しては、RKC タイプと比べて十分に研究が進んでいるとは言い難い。DCDW タイプの非一様構造に関しては、RKC タイプのように BdG 方程式を何らかの可解な方程式へ変形する方法が開発されておらず、故に有限クォーク質量を持つ場合の非一様構造の関数形すら発見されていない。先行研究の 1 つとして、Maedan による有限クォーク質量効果による非一様構造の変形を無視した議論が挙げられる [90]。彼の研究では、非一様構造の関数形を DCDW に固定し、有限クォーク質量効果を摂動的に熱力学関数に取り入れた。有限クォーク質量による非一様構造の変形効果が比較的小さいと考えられる低温領域では、この手法は近似的には良い結果を与えるかもしれない。しかしながら、変形効果が大きくなると思われる LP 付近では、もはや良い近似であるとは言えないだろう。従って、非一様構造の変形を考慮に入れながら、熱力学を考察できる手法が必要とされている。そこで本章では、著者と Tatsumi によって進められた変分法的アプローチによる議論を紹介する [28]。実際、変分法を用いた議論は $1+1$ 次元系に対しては行われており、非一様構造の関数形は大きく変形することが知られている [91]。

本論に入る前に、RKC と DCDW との間の有限クォーク質量効果が及ぼす定性的な違いについて議論する。カイラル極限の場合、非一様構造は各 $z \in \mathbb{R}$ ごとに chiral surface 上の点を指定していることに注意。本章では荷電対称性を要請している為、 $\phi_1 = \phi_2 = 0$ を仮定する。このとき chiral surface は (ϕ_0, ϕ_3) 平面に制限され、非一様構造の target space は S^1 となる (chiral circle と呼ばれる)。特にカイラル極限の場合、chiral circle 上の任意の点は熱力学的に等価な基底状態を表している。Chiral circle は半径 Δ および偏角 θ によって特徴づけられるが、これらは非一様構造の振幅および位相にそれぞれ対応している。以上の観点の下では、RKC は $\theta = 0$ の下で Δ にのみ空間変調を持つので、chiral circle の動径方向に振動する局在化したモードであると理解できる。一方、DCDW は $\theta = qz$ で特徴づけられているので、chiral circle 全体に渡り等方的に巻き付いたモードであると理解できる。ここで current quark mass がスイッチした場合を考える。有限クォーク質量効果によって chiral circle は変形され、各点はもはや熱力学的に等価ではなくなり、 $\theta = 0$ が熱力学関数の最小点となる。この熱力学関数の変化によって非一様構造は最小点の周りに偏在化すると思われるが、RKC は

すでに $\theta = 0$ に局在化した非一様構造であるので、この効果が非一様構造に与える影響は定量的である。一方 DCDW については、chiral circle の変形の為にもはや等方的に巻き付くことは熱力学的に不利であり、 $\theta = 0$ 付近に偏在した非一様構造になると考えられる。従って、DCDW は質量効果によって等方的な巻き付きモードから偏在化した巻き付きモードへと、定性的に変化すると考えられる。この意味においても、DCDW に対して有限クォーク質量効果を考えることは意義深いと言える。

5.1 変分法的アプローチ

本節では変分法を用いた、有限なクォーク質量を持つ系に対するカイラル非一様相の解析手法について議論する。以下ではこれまでと同様 NJL 模型を用いて議論する。一般には u クォークと d クォークの質量は異なるものの、ほぼ同程度であるので、簡単の為 $m_u = m_d \equiv m_c$ とする。章の始めに述べたように、RKC タイプの構造に関しては既に関数形が知られているので、ここでは DCDW タイプの構造に特化して考える。そこで、未知の非一様構造に対して次のように試行関数を課す：

$$\langle \phi_0(z) \rangle \equiv -2G \langle \bar{\psi} \psi \rangle = \Delta \cos \theta(z), \quad (5.1.1)$$

$$\langle \phi_3(z) \rangle \equiv -2G \langle \bar{\psi} i \gamma_5 \tau_3 \psi \rangle = \Delta \sin \theta(z). \quad (5.1.2)$$

ここで $\theta(z)$ はカイラル極限では $\theta(z) = qz$ に対応しており、ここでは変分的に決定されるべき未知関数である。また、chiral circle の動径方向の変形の効果は小さいと考え、 Δ は空間変調していないものとしている。(5.1.1) 式および (5.1.2) 式を NJL 模型のラグランジアン (2.0.2) 式に代入し、MFA の下で

$$\mathcal{L}_{\text{MF}} = \bar{\psi} [i \not{\partial} - m - U(\theta(z))] \psi - \frac{\Delta^2}{4G}, \quad (5.1.3)$$

を得る。ここで $m = m_c - \Delta$ は構成子クォーク質量を表し、 $U(\theta(z)) \equiv -\Delta \exp(i \gamma_5 \tau_3 \theta(z)) - m + m_c$ である。クォーク場に関して汎関数積分を実行すると、MFA の下での熱力学関数の表式を得る：

$$\Omega_{\text{MF}} = -T \text{Tr} \log [i \not{\partial} - m + \mu \gamma_0 - U(\theta(z))] + \frac{\Delta^2}{4G} V.$$

上式において V は系の体積を表し、 Tr は N_f, N_c および松原振動数に関する和および空間変数に関する積分を表す。

5.1.1 非一様構造の決定

熱力学関数が $\theta(z)$ の汎関数として与えられたので、ここから HF 方程式を求めると

$$H_D \psi_\alpha = E_\alpha(\theta) \psi_\alpha, \quad (5.1.4)$$

$$\Phi(z) = \langle \phi_0(z) \rangle + i \langle \phi_3(z) \rangle = -2G (\langle \bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha \rangle + i \langle \bar{\psi}_\alpha i \gamma_5 \tau_3 \psi_\alpha \rangle) = \Delta e^{i\theta(z)}. \quad (5.1.5)$$

となる。ここで H_D は Dirac 演算子であり

$$H_D = -i\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + \gamma_0 m + \gamma_0 U(\theta(z)).$$

で定められる。(5.1.4) 式および (5.1.5) 式が自己無撞着的に解ければ、有限クォーク質量を持つ系に対する位相が空間変調した一般的な解を見つけたことになる。しかしながら、カイラル極限でもそうであったように、これを解析的に実行することは難しい。そこで次善の策として、以下で述べるような変分法的なアプローチを提案する。先行研究では 1+1 次元系において current quark mass の効果を変分的に取り扱っているが、これによると $\theta(z)$ の関数形は sine-Gordon(SG) 方程式を満たすことが知られている [91]。Sec. 3.2 で議論したように、1+1 次元系で得られた非一様構造は 1+3 次元系へ埋め込むことができることに注意。変分法によって導出された解は厳密ではないため、一概に同様のことが言えるとは限らないが、1+3 次元系においても同様の方程式が導出されることが期待される。

構造決定の方程式の導出の為に、以下で定義されるクォーク伝播関数を定義する：

$$S_0(x, y) = \frac{1}{i\not{\partial} + \mu\gamma_0 - m} \delta(x - y).$$

ここで Ω_{MF} を S_0 を用いて書き直し、これを Taylor 展開すると

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{MF}} &= -T \text{Tr} \log [S_0^{-1} - U(\theta(z))] \\ &= -T \text{Tr} \log [S_0^{-1} (1 - S_0 U(\theta(z)))] \\ &\sim -T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} \left(\frac{1}{i\not{\partial} + \mu\gamma_0 - m} U(\theta(z)) \right)^n. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

を得る。ここで (5.1.6) 式では簡単の為 $\text{Tr} \log S_0^{-1}$ を落としていることに注意。この項は非一様構造を決定する際に影響を与えない。いま Ω_{MF} は $U(\theta(z))$ およびその微分によって無限次まで展開されている。そこでこれを微分の次数で展開することを考える。具体的に $\mathcal{O}(\partial^2)$ まで展開すると [92, 93]、有効的な熱力学関数の表式は以下の通り：

$$\Omega_{\text{MF}}^{\text{der}} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} f_\pi^{*2} (\partial_z \theta(z))^2 - \frac{1}{2G} m_c \Delta \cos \theta(z) \right], \quad (5.1.7)$$

ここで f_π^* はパイオンの崩壊定数であり、表式は

$$f_\pi^{*2} = \frac{N_f N_c m^2}{16\pi^3} \left[2\pi \text{Ei}(-m^2) - \sum_{s=\pm} \int d^3p \frac{1}{E^3} \frac{1}{1 + e^{\beta(E+s\mu)}} \right],$$

で与えられる。Ei(x) は指数積分であり、 E は $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ と定義されている。また (5.1.7) 式の $\mathcal{O}(\partial^2)$ の項は、(5.1.6) 式の $n = 2$ の項において $\mathcal{O}(m_c)$ まで捨てることで求まる：

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \int d^4x d^4x' \text{tr} \frac{1}{i\not{\partial} + \mu\gamma_0 - m} \delta^4(x - x') (-\Delta \cos \theta(x') - m + m_c) \\ & \quad \times \frac{1}{i\not{\partial}' + \mu\gamma_0 - m} \delta^4(x' - x) (-\Delta \cos \theta(x) - m + m_c) \\ & \rightarrow \frac{1}{2G} m_c \Delta \int d^4x \cos \theta(z). \end{aligned}$$

(5.1.7) 式から $\theta(z)$ に対する EOM を求めると、構造決定の方程式として

$$\frac{d^2\theta(z)}{dz^2} - m_\pi^{*2} \sin \theta(z) = 0, \quad (5.1.8)$$

を得る。ここで m_π^* はパイオンの媒質中での質量であり、Gell-Mann-Oakes-Renner 関係式を用いて導出した [94]。(5.1.8) 式は SG 方程式そのものであり、1 + 1 次元で得られた結果と実際に対応していることが分かる。またカイラル極限では $m_\pi^* \rightarrow 0$ となるので、SG 方程式は Klein-Gordon 方程式に帰着する。このとき SG 方程式は線形化されるので、 $\theta(z) = qz$ が解になる。これは DCDW そのものであり、我々のアプローチがカイラル極限へ連続的に繋がっていることを保証している。(5.1.8) 式において、左辺第 1 項は大ざっぱに非一様構造の波数の 2 乗と対応していると考えられる。従って、 $|\partial\theta/\partial z| \gg m_\pi^*$ であるならば、第 2 項からの寄与は無視することができる。このような場合、DCDW は有限クォーク質量を持つ系に対しても良い近似となっている。一方 $|\partial\theta/\partial z| \sim m_\pi^*$ の場合は、第 2 項からの寄与はもはや無視することができず、得られる非一様構造は DCDW から大きく変形することが分かる。

SG 方程式の解のうち今回の議論で DCDW から連続的な変形で得られる解は、Jacobi の振幅関数 $\text{am}(x, k)$ を用いて

$$\theta(z) = \pi + 2\text{am}\left(\frac{m_\pi^* z}{k}, k\right), \quad (5.1.9)$$

のように求まる。ここで $0 \leq k \leq 1$ は振幅関数の母数である。

本小節の最後に $\theta(z)$ の典型的な振る舞いを述べる。まずは $k \rightarrow 0$ の極限について。am(x) $\rightarrow x$ に注意すると、以下の表式を得る：

$$\theta(z) \rightarrow \pi + \frac{2m_\pi^*}{k} z \quad \text{when } k \rightarrow 0.$$

これは非一様構造は $k \rightarrow 0$ の極限において DCDW へ帰着されることを示す。一方逆の極限である $k \rightarrow 1$ について。 $\text{am}(x) \rightarrow \arcsin \tanh(x)$ に注意すると、以下の表式を得る：

$$\theta(z) \rightarrow \pi + 2 \arcsin \tanh \left(\frac{m_{\pi}^* z}{k} \right) \quad \text{when } k \rightarrow 1.$$

この振る舞いは $\theta(z)$ は 1 点に局在した sine-Gordon kink へと帰着されることを表す。Sec. 3.1 で議論したように、非一様構造が kink 型であるときはエネルギースペクトルのバンド幅の測度が 0 になることに注意。このような場合、バンドギャップからの寄与は熱力学関数に影響を与えない。従って、 $k \rightarrow 1$ の極限では一様構造と非一様構造の区別が付かず、これも広義には一様構造が実現していると考えてよい。以上をまとめると、 k は増加するに従って chiral circle 上での偏在化が進み、特に $k \rightarrow 1$ の極限では一様構造が実現していることが分かった。

5.1.2 熱力学関数の表式

非一様構造の関数形が定まったので、これを用いて熱力学関数の表式を導出する。熱力学関数の表式は得られた $\theta(z)$ を HF 方程式 (5.1.4) 式および (5.1.5) 式に代入し、これが無矛盾に解ければ求まるのだが、依然としてこれは困難である。これを克服する為に、以下のような手法を用いる。

まずは $\theta(z)$ の具体的な表式より、 $d\theta(z)/dz = (2m_{\pi}^*/k)\text{dn}(m_{\pi}^*z/k, k)$ であることに注意する。 $\text{dn}(x, k)$ は平均値の周りを振動するような構造を持つ。 $d\theta(z)/dz$ は非一様構造の波数に対応する量であるので、この波数を用いて HF 方程式の解となる波動関数を近似することを考える。DCDW の場合、HF 方程式の解は $\psi_{\pm} = \exp(i\gamma_5\tau_3qz/2)\exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})u_{\pm}$ で与えられている [37]。ここで \mathbf{p} は非一様構造の波数であり、これを以下で定義される q を用いて近似する：

$$q \equiv \langle \partial_z \theta(z) \rangle = \frac{\pi m_{\pi}^*}{k\mathbf{K}(k)},$$

近似した波動関数を (5.1.4) 式に代入し、 $\theta(z)$ を波数を用いて $\theta(z) = qz + \delta\theta(z)$ と書く。もし $\delta\theta(z)$ の熱平均が消えれば、HF 方程式は自己無撞着的に満たされる。 $\langle \delta\theta(z) \rangle$ が十分小さければ変分法的アプローチは近似的に正しい結果を与えているだろう。理論の枠組みのみでは、このアプローチの正しさは確かめることはできないので、妥当性については数値計算結果を鑑みることで推し量ることにする。

以上の近似の下で、熱力学関数の表式は次の通り：

$$\Omega_{\text{MF}} \simeq \Omega_{\text{DCDW}} + \Omega_{\text{SB}} + \frac{\Delta^2}{4G}V, \quad (5.1.10)$$

$$\Omega_{\text{DCDW}} = -T\text{Tr} \log[S_{\text{ref}}^{-1} + \mu\gamma_0],$$

$$\Omega_{\text{SB}} = -T\text{Tr}[(S_{\text{ref}}^{-1} + \mu\gamma_0)^{-1}F(m_c; \theta(z))].$$

ここで S_{ref} は DCDW の伝播関数である: $S_{\text{ref}}^{-1}(\theta(z)) = i\partial - m + q/2\tau_3\gamma_5\gamma_3$ 。また (5.1.10) 式において、有限クォーク質量効果は $\mathcal{O}(m_c)$ まで取り入れ、この寄与を $F(m_c; \theta(z)) \equiv -m_c(\cos(\theta(z)) - 1 + i\gamma_5\tau_3 \sin(\theta(z)))$ と表した。 Ω_{DCDW} は波数 q での DCDW の熱力学関数あり、 Ω_{SB} がカイラル対称性のあらわな破れから来る寄与を表している。カイラル極限では $\theta(z) \rightarrow qz$ および $\Omega_{\text{SB}} \rightarrow 0$ となることに注意。具体的な $\theta(z)$ の表式 ((5.1.9) 式) を (5.1.10) 式に代入することで、最終的な熱力学関数の表式を得る：

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{MF}} &= \Omega_{\text{DCDW}} + \Omega_{\text{SB}} + \frac{\Delta^2}{4G}V, \\ \Omega_{\text{DCDW}} &= \Omega_{\text{vac}} + \Omega_{\text{thermal}}, \\ \Omega_{\text{vac}}/V &= \frac{N_f N_c}{8\pi^{3/2}} \sum_{s=\pm} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{5/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \left[e^{-(\sqrt{p_z^2 + m^2 + sq/2})^2 \tau} \right], \\ \Omega_{\text{thermal}}/V &= -N_f N_c T \sum_{s,l=\pm} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\log \left\{ e^{-\beta((p_x^2 + p_y^2 + (\sqrt{p_z^2 + m^2 + sq/2})^2)^{1/2} + l\mu)} + 1 \right\} \right], \\ \Omega_{\text{SB}}/V &= -N_f N_c \Delta m_c \frac{m_\pi^*}{2k\mathbf{K}(k)} \int_0^{\frac{2k\mathbf{K}(k)}{m_\pi^*}} dz (1 - \cos \theta(z)) \\ &= N_f N_c f_\pi^* m_\pi^{*2} \frac{2}{k^2 \mathbf{K}(k)} [\mathbf{E}(k) - (1 - k^2) \mathbf{K}(k)],\end{aligned}\tag{5.1.11}$$

ここで $\Omega_{\text{vac}}, \Omega_{\text{thermal}}$ は Ω_{DCDW} における真空部分の寄与および媒質からの寄与をそれぞれ表し、特に真空部分に関しては PTR を用いて正則化した。

5.2 数値計算結果および議論

本節では前節で得られた熱力学関数の表式を用い、有限クォーク質量効果を取り入れた DCDW タイプの QCD 相構造および非一様相の熱力学的性質について議論する。(5.1.11) 式において、各 T, μ ごとに Δ, k の値は未知であることに注意。これらを熱力学関数が最小化されるように決定することで、各 T, μ ごとに熱力学的に最も優位な非一様構造が明らかになる。以下ではまず始および終境界線上における物理量の振る舞いについて調べ、その後 DCDW 相内部での相構造について議論する。尚、本節で得られる結果は先行研究 [37] との対応を考え、全て $\Lambda = 850\text{MeV}, G\Lambda^2 = 6$ の下で計算している。

5.2.1 始境界線について

まずは始境界線について議論する。一様相は $k \rightarrow 1$ の極限に対応していることに注意。

始境界線の位置をいくつかの m_c の値について T - μ 平面上の QCD 相図上に与えたものを図 5.1 に示す。いずれの線でも、 $k < 1$ の場合と $k \rightarrow 1$ の場合が熱力学的に等価になる点を

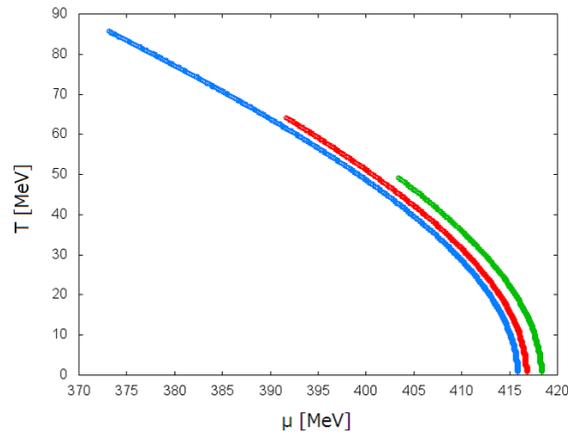


図 5.1: T - μ 平面上での始境界線をいくつかの m_c の値で描いた。青線、赤線、緑線はそれぞれ $m_c = 0, 2, 5\text{MeV}$ の場合に対応している。

以って、始境界線を定めている。いずれの有限クォーク質量の場合 (赤線・緑線) でも、カイラル極限 (青線) の場合と同様に、DCDW 相が出現していることが分かる。

ところで、有限クォーク質量の場合は一様相と回復相の区別が付かないため、カイラル極限の場合のように LP を定義することはできない。本研究では、非一様相が QCD 相図上に現れる温度の上限を以って、近似的に LP を定義する。このような定義の下、図 5.1 より m_c の増加に伴って LP の位置は T が減少かつ μ が増加する方向に単調に移動していることが分かる。このような振る舞いは、一様構造に限定して求めた QCD 相図における、CEP の振る舞いと同様であることに注意。カイラル極限では LP と TCP が同一点に出現していたことを思い出すと、以上の結果は有限クォーク質量の場合において LP と CEP が一致または近い位置に出現することを示唆している。

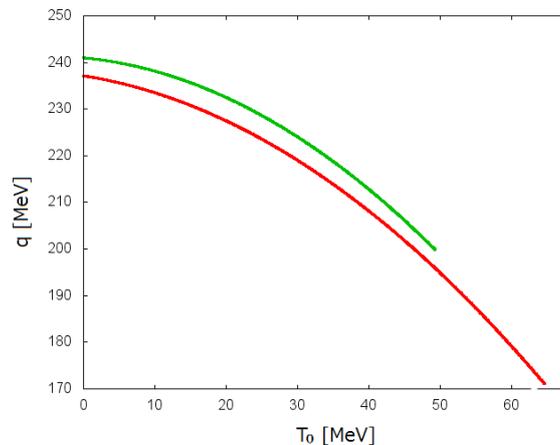


図 5.2: 始境界線上での q の値の変化。赤 (青) 線は $m_c = 2$ (5)MeV の場合に対応している。

次に始境界線上での物理量の変化について議論する。図 5.2 に始境界線上での波数の変化を T_0 の関数として表した (以下では T_0 は始境界線上の温度を表す)。図 5.2 より、温度の上昇に伴い波数は単調に減少していることが分かるが、この振る舞いはカイラル極限で得られる結果と同様である。一様相では $q = 0$ が実現しているため、始境界線上では構成子クォーク質量が有限であることを注意する。この結果は、始境界線がカイラル極限の場合と同様 1 次相転移線であることを示している。

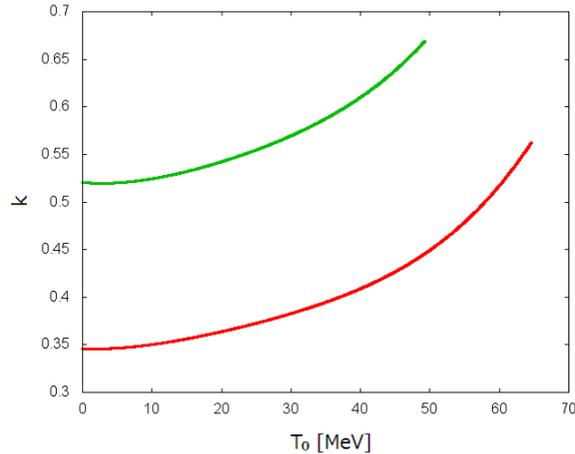


図 5.3: 始境界線上での k の値の変化。赤 (青) 線は $m_c = 2$ (5) MeV の場合に対応している。

一方、カイラル極限の場合と有限クォーク質量の場合とで定性的に異なる振る舞いも見受けられる。カイラル極限では LP で $q = 0$ MeV となっていたことに注意。有限クォーク質量の場合は LP でも q の値は有限に留まり、不連続に変化している。このような振る舞いは図 5.3 から理解できる。図 5.3 では始境界線上の k の変化を T_c の関数として描いたものであるが、いずれの m_c の場合でも LP 近傍でも k は有限に留まっていることが分かる。この振る舞いは、熱力学関数における Ω_{SB} の寄与から理解することができる。 Ω_{SB} は $k \rightarrow 1$ の極限で $\Omega_{\text{SB}} \rightarrow 0$ となることに注意。この項は常に正の寄与を与えているので、従って非一様構造を常に不利にするよう働いている。以下では $T = 0$ から温度を上昇させていき、非一様相が存在する化学ポテンシャル領域を探索することを考える。カイラル極限の場合は $\Omega_{\text{SB}} = 0$ が常に成立しているため、 $q \rightarrow 0$ となるまで非一様相が熱力学的に優位に存在している。一方、有限クォーク質量の場合は $\Omega_{\text{SB}} > 0$ であるため、 $q \rightarrow 0$ となる前に非一様相が消滅してしまう。従って、図 5.2, 5.3 で見られるような不連続な振る舞いを示すと考えられる。

LP 付近のこのような振る舞いをより確実に理解する為には、例えば gGL を用いた解析などが有効であると考えられる。この点に関しては、今後の展望としたい。

LP 付近で $k \rightarrow 1$ のような極端な振る舞いは現れなかったものの、 T の上昇に伴い k の値は単調に増加しているため、低温領域と LP 付近とでは非一様構造に質的な変化が現れるは

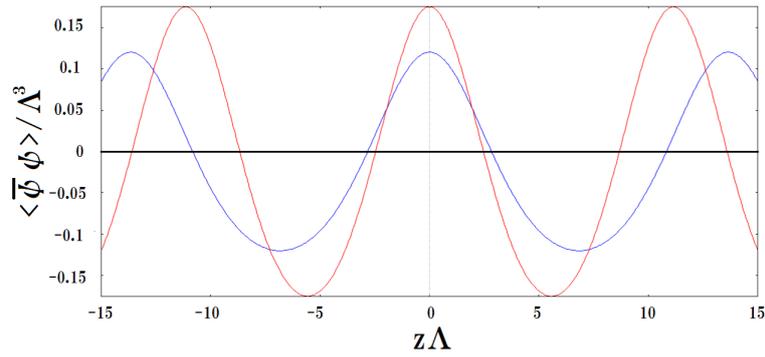


図 5.4: 始境界線上での $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ の関数形の典型的な振る舞い。赤線は $T = 0$ での振る舞いを表し、青線は LP 近傍での振る舞いをそれぞれ表す。

ずである。図 5.4 にこれらの温度領域における始境界線上での関数形を描いた。赤線と青線と比較すれば、 $T = 0$ の場合と比べて LP 付近では $\theta = \pi$ に非一様構造が偏在化していることが分かる。

本研究では熱力学関数を計算するにあたり、 $\langle \theta(z) \rangle = q$ と平均化していたことに注意する。これは専ら熱力学関数を計算する為に課した要請であり、その妥当性については数値計算結果を通じて吟味されなくてはならない。具体的には、 $\langle \theta(z) \rangle$ の値が平均値から大きく振動している場合、この要請はもはや適切であるとは言えない。そこで、振動の大きさを測る指標として、 $\theta(z)$ の分散の期待値の温度変化を始境界線上で調べる。以下では $Var \equiv \sqrt{\langle (\partial_z \theta(z) - \langle \partial_z \theta(z) \rangle)^2 \rangle}$ とする。具体的な表式は以下の通り：

$$Var = \sqrt{\frac{4(m_\pi^*)^2 \mathbf{E}(k)}{k^2 \mathbf{K}(k)} - q^2}.$$

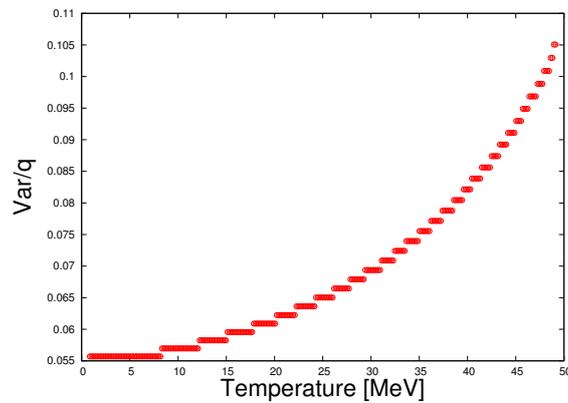


図 5.5: 始境界線上での Var の値の変化 ($m_c = 5\text{MeV}$)。

図 5.5 に始境界線上の Var/q の値の変化を T の関数として描いた。分散の大きさは平均値

と比較されるべきである。即ち、 Var/q の値が大きければ大きい程、熱力学関数の計算において分散の効果が無視できなくなることを意味する。図 5.5 より、分散の値は温度の上昇と共に単調に増加することが分かる。しかし、全温度領域に対して平均値(波数)の高々10%程度の値である。従って、本研究で熱力学関数の計算の為に用いた近似は、温度の上昇と共に単調にその妥当性が失われるものの、高々10%程度の誤差しか与えないと考えられる。

本小節の最後に、非一様構造の「変形度合い」を表す指標について議論する。前節で述べたように、SG方程式の解は $|\partial\theta(z)/\partial z|$ と m_π^* の大きさの比によって関数形が定性的に変化していた。即ち、 $|\partial\theta(z)/m_\pi^*\partial z|$ の値が大きければ大きい程偏在化した解を表している。数値計算を実行するにあたり $\partial\theta(z)/\partial z$ は平均化され q で与えられていた。そこで、始境界線上の m_π^*/q の値を調べることで、非一様構造の偏在度合いを議論する。

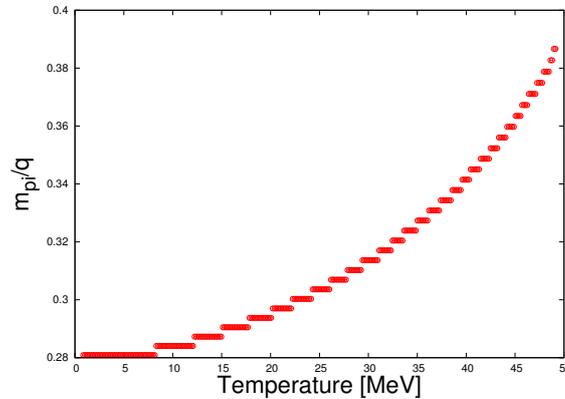


図 5.6: 始境界線上での $|\partial\theta(z)/m_\pi^*\partial z|$ の値($m_c = 5\text{MeV}$)。

図 5.6 に始境界線上での $|\partial\theta(z)/m_\pi^*\partial z|$ の値を描いた。 m_π^*/q の値は温度の上昇と共に単調に増加している、即ち非一様構造は単調に偏在化していることが分かる。しかしながら、値の変化は極端には現れない。これはLP付近で $k \rightarrow 1$ まで上昇しない為であり、もし $k \rightarrow 1$ が実現する場合 $m_\pi^*/q \rightarrow \infty$ となり、非一様構造は1点に局在化する。

5.2.2 終境界線について

次に終境界線に関して議論する。終境界線の位置の決定は、始境界線のそれと比べて困難がある。まず始めにこの困難さについて言及する。

図 5.7 に非一様構造も考慮した場合の熱力学関数(Ω_{MF})と一様構造に限定した場合の熱力学関数(Ω_{homo})との差 $\delta\Omega = \Omega_{\text{MF}} - \Omega_{\text{homo}}$ を、 $m_c = 5\text{MeV}, T = 0\text{MeV}$ の下で μ の関数として描いた。 $\delta\Omega < 0$ の化学ポテンシャル領域が非一様相の領域と対応している。図 5.7 から、 $T = 0\text{MeV}$ では始境界線は $\mu = 418\text{MeV}$ で与えられ、終境界線は $\mu = 456\text{MeV}$ で与えられ

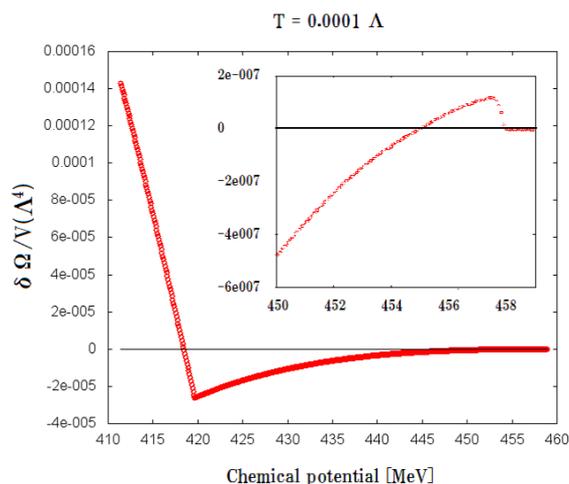


図 5.7: 非一様構造と一様構造間の熱力学関数の値の差を $m_c = 5\text{MeV}, T = 0.85\text{MeV}$ で μ の関数として描いた。グラフの右上に終境界線近傍の拡大図を載せている。

ていることが分かる。まず始境界線では、 $\delta\Omega$ は μ の上昇に伴い急激に減少していることに注意する。このような急激な振る舞いの為に、始境界線の位置は多少の数値誤差およびその他の要因に影響されることなく決定することができる。一方終境界線付近では、 $\delta\Omega$ の値は広範囲の μ に渡り 0 近傍を取っている。このようななだらかな振る舞いの為に、終境界線の位置は熱力学関数の値を変える要因に関して非常に敏感である。図 5.7 における終境界線付近の拡大図を見れば分かるように、終境界線の位置自体は非常に小さな差を拾うことにはなるものの、数値的に決定することができる。以下では、ひとまず数値計算結果を信頼して議論を進めるものとする。終境界線の不確定さは境界付近の物理を大きく変化させる可能性があるが、これに関しては次小節で議論する。

終境界線の位置をいくつかの m_c の値について T - μ 平面上の QCD 相図上に与えたものを Fig. 5.8 に示す。始境界線の場合と同様、いずれの有限クォーク質量の場合 (赤線・緑線) でも、カイラル極限 (青線) の場合と同様に、DCDW 相が出現していることが分かる。

図 5.9 に終境界線上での構成子クォーク質量の値を描いた。以下では終境界線上の温度を T_t と表す。いずれの線でも、 T_t の上昇と共に m が増加していく傾向を示している。また、いずれの温度領域においても、終境界線上で非一様相と回復相の m の値は有限であり、かつ不連続に変化していることが分かる。このことから、終境界線は 1 次相転移を示しているように思われる。ただし、この帰結はカットオフの取り方に起因する人工的な結果の可能性があるので注意する。本研究では $\Lambda = 850\text{MeV}$ としているが、このパラメータでは例えカイラル極限の場合においても終境界線で m の値は不連続に変化する [37]。一方、 $\Lambda = 660.37\text{MeV}$ での議論では、このような不連続性は起こらないことが知られている。以上をまとめると、構成子クォーク質量の有限性に関しては、一様構造に限定した場合の振る舞いから鑑みても

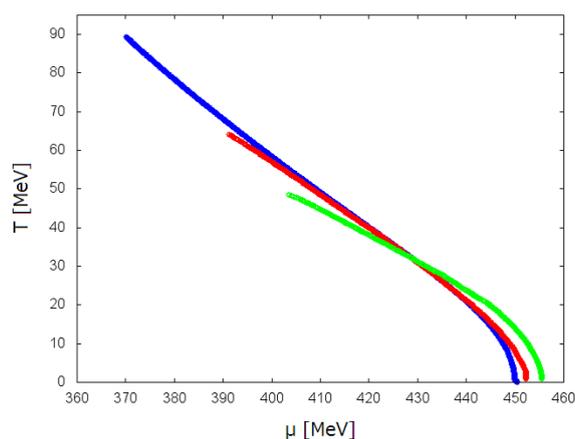


図 5.8: T - μ 平面上での終境界線をいくつかの m_c の値で描いた。青線、赤線、緑線はそれぞれ $m_c = 0, 2, 5\text{MeV}$ の場合に対応している。

明らかであり、十分に信用できる帰結であると言える。一方不連続性に関しては、カットオフの取り方によって得られる結果に定性的な差異が生じる以上、安易に信用してはならない。従って、相転移の次数の決定については図 5.9 のみから判断せずに、終境界線上の他の物理量も比較することで決定する。

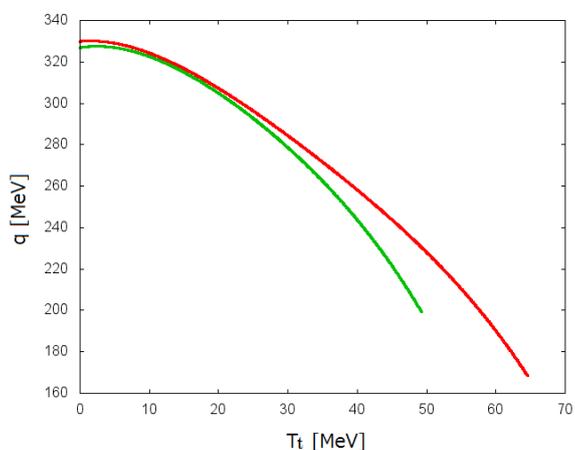


図 5.10: 終境界線上での q の値の変化。赤 (青) 線は $m_c = 2$ (5) MeV の場合に対応する。

終境界線の相転移の次数を議論する為に、図 5.10 に終境界線上の q の値の変化を描いた。いずれの線でも始境界線と同様に、 q は相境界上で不連続に変化していることが分かる。また、LP 付近においても q が有限に留まる振る舞いも始境界線で得られた結果と無矛盾である。波数の不連続性、 T_t の上昇に伴う単調減少性はカイラル極限で得られる結果と同じであるが、これは定性的には異なる帰結を導く。カイラル極限の場合、 q の有限性にも関わらず終境界線は 2 次相転移であったが、これは相境界上で $m = 0$ となっている為である。即ち、

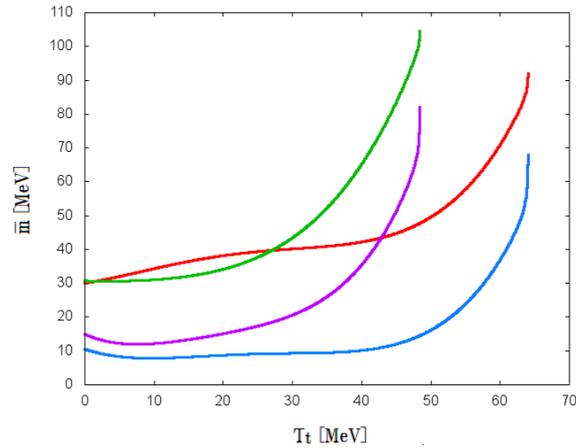


図 5.9: 終境界線上での構成子クォーク質量 (m) の変化。赤 (緑) 色線は $m_c = 2$ (5)MeV での非一様相における構成子クォーク質量を表す。青 (紫) 線は回復相における構成子クォーク質量を表す。

$m = 0$ では q の値に依らず非一様構造自体が値を持たない為、 q は相転移の次数を議論するにあたり有意な熱力学変数とはならない。一方、図 5.9 の結果から、有限クォーク質量の場合は終境界線上でも m は有限に留まっていることに注意する。構成子クォーク質量の有限性の為に、 q の値は相転移の次数を決定する際に有意な変数となっている。従って、 q が任意の T_t で不連続に変化することから、終境界線はカイラル極限の場合と異なり 1 次相転移を示している。

5.2.3 Dual Chiral Density Wave 相について

続いて DCDW 相について議論する。

図 5.11 に有限クォーク質量効果を取り入れた QCD 相図を描いた。カイラル極限の場合と同様、 $m_c = 2, 5$ MeV の場合に対しても非一様相が T - μ 平面上に出現することが分かる。また、RKC タイプでの議論と同様、非一様相の領域は m_c の増加に伴い単調に減少していることが分かる [42]。

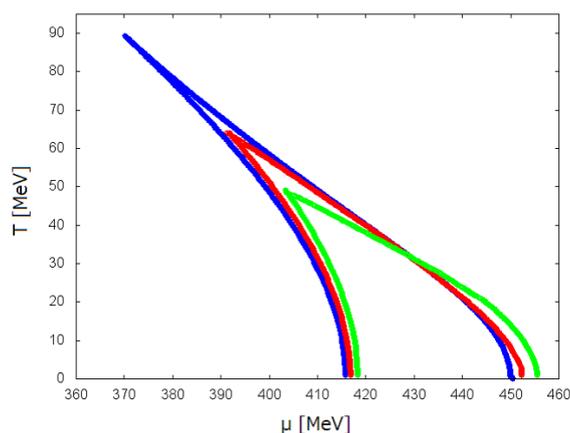


図 5.11: 有限クォーク質量効果を取り入れた非一様な QCD 相図。各線で囲まれた領域が非一様相を表し、外側の領域は一様相を表す。青線はカイラル極限の場合の結果を表し、赤 (緑) 線は $m_c = 2$ (5) MeV の場合の結果をそれぞれ表す。

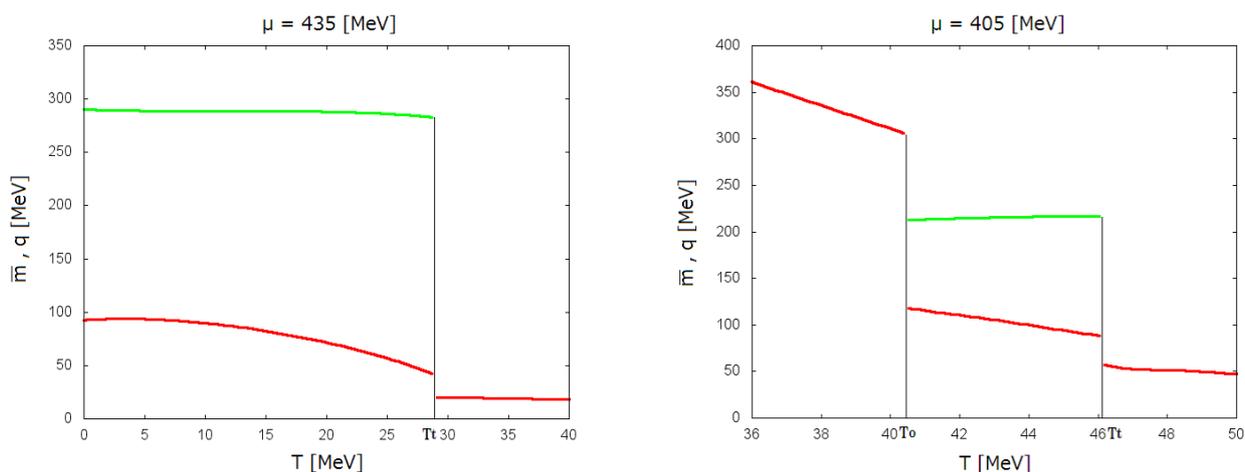


図 5.12: 構成子クォーク質量 (m) および波数 (q) の温度依存性を $m_c = 5$ MeV の下で描いた。左 (右) 図は $\mu = 435$ (405) MeV に固定している。

次に μ を固定の下で、DCDW 相の物理量の温度変化を図 5.12 に描いた。両図において、 m の値は T の増加に伴い単調に減少していることが分かる。また、 q の値は T の変化に関してほとんど値を変えない。

左図は $T = 0$ から DCDW 相が出現している為、始境界線は存在しないことに注意。終境界線は $T_t = 38$ MeV で与えられており、ここで m, q が不連続に変化していることが分かる。一方、右図に関しては、低温では一様相が出現していることに注意。始境界線は $T_o = 41$ MeV で、終境界線は $T_t = 46$ MeV で与えられており、いずれの相境界でも m, q は共に不連続に変化していることが分かる。いずれの場合についても、相境界上で m は有限であり q は大きく

不連続に変化する。従って、以上の結果は始および終境界線が共に 1 次相転移であることを表しており、前節で得られた結論と無矛盾である。

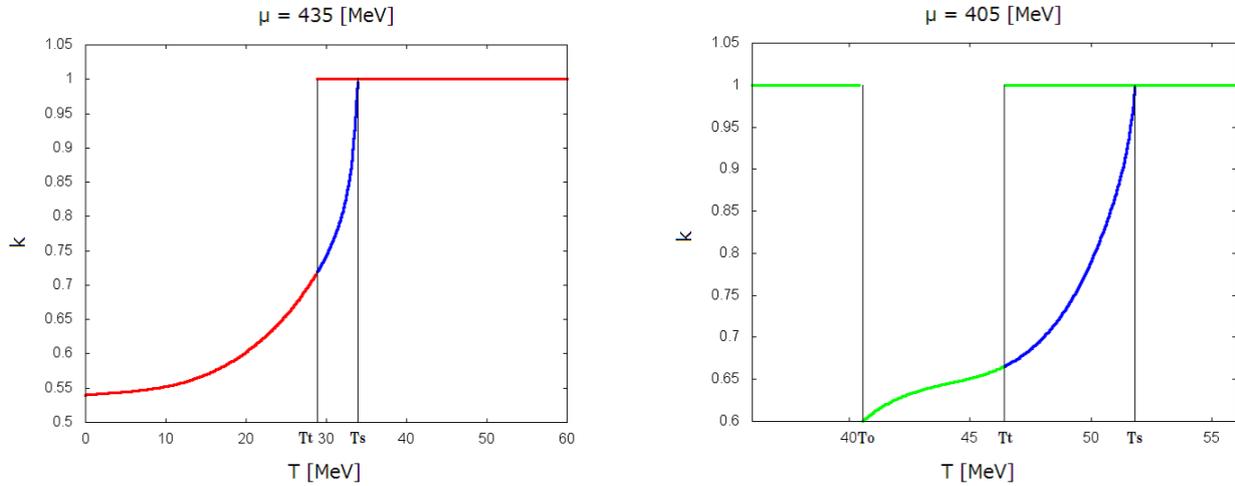


図 5.13: 母数 (k) の温度依存性を $m_c = 5\text{MeV}$ の下で描いた。左 (右) は $\mu = 435$ (405) MeV に固定している。青線は、非一様構造が熱力学関数の極小 (\neq 最小) 点として存在する領域を表している。

本小節の最後に DCDW 相内の母数の値の変化および、終境界線の相構造の変化の可能性について言及する。 μ を固定の下で、DCDW 相の母数の温度変化を図 5.13 に描いた。両図において、 k の値は T の上昇に伴い単調に増加し、 $T = T_t$ で不連続に変化している。特に右図においては低温領域で一様相が実現しているので、 $T = T_o$ でも k は不連続に変化する。従って、DCDW 相では温度の上昇に伴い非一様構造はカイラル極限での DCDW から kink 型の構造へと単調に変化していることが分かる。この結果は図 5.12 の結果と無矛盾である。

ここで両図における青線に着目する。青線に対応する領域では、非一様相は一様相に比べて熱力学的に不利ではあるものの、熱力学関数の極小点として存在している。青線領域では、 k の値は急激に上昇し最終的に $k \rightarrow 1$ へと至る。以下では $k \rightarrow 1$ となる温度を T_s と書く。

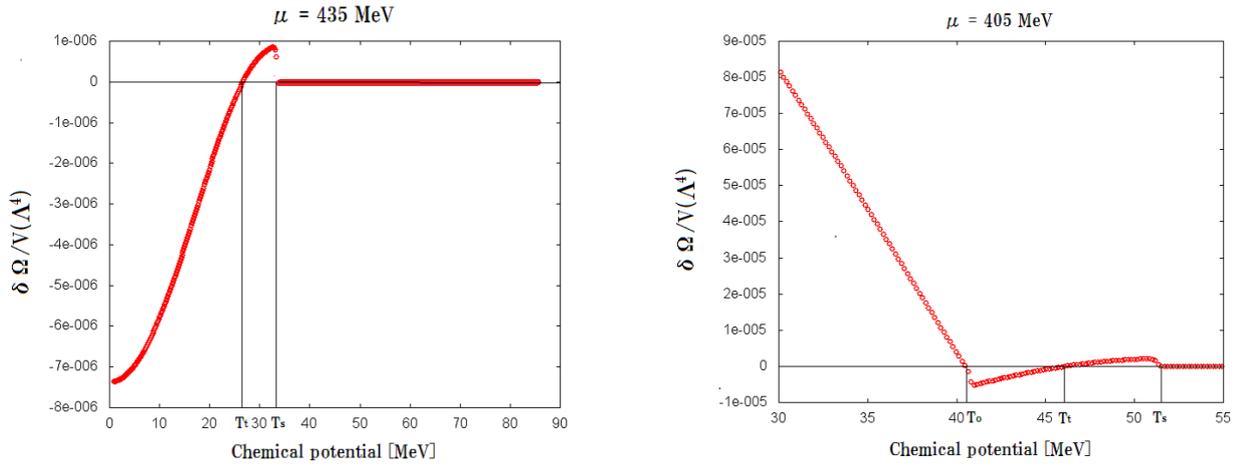


図 5.14: 非一様構造と一様構造の間の熱力学関数の値の差を $m_c = 5\text{MeV}$ で T の関数として描いた。左 (右) は $\mu = 435$ (405)MeV に固定している。

図 5.14 に図 5.13 に対応する μ での熱力学関数の値の差を描いた。両図において、 $T_t < T < T_s$ の領域が図 5.13 における青線に対応している。いずれの場合でも $\delta \Omega$ の値は小さいことに注意。図 5.13 において青線領域では k の値は急激に上昇する為、熱力学関数の値の多少の変化により終境界線上の非一様構造の関数形は大きく変化してしまうことが分かる。

熱力学関数の値を変化させる要因としては、数値誤差以外にも複数の可能性が考えられる。1 つは $\theta(z)$ からのバックリアクションによる補正が挙げられる。本研究では、熱力学関数を導出する際クォークの波動関数を DCDW で近似し、特に $q \equiv \langle \partial_z \theta(z) \rangle$ と近似していたことに注意。本来ならば $\theta(z)$ は平均値 q の周りを振動しているので、この寄与は波動関数に $\theta(z)$ の平均値からの揺らぎに由来するバックリアクションを与える。もう 1 つは m_c の高次項からの補正が挙げられる。本研究では $\theta(z)$ を決定する際に、 $\mathcal{O}(m_c)$ まで熱力学関数に有効的に取り入れて計算していた。高次の m_c からの寄与は $\theta(z)$ の決定には大きな影響は及ぼさないと考えられるが、終境界線では熱力学関数の微小な変化が大きく相構造に大きな影響を与える可能性がある。

特にこれらの影響で $T_t \rightarrow T_s$ となる場合 $k \rightarrow 1$ が終境界線上で実現しているが、これは $q \rightarrow 0$ と対応していることに注意。このとき終境界線上で波数は連続的に変化するので、従って終境界線は 2 次相転移を示す。

5.3 相関関数を用いた議論

最後に相関関数を用いて終境界線の位置について議論する。本来、相関関数を用いた議論は 2 次相転移線の決定について有効な手法であるので、1 次相転移線である終境界線を厳密

に決定することは難しい。議論を始めるにあたり、何故相関関数の解析が厳密ではないか以下で確認する。まず始めに、熱力学関数を構成子クォーク質量 (m) の関数で展開する。カイラル極限の場合、 m の奇数次の係数は 0 であったが、current quark mass を考える場合、1 次の項は一般には残る。以下では与えられた T, μ に対して熱力学関数の最小値を与える m の値を \bar{m} とする。このとき熱力学関数を $m = \bar{m}$ の周りで展開すると、次の表式を得る：

$$\Omega(m, \mathbf{q}) = \Omega(\bar{m}, \mathbf{q}) + \frac{1}{2!} \Gamma_{\text{ps,finite}}^{-1}(0, \mathbf{q})(m - \bar{m})^2 + \dots$$

$\Omega(\bar{m}, \mathbf{q}) = \Omega(\bar{m}, 0)$ が成立するならば

$$\Gamma_{\text{ps,finite}}^{-1}(0, \mathbf{q})|_{|\mathbf{q}|=q_c} = 0, \quad \partial_q \Gamma_{\text{ps,finite}}^{-1}(0, \mathbf{q})|_{|\mathbf{q}|=q_c} = 0,$$

となる点が相転移点を定める。カイラル極限の場合以上の条件を満たし、特に $\bar{m} = 0$ であったので、この点は 2 次相転移を示していた。カイラル極限から離れる場合、一般に $\Omega(\bar{m}, \mathbf{q}) \neq \Omega(\bar{m}, 0)$ である。従って相転移点を決定する為には、これらの差の寄与も考慮しなくてはならない。

しかしながら、 $\Omega(\bar{m}, \mathbf{q}) - \Omega(\bar{m}, 0)$ は current quark mass の効果によって初めて有限の値を取るため、高々 $\mathcal{O}(m_c)$ の量である。さらに、終境界線の熱力学関数を用いた決定は、例えば図 5.7 を見れば分かるように非常に小さな数値誤差に左右されやすい。従って、相関関数の解析を次善の方法として用い、終境界線の目安を与えることは有意義である。

Current quark mass が有限の場合、 $\Gamma_{\text{ps,finite}}^{-1}(0, \mathbf{q})$ の表式は以下の通り：

$$\Gamma_{\text{ps,finite}}^{-1}(0, \mathbf{q}) = \frac{2G}{1 - 2G\Pi_{\text{ps}}^{0,\text{finite}}(\bar{m}^2, \mathbf{q})}.$$

ここで分極関数 $\Pi_{\text{ps}}^{0,\text{finite}}(\bar{m}^2, \mathbf{q})$ の表式は

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{ps}}^{0,\text{finite}}(\bar{m}^2, \mathbf{q}) &= \frac{N_f N_c}{4\pi^2} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^2} e^{-\bar{m}^2 \tau} - 2i N_f N_c q^2 I(\bar{m}, q^2) \\ &+ \frac{N_f N_c}{2\pi^2} \sum_{s=\pm} \int_0^{\infty} dp \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + \bar{m}^2}} \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{p^2 + \bar{m}^2} + s\mu)} + 1} \left(2 - \frac{q}{2p} \log \left| \frac{q + 2p}{q - 2p} \right| \right), \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

で与えられる。ここで $I(\bar{m}, q^2)$ は次式で定義される積分関数である：

$$I(\bar{m}, q^2) \equiv \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dt \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-(\bar{m}^2 - q^2 t(1-t))\tau}.$$

カイラル極限での終境界線の決定と同様、2 次相転移線は $1 - 2G\Pi_{\text{ps}}^{0,\text{finite}}(\bar{m}^2, \mathbf{q})|_{|\mathbf{q}|=q_c}$ かつ $\partial_q \Pi_{\text{ps}}^{0,\text{finite}}(\bar{m}^2, \mathbf{q})|_{|\mathbf{q}|=q_c} = 0$ で決定される。

最後に \bar{m} の決定について議論する。相関関数は熱力学関数を特定の m で固定した際の 2 次の係数として与えられていたので、 \bar{m} の値の取り方は相関関数の枠内からでは決定するこ

とができない。そこで、本小節では \bar{m} の値として終境界線上の m の値を用いる。しかし、図 5.9 を見れば分かるように、終境界線上の m の値には幅がある。そこで、まず始めに相関関数の \bar{m} の変化に対する応答を見る。

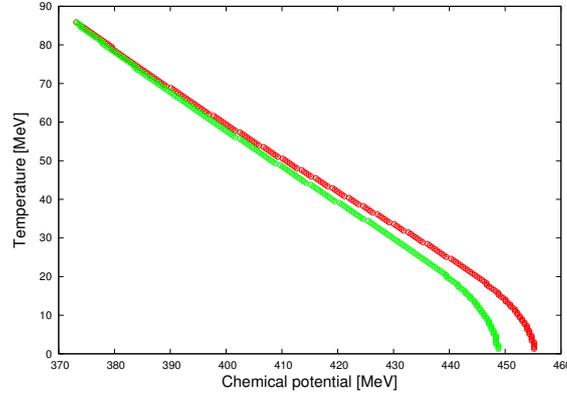


図 5.15: いくつかの \bar{m} に関する相関関数によって決定した終境界線。赤 (緑) 線は $\bar{m} = 10$ (100)MeV に対応する。

図 5.15 にいくつかの \bar{m} に関する相関関数によって決定した終境界線を描いた。図 5.9 より \bar{m} の値は低温領域で $\mathcal{O}(10)$ MeV、高温領域で $\mathcal{O}(100)$ MeV であるので、赤線・緑線はそれぞれ $\bar{m} = 10, 100$ MeV とした。図 5.15 より、赤線と緑線の違いは主に低温領域に現れることが分かる。低温領域では緑線が近似として妥当であり、高温領域では得られる結果は両者でほとんど変わらないので、以下では $\bar{m} = 10$ MeV とし議論を進める。

また、両線共に特定の温度で終点を迎えているが、これは $\Gamma_{\text{ps,finite}}^{-1}(0, \mathbf{q})$ が $q_c = 0$ MeV で最小となった点を表している。熱力学関数の直接計算から、LP は有限の q_c で実現していることに注意。従って、図 5.15 の終点は LP と対応するとは限らない。しかしながら、これらの点は非一様相が存在する上限を定めていると考えられる。有限の \mathbf{q} で感受率が発散することが無いからである。

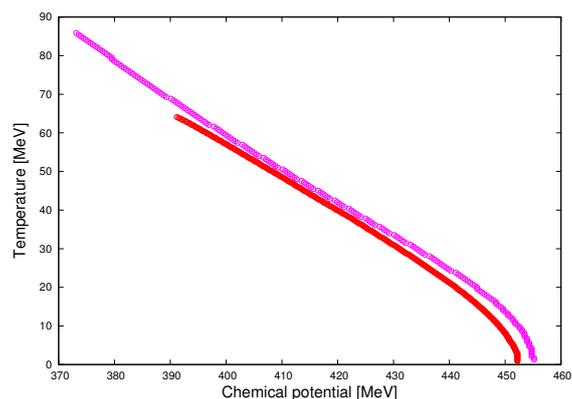


図 5.16: 相関関数による解析と熱力学関数の直接計算との対応。赤 (紫) 線は $m_c = 2\text{MeV}$ で
の熱力学関数の直接計算 (相関関数による解析) で求めた終境界線を表す。

図 5.16 に相関関数の解析と熱力学関数の数値計算結果を比較した。熱力学関数の直接計算
によって得られた LP の温度を T_{LP} とすると、 $T \leq T_{\text{LP}}$ では両者の相境界の位置は大きな違
いを示さない。このことから、仮に前節で述べた可能性の結果終境界線の位置が変化したと
しても、 $T \leq T_{\text{LP}}$ ではその位置は大きく変化しないことが分かる。一方相関関数の解析結果
は、 $T > T_{\text{LP}}$ では熱力学関数の直接計算の結果と大きく異なっている。これは $T > T_{\text{LP}}$ でも
非一様相が熱力学関数の極小として残り続ける為であり、従って LP の位置は大きく変化す
る可能性があることを示唆している。

第6章 量子-熱揺らぎの効果を取り入れた カイラル非一様相

ここまでカイラル非一様相研究の基礎についてレビューしてから、非一様カイラル相転移を理解する我々の試みについて議論してきた。しかしながら、以上の研究は全て MFA の下で行われてきたことに注意する。そこで本章では、MFA を越えた非一様相の取扱いについて考える。本研究で言う MFA を越えた議論とは、具体的には秩序変数の量子または熱揺らぎの寄与を考察することを指す。以下では複合場として $(\phi_0, \phi_i) = (-2G\bar{\psi}\psi, -2G\bar{\psi}i\gamma_5\tau_i\psi)$ ($i = 1, 2, 3$) を定義し、量子-熱揺らぎは $\phi_a(t, \mathbf{r}) = \langle \phi_a(z) \rangle + \delta\phi_a(t, \mathbf{r})$, $a = 0 \sim 3$ のように導入する。

揺らぎが非一様相へ及ぼす影響としては、以下に挙げるような興味深い先行研究が挙げられる。1 つは非一様相内部の秩序に関する研究である。一般に、1 + 3 次元中の 1 次元秩序は揺らぎの効果によって長距離秩序として存在せず、相関関数のべき的減衰によって特徴付けられる準長距離秩序 (QLRO) として存在することが、Landau-Peierls 不安定性からの帰結として知られている [95,96]。QLRO を持つ系は物性系では良く研究されており、例えば朝永-Luttinger 流体 [97] や、円形に形成した重合体鎖 [98]、FFLO 超伝導体 [99–101] などは具体的な例として挙げられる。カイラル非一様相の QLRO に関する研究においては、Lee らによる DCDW に対する議論 [102] や、Hidaka らによる RKC に対する議論 [103] などが挙げられる。[102] では、Landau-Ginzburg-Wilson アプローチに従って $SU(2)_L \times SU(2)_R \simeq O(4)$ 対称性に基づいた一般的な有効ラグランジアンを構成し、その下で DCDW 相における揺らぎの効果について議論した。[103] では、NJL 模型を基にした gGL からスタートし、RKC 相における揺らぎの効果について議論した。

もう 1 つは相転移の次数に関する研究である。以下では非一様-一様 (または回復) 相転移の次数が 2 次である場合を考える。このとき量子または熱揺らぎの存在によって相転移の次数が 2 次から 1 次へと変化する可能性について、主に物性系を中心に研究されている。このことは揺らぎの場 ($\delta\phi_a(t, \mathbf{r})$) に関する伝播関数 $G(p)$ が、相転移点付近では一様な場合と異なり $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}_c| \equiv q_c$ で極大となるという性質に起因している。実際に図 3.7 を見れば分かるように、終境界線付近では $\Gamma^{-1} \propto G^{-1}$ が有限の $|\mathbf{p}| = q_c$ で最小値を取る。量子揺らぎの効果については Dyugaev によって初めて言及された [104]。Dyugaev はパイオン凝縮の研究において、いくつかの量子揺らぎによって作られる非局所的な相互作用が、相転移の次数を 2

次から 1 次へと変化させることを示した。熱揺らぎの効果については Brazovskii によって初めて言及された [105]。Brazovskii は非一様構造を持つ系における Schwinger-Dyson(SD) 方程式を有効的に計算することで、非一様-一様相転移の次数が 2 次から 1 次へと変化することを示した。特に Brazovskii 効果に関しては多くの物性系において研究されており、例えば液晶における nematic-smectic-C 相転移 [106] や di-block copolymer の microphase separation 転移 [107, 108] などとの関連で研究されている。また、熱揺らぎに関してはいくつかの模型に関して繰り込み群を用いた解析も進められており、Ling らによって熱揺らぎの効果による相転移の分類が行われた [109]。本研究では特にカイラル非一様-回復相転移に関して、量子-熱揺らぎによる相転移の次数の変化の可能性について着目する。これまで議論してきたように、カイラル極限の下では、典型的な非一様構造の非一様-回復相転移は 2 次であることが知られている。従ってカイラル非一様相における相転移、特に非一様-回復相転移の次数について議論することは有意義である。本研究ではこれらの研究をさらに発展させ、相転移の次数の定性的変化および位置の定量的変化について議論する。

本研究における主だった解析手法は以下の通りである。まず我々は回復相における作用からスタートして議論を進める。荷電対称・外部電磁場無し・カイラル極限の前提の下で、クォーク自由度を例えば Hubbard-Stratonovich 変換を用いて積分してしまっただと考えれば、虚時間形式での作用は $SU(2)_L \times SU(2)_R \simeq O(4)$ 対称性の要求により $\phi_a(t, z)$ の汎関数として $S_{\text{eff}} \sim (1/2!) \Gamma^{(2)} \phi_a^2 + (1/4!) \Gamma^{(4)} (\phi_a^2)^2 + \dots$ と書ける。ここで $\Gamma^{(n)}$ は n 次の頂点関数である。 $\Gamma^{(2)}$ は力学変数の 2 次の係数であるので、これは ϕ_a の伝播関数の逆 ($G^{-1}(q_0, \mathbf{q})$) と密接に関係していることに注意する。一般に ϕ_a の伝播関数は、 ϕ_a の真空での質量 M および粒子-空孔励起から来る自己エネルギー $\Pi_\phi(q_0, \mathbf{q})$ を用いて、 $G^{-1}(q_0, \mathbf{q}) = q^2 - M^2 - \Pi_\phi(q_0, \mathbf{q})$ と書ける。真空中では ϕ_a は自由粒子と同じ分散関係を持つが、媒質効果によって非一様相が現れるような領域では特定の運動量 $|\mathbf{q}| = q_c$ で最大化される。従って、 G^{-1} は $|\mathbf{q}| = q_c$ の周りで展開されて $G^{-1} \sim q_0^2 - \gamma(|\mathbf{q}|^2 - q_c^2)^2 + \text{const.}$ の形で与えられる。特にループ効果を考えると、 $|\mathbf{q}| = q_c$ の周りの挙動が熱力学関数の表式に特徴的な寄与を果たすことに注意しておく。以上の下で、 ϕ_a に関する汎関数積分を実行することで、熱力学関数は秩序変数 $\Phi_a \equiv (\langle \phi_0 \rangle, \langle \phi_a \rangle)$ のベキで書き下すことができる：

$$\Omega = \frac{1}{2!} \tilde{\Gamma}^{(2)} |\Phi|^2 + \frac{1}{4!} \tilde{\Gamma}^{(4)} |\Phi|^4 + \dots,$$

ここで $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ は揺らぎの効果を取り入れた頂点関数である。MFA の下では、 $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ は $\Gamma^{(n)}$ に帰着されることに注意。本研究では、 $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ や $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ の挙動を調べることによって相転移の次数を議論する。

本研究の特色は以下の点にある。まずは量子-熱揺らぎの効果を同時に考慮する点が挙げられる。先行研究では、Dyugaev の議論は $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ に量子揺らぎのみを考慮したことに対応し、また Brazovskii の議論は $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ および $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ に熱揺らぎのみを考慮したことに対応している。本研

究では $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ および $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ に量子-熱揺らぎを同時に考慮して議論を進める、即ち本研究の内容は先行研究を包含している。

さらには揺らぎの効果を考慮した終境界線の位置の特定が挙げられる。本研究では相関関数による解析を発展させることで、回復相から非一様相の相境界を揺らぎの効果も加味した上で外挿していく。また、本研究では相境界を決定する際に、具体的に熱力学関数の頂点関数 $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ の果たす定量的役割についても考察する。

本論に入る前に、一様-回復相における2次相転移に対する揺らぎの効果について言及しておく。一様構造に限った議論に関しては、繰り込み群を始めとする様々な手法から活発に研究が進められている。特に系の対称性が $SU(2)_L \times SU(2)_R \simeq O(4)$ である場合に関しては、 $U(1)_A$ 対称性のアノマリーに起因する破れの下で、一様-回復相転移の次数は2次のまま留まることが知られている [110, 111]。従って、以上で述べたカイラル非一様-回復相転移の次数の変化は、カイラル非一様性に特徴的な現象であると言える。

6.1 量子および熱揺らぎの導入

本研究では、回復相における作用からスタートして、量子および熱揺らぎの効果について議論する。そこでまず始めにクォーク自由度を持つ理論から、回復相における有効的な作用を構築することを考える。以下ではこれまでと同様 QCD の有効模型として NJL 模型を用いる ((2.0.2) 式)。また、ここでは揺らぎの効果に特に注目しているので、荷電対称・外部電磁場無し・カイラル極限の下で議論を進める。我々は熱力学関数を秩序変数のベキで展開することで、相転移の次数について考察する。従って、作用を構成する時点でクォーク自由度を積分してしまうと便利である。回復相においては、対称性の要求から有効作用の表式は以下の形に制限される：

$$\begin{aligned}
S_0(\phi) &= \frac{1}{2!} T \sum_{n_1} \int \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3} \Gamma_{\text{ps}}^{(2)}(\omega_{n_1}, \mathbf{q}_1) \phi(\omega_{n_1}, \mathbf{q}_1) \phi(-\omega_{n_1}, -\mathbf{q}_1) \\
&+ \frac{1}{4!} T^3 \prod_{i=1}^3 \sum_{n_i} \int \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \lambda(\omega_n, \mathbf{q}) \phi(\omega_{n_1}, \mathbf{q}_1) \phi(\omega_{n_2}, \mathbf{q}_2) \phi(\omega_{n_3}, \mathbf{q}_3) \phi(-\omega_{n_1} - \omega_{n_2} - \omega_{n_3}, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3).
\end{aligned} \tag{6.1.1}$$

いま、 ϕ_a はボソンの統計量を持つので、 $\omega_n = 2n\pi T (n \in \mathbb{Z})$ である。(6.1.1) 式において、 ϕ の奇数次の項はカイラル対称性により消えてしまうことに注意。また、(6.1.1) 式では全ての ϕ_a に関して対称的に書かれているが、以下では簡単の為 ϕ_3 についてのみ考慮する。実際、(6.1.1) 式に含まれる ϕ_3 と他の場との相互作用項からの寄与は $\mathcal{O}(N^{-1})$ で抑えられる (N は秩序変数の数)。以下では $\phi \equiv \phi_3 = -2G\bar{\psi}i\gamma_5\tau_3\psi$ と略記する。

6.1.1 伝播関数の表式

作用の形が決定できたので、具体的な表式を導出していく。作用における ϕ の各次数の係数は背後にあるクォークの運動学によって決定されることに注意。特に $\Gamma_{\text{ps}}^{(2)}$ は Sec. 3.3.2 の議論を思い出せば分かるように、RPA で求めたクォークの双 1 次形式の相関関数と関係している。

ここで、 $\Gamma_{\text{ps}}^{(2)}$ は ϕ^2 の係数であるので ϕ の伝播関数の逆と高々定数倍のズレを除いて一致してはならない。即ち、 G_{ps} を ϕ の伝播関数、 (ω_n, \mathbf{q}) を外線運動量として

$$\Gamma_{\text{ps}}^{(2)}(\omega_n, \mathbf{q}) = Z_\phi^{-1} G_{\text{ps}}^{-1}(\omega_n, \mathbf{q}), \quad (6.1.2)$$

なる関係がある。ここで Z_ϕ は適当な比例定数であり、具体的な表式は以下で決定する。Sec. 3.3.2 とは異なり、 $\Gamma_{\text{ps}}^{(2)}$ は ω_n 依存性があることに注意。ここでは Sec. 3.3.2 で求めた相関関数は $\omega_n = 0$ であったので「静的な」相関関数と呼び、本章で議論する $\omega_n \neq 0$ の相関関数を「動的な」相関関数と呼ぶ。

伝播関数との対応を考える為に、 $\Gamma_{\text{ps}}^{(2)}$ の表式を物理的に解釈する。まず、 $\Gamma_{\text{ps}}^{(2)}$ の表式はクォーク自由度に関して RPA を行えば、クォークの分極関数 $\Pi_{\text{ps}}^0(\omega_n, \mathbf{q})$ を用いて

$$\Gamma_{\text{ps}}^{(2)} = \frac{1 - 2G\Pi_{\text{ps}}^0(\omega_n, \mathbf{q})}{2G},$$

と与えられる [61]。 $\Pi_{\text{ps}}^0(\omega_n, \mathbf{q})$ の具体的な表式自体は、ここでの議論とは直接関係しないので後で導出する。分極関数は真空からの寄与 ($\Pi_{\text{ps}}^{0,\text{vac}}$) と媒質からの寄与 ($\Pi_{\text{ps}}^{0,\text{med}}$) とで分解することができる； $\Pi_{\text{ps}}^0 = \Pi_{\text{ps}}^{0,\text{vac}} + \Pi_{\text{ps}}^{0,\text{med}}$ 。ここで、 $\Gamma_{\text{ps}}^{(2)}$ における真空からの寄与を次のように展開する：

$$\begin{aligned} 1 - 2G\Pi_{\text{ps}}^{0,\text{vac}}(\omega_n, \mathbf{q}) &\sim 1 - 2G\Pi_{\text{ps}}^{0,\text{vac}}(0, \mathbf{0}) + 2G\frac{\partial}{\partial q^2}\Pi_{\text{ps}}^{0,\text{vac}}\Big|_{\omega_n=|\mathbf{q}|=0} (\omega_n^2 + |\mathbf{q}|^2) \\ &= 2G\frac{\partial}{\partial q^2}\Pi_{\text{ps}}^{0,\text{vac}}\Big|_{\omega_n=|\mathbf{q}|=0} (M^2 + \omega_n^2 + |\mathbf{q}|^2) \\ &= 2Gg_{\phi qq}^{-2} (M^2 + \omega_n^2 + |\mathbf{q}|^2). \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

ここで $g_{\phi qq}$ は ϕ とクォークとの相互作用の結合定数であり、 $\partial\Pi_{\text{ps}}^{0,\text{vac}}/\partial q^2|_{q^2=0} = g_{\phi qq}^{-2}$ で定められる [13]。NJL 模型では明確な形では見えていなかったクォーク対からなる複合場に対する運動項が、真空偏極の効果として現れていることに注意する。従って

$$[\Gamma_{\text{ps}}(\omega_n, \mathbf{q})]^{-1} \sim \frac{g_{\phi qq}^2}{M^2 + \omega_n^2 + |\mathbf{q}|^2 - g_{\phi qq}^2 \Pi_{\text{ps}}^{0,\text{med}}(\omega_n, \mathbf{q})}. \quad (6.1.4)$$

を得る。(6.1.4) 式において、右辺分母の $M^2 + \omega_n^2 + |\mathbf{q}|^2$ は真空からの寄与を表している。従って (6.1.4) 式は、真空の値に対し媒質からの寄与である $g_{\phi qq}^2 \Pi_{\text{ps}}^{0,\text{med}}$ が RPA の下で導入されていると解釈することができる。

ここで、物理的粒子の伝播関数は真空中では、 $\omega_n^2, |\mathbf{q}|^2$ の係数が1でなくてはならないことに注意。ちょうど (6.1.4) 式は $\omega_n^2, |\mathbf{q}|^2$ の係数が1になるように規格化されているので、(6.1.2) 式とこれを比較することで $Z_\phi = g_{\phi qq}^2$ を得る。(6.1.1) 式は ϕ^2 の係数が $\Gamma_{\text{ps}}^{(2)}$ であるので、これが G_{ps}^{-1} と合致するように場の再定義が必要である。具体的には $\tilde{\phi} \equiv g_{\phi qq} \phi$ とすれば良く、この変換の下では ϕ^4 の係数も $\tilde{\lambda} \equiv g_{\phi qq}^{-4} \lambda$ と再定義される。以下では簡単の為 $\tilde{\phi}, \tilde{\lambda}$ を ϕ, λ と書く。このとき作用の表式は次のように書き換えらる：

$$S_0(\phi) = \frac{1}{2!} T \sum_{n_1} \int \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3} G_{\text{ps}}^{-1}(\omega_{n_1}, \mathbf{q}_1) \phi(\omega_{n_1}, \mathbf{q}_1) \phi(-\omega_{n_1}, -\mathbf{q}_1) \\ + \frac{1}{4!} T^3 \prod_{i=1}^3 \sum_{n_i} \int \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \lambda(\omega_n, \mathbf{q}) \phi(\omega_{n_1}, \mathbf{q}_1) \phi(\omega_{n_2}, \mathbf{q}_2) \phi(\omega_{n_3}, \mathbf{q}_3) \phi(-\omega_{n_1} - \omega_{n_2} - \omega_{n_3}, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3). \quad (6.1.5)$$

以下では具体的に $G_{\text{ps}}^{-1}(\omega_n, \mathbf{q})$ の表式を求める。 Z_ϕ の表式も考慮すると、 $\Gamma_{\text{ps}}(\omega_n, \mathbf{q})$ の表式より

$$G_{\text{ps}}(\omega_n, \mathbf{q}) = \frac{1}{g_{\phi qq}^2} \frac{2G}{1 - 2G\Pi_{\text{ps}}^0(\omega_n, \mathbf{q})}, \quad (6.1.6)$$

を得る。ここで $\Pi_{\text{ps}}^0(\omega_n, \mathbf{q})$ の表式は

$$\Pi_{\text{ps}}^0(\omega_n, \mathbf{q}) \equiv T \sum_m \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{tr} [i\gamma_5 \tau_3 S_\beta(\omega_n + \omega_m, \mathbf{q} + \mathbf{p}) i\gamma_5 \tau_3 S_\beta(\omega_m, \mathbf{p})] \\ = \Pi_{\text{ps}}^{0, \text{vac}}(\omega_n, \mathbf{q}) + \Pi_{\text{ps}}^{0, \text{med}}(\omega_n, \mathbf{q}), \quad (6.1.7)$$

である。ここで2行目では真空部分の寄与と媒質からの寄与を表し、具体的には

$$\Pi_{\text{ps}}^{0, \text{vac}}(\omega_n, \mathbf{q}) = \frac{N_f N_c}{(2\pi)^2} \left[\Lambda^2 - \frac{\omega_n^2 + |\mathbf{q}|^2}{2} \int_0^1 dt \int_{1/\Lambda^2}^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-(\omega_n^2 + |\mathbf{q}|^2)t(1-t)\tau} \right], \\ \Pi_{\text{ps}}^{0, \text{med}}(\omega_n, \mathbf{q}) = -\frac{2N_f N_c}{(2\pi)^2} \sum_{s=\pm} \int_0^\infty p dp \frac{1}{e^{\beta(p+s\mu)} + 1} \\ \times \left(2 + \frac{\omega_n^2 + |\mathbf{q}|^2}{4p|\mathbf{q}|} \log \left| \frac{\omega_n^2 + (|\mathbf{q}| - 2p)^2}{\omega_n^2 + (|\mathbf{q}| + 2p)^2} \right| \right).$$

で与えられる。計算の詳細は Appendix A で示す。 $\Pi_{\text{ps}}^0(\omega_n, \mathbf{q})$ は $\omega_n, |\mathbf{q}|$ の複雑な関数として与えられている。揺らぎの効果を考える際、 $G_{\text{ps}}(\omega_n, \mathbf{q})$ のループ積分を実行しなくてはならないので、これをそのまま取り扱うのは困難である。そこで、 $G_{\text{ps}}(\omega_n, \mathbf{q})$ を計算しやすい形に近似することを考える。具体的には、 G_{ps}^{-1} を静的な部分と動的な部分に分解し、それぞれに関して近似する。

まずは静的な部分について考える。終境界線近傍では、 $|\mathbf{q}| = q_c \neq 0$ で $G_{\text{ps}}^{-1}(0, \mathbf{q})$ は最小となることに注意。明らかに $G_{\text{ps}}^{-1}(0, \mathbf{q})$ は $|\mathbf{q}|$ の偶関数なので、 $G_{\text{ps}}^{-1}(0, \mathbf{q})$ を $|\mathbf{q}|^2 = q_c^2$ の周りで展開すると

$$G_{\text{ps}}^{-1}(0, \mathbf{q}) \sim \tau + \bar{\gamma}(|\mathbf{q}|^2 - q_c^2) + \gamma(|\mathbf{q}|^2 - q_c^2)^2, \quad (6.1.8)$$

と書ける。ここで $\tau, \bar{\gamma}, \gamma$ は以下で定義される量である：

$$\begin{aligned} \tau &\equiv G_{\text{ps}}^{-1}(0, \mathbf{q})|_{|\mathbf{q}|=q_c} = M^2 - g_{\phi qq}^2 \Pi_{\text{ps}}^{0, \text{med}}(0, \mathbf{q})|_{|\mathbf{q}|=q_c}, \\ \bar{\gamma} &\equiv \frac{d}{dq^2} G_{\text{ps}}^{-1}(0, \mathbf{q}) \Big|_{|\mathbf{q}|=q_c} = 1 - \frac{g_{\phi qq}^2}{2} \frac{d}{dq^2} \Pi_{\text{ps}}^{0, \text{med}}(0, \mathbf{q}) \Big|_{|\mathbf{q}|=q_c}, \\ \gamma &\equiv \frac{1}{2} \frac{d^2}{dq^2} G_{\text{ps}}^{-1}(0, \mathbf{q}) \Big|_{|\mathbf{q}|=q_c} = -\frac{g_{\phi qq}^2}{2} \frac{d^2}{dq^2} \Pi_{\text{ps}}^{0, \text{med}}(0, \mathbf{q}) \Big|_{|\mathbf{q}|=q_c}. \end{aligned}$$

ここで、 q_c は (3.3.8) 式によって定められていたことに注意。このとき $q_c \neq 0$ ならば、 $\bar{\gamma}$ は常に消えてしまう； $\bar{\gamma} = 0$ 。従って、 $G_{\text{ps}}^{-1}(0, \mathbf{q})$ は次のように近似される：

$$\begin{aligned} G_{\text{ps}}^{-1}(0, \mathbf{q}) &= M^2 + |\mathbf{q}|^2 - g_{\phi qq}^2 \Pi_{\text{ps}}^{0, \text{med}}(0, \mathbf{q}) \\ &\sim \tau + \gamma(|\mathbf{q}|^2 - q_c^2)^2. \end{aligned}$$

次に動的な部分について考える。静的な場合と比較すると、 $G^{-1}(\omega_n, \mathbf{q})$ の表式は

$$G_{\text{ps}}^{-1}(\omega_n, \mathbf{q}) = \tau + \gamma(|\mathbf{q}|^2 - q_c^2)^2 + f(\omega_n, \mathbf{q}), \quad (6.1.9)$$

と書ける。ここで $f(\omega_n, \mathbf{q}) = \omega_n^2 - g_{\phi qq}^2 (\Pi_{\text{ps}}^{0, \text{med}}(\omega_n, \mathbf{q}) - \Pi_{\text{ps}}^{0, \text{med}}(0, \mathbf{q}))$ は $f(0, \mathbf{q}) = 0$ を満たしている。 G_{ps} のループ積分を計算する為に、 $f(\omega_n, \mathbf{q})$ を ω_n のべきで近似する； $f(\omega_n, \mathbf{q}) \sim a_1(|\mathbf{q}|)|\omega_n| + a_2(|\mathbf{q}|)\omega_n^2$ 。ここで ω_n のべきを2次まで拾ったのは、 $T \rightarrow 0$ の極限における対応と関係している。一般に、 $q_0 = i\omega_n$ と解析接続すると、 $\Pi_{\text{ps}}^{0, \text{med}}(q_0, \mathbf{q})$ は実部と虚部を持つことに注意。具体的に計算すると、実部は q_0 の偶数次のべきで与えられ、虚部は q_0 の奇数次のべきで与えられることが分かる（詳細な計算は Appendix B を参照）。従って、 $\mathcal{O}(\omega_n^2)$ まで $f(\omega_n, \mathbf{q})$ を近似することは、 $T = 0$ における伝播関数の分母において、実部と虚部のそれぞれについて ω_n の最低次まで取り入れることに対応する。この近似の妥当性は、例えば a_1 と $a_2 T$ の値を比較することで推察することができる。実際数値計算結果を見ると、LP 近傍を除き相転移線上で $a_1 \gg a_2 T$ となっており、高次の寄与はさらに小さいことが予想される。最後に $a_1(|\mathbf{q}|), a_2(|\mathbf{q}|)$ について。 G_{ps} のループ積分を求める際、最も重要な寄与を果たすのは $|\mathbf{q}| = q_c$ の周辺であることに注意。積分を実行する為にはこれらを更に近似せねばならないので、ここでは $a_i(|\mathbf{q}|) \sim a_i(q_c) \equiv a_i$ とする。以上の下で、 $G_{\text{ps}}^{-1}(\omega_n, \mathbf{q})$ の表式は以下の通り：

$$G_{\text{ps}}^{-1}(\omega_n, \mathbf{q}) = \tau + \gamma(|\mathbf{q}|^2 - q_c^2)^2 + a_1 |\omega_n| + a_2 \omega_n^2. \quad (6.1.10)$$

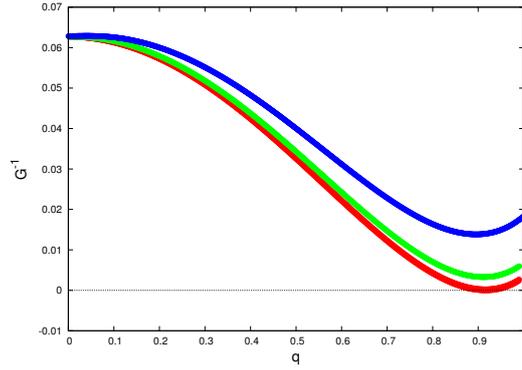


図 6.1: いくつかの n に対して $T \sim 0$ での $G_{\text{ps}}^{-1}(\omega_n, \mathbf{q})$ を $|\mathbf{q}|$ の関数として描いた。赤、緑、青線はそれぞれ $n = 0, 10, 100$ に対応している。

ここで a_1, a_2 は次式で定められる：

$$a_1 \equiv \left. \frac{d}{dx} G_{\text{ps}}^{-1}(x, \mathbf{q}) \right|_{x=0, |\mathbf{q}|=q_c} = -g_{\phi qq}^2 \left. \frac{d}{dx} \Pi_{\text{ps}}^{0, \text{med}}(\omega_n, \mathbf{q}) \right|_{x=0, |\mathbf{q}|=q_c},$$

$$a_2 \equiv \left. \frac{1}{2} \frac{d^2}{d^2 x} G_{\text{ps}}^{-1}(x, \mathbf{q}) \right|_{x=0, |\mathbf{q}|=q_c} = 1 - \left. \frac{1}{2} \frac{d^2}{d^2 x} \Pi_{\text{ps}}^{0, \text{med}}(\omega_n, \mathbf{q}) \right|_{x=0, |\mathbf{q}|=q_c}.$$

図 6.1 に $T \sim 0$ での $G_{\text{ps}}^{-1}(\omega_n, \mathbf{q})$ をいくつかの n に関して描いた。まず各線に関して、定性的には $n = 0$ と関数の振る舞いは変化していないことに注意する。従って、数値計算は $a_i(|\mathbf{q}|) \sim a_i(q_c) = a_i$ とする近似が妥当であることを示唆している。また、 n の増大に従って、 $G_{\text{ps}}^{-1}(\omega_n, \mathbf{q})$ の最小値が単調に増加していることに注意する。この最小値が 0 に近ければ近い程ループ積分に大きな寄与を与えることに注意すると、 $f(\omega_n, \mathbf{q})$ を ω_n で展開し、適当な次数で打ち切るとは妥当であると考えられる。

ここまで $G_{\text{ps}}(\omega_n, \mathbf{q})$ に対して様々な近似を施してきた。本節の最後に近似のプロセスをまとめておくと、以下の通り：

$$\begin{aligned} G_{\text{ps}}^{-1}(\omega_n, \mathbf{q}) &= M^2 + \omega_n^2 + |\mathbf{q}|^2 - g_{\phi qq}^2 \Pi_{\text{ps}}^{0, \text{med}}(\omega_n, \mathbf{q}) \\ &\sim \tau + \gamma(|\mathbf{q}|^2 - q_c^2)^2 + \omega_n^2 - g_{\phi qq}^2 (\Pi_{\text{ps}}^{0, \text{med}}(\omega_n, \mathbf{q}) - \Pi_{\text{ps}}^{0, \text{med}}(0, \mathbf{q})) \\ &\sim \tau + \gamma(|\mathbf{q}|^2 - q_c^2)^2 + \omega_n^2 - g_{\phi qq}^2 (\Pi_{\text{ps}}^{0, \text{med}}(\omega_n, \mathbf{q}_c) - \Pi_{\text{ps}}^{0, \text{med}}(0, \mathbf{q}_c)) \\ &\sim \tau + \gamma(|\mathbf{q}|^2 - q_c^2)^2 + a_1 |\omega_n| + a_2 \omega_n^2. \end{aligned}$$

6.1.2 熱力学関数の表式

伝播関数の表式がもったので、具体的に量子-熱ゆらぎを導入していく。始めに $\lambda(\omega_n, \mathbf{q})$ の取扱いについて注意する。一般には $\lambda(\omega_n, \mathbf{q})$ は ω_n, \mathbf{q} の関数である。しかし、ループ積分

を考える上では、図 6.1 を見れば分かるように、 $\omega_n = 0$ かつ $|\mathbf{q}| \sim q_c$ が積分に重要な寄与を果たしている。従って、以下では [112] での取扱いと同様に、 $\lambda(\omega_n, \mathbf{q}) \sim \lambda(0, \mathbf{q}_c) = \lambda$ と近似して議論を進める。

揺らぎの効果を導入する為に、クォーク双 1 次形式 ϕ を熱平均部分と揺らぎの部分に分解する； $\phi(\omega_n, \mathbf{q}) = \beta\Phi(\mathbf{q})\delta_{n0} + \xi(\omega_n, \mathbf{q})$ 。ここで Φ は熱平均 $\Phi = \langle \phi \rangle$ であり、 ξ は揺らぎの場を表している。揺らぎの効果を無視した場合は、 Φ は MFA の下での熱平均と一致することに注意。また、 $\xi(\omega_n, \mathbf{q})$ の ω_n 依存性は、各 T, μ で量子揺らぎを考慮することを意味している。以上の下で、作用は揺らぎを含む部分と含まない部分に分解される； $S_0(\phi) = S_0(\Phi) + S_1(\Phi, \xi)$ 。ここで $S_0(\Phi), S_1(\Phi, \xi)$ の具体的な表式は以下の通り：

$$\begin{aligned}
S_0(\Phi) &= S_0(\beta\Phi\delta_{n0}), \\
S_1(\Phi, \xi) &= \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} G_{\text{ps}}^{-1}(0, \mathbf{p}_1) \Phi(\mathbf{p}_1) \xi(0, -\mathbf{p}_1) \\
&\quad + \frac{1}{2} T \sum_{n_1} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} G_{\text{ps}}^{-1}(\omega_{n_1}, \mathbf{p}_1) \xi(\omega_{n_1}, \mathbf{p}_1) \xi(-\omega_{n_1}, -\mathbf{p}_1) \\
&\quad + \frac{\lambda}{6} \prod_{i=1}^3 \int \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{p}_1) \Phi(\mathbf{p}_2) \Phi(\mathbf{p}_3) \xi(0, -\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \\
&\quad + \frac{\lambda}{4} T \sum_{n_3} \prod_{i=1}^3 \int \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{p}_1) \Phi(\mathbf{p}_2) \xi(\omega_{n_3}, \mathbf{p}_3) \xi(-\omega_{n_3}, -\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \\
&\quad + \frac{\lambda}{6} T^2 \sum_{n_2, n_3} \prod_{i=1}^3 \int \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{p}_1) \xi(\omega_{n_2}, \mathbf{p}_2) \xi(\omega_{n_3}, \mathbf{p}_3) \xi(-\omega_{n_2} - \omega_{n_3}, -\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \\
&\quad + \frac{\lambda}{24} T^3 \prod_{i=1}^3 \sum_{n_i} \int \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} \xi(\omega_{n_1}, \mathbf{p}_1) \xi(\omega_{n_2}, \mathbf{p}_2) \xi(\omega_{n_3}, \mathbf{p}_3) \xi(-\omega_{n_1} - \omega_{n_2} - \omega_{n_3}, -\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3).
\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

ここで S_0 は (6.1.5) 式で与えた作用と同じ汎関数である。熱力学関数の表式を導出する前に、 $S_1(\Phi, \xi)$ についていくつか注意を述べる。まず、(6.1.11) 式の右辺第 1 項は、 ξ の tadpole に対する最低次の寄与を表している。 ξ は熱平均からの揺らぎを表しているので、 $\langle \xi \rangle = 0$ である。従って、この項からの寄与は高次の寄与を考えることで消えてしまい、頂点関数の決定には寄与しない。また、(6.1.11) 式の右辺第 2 項および第 4 項は、 ξ の伝播関数を構成している。特に右辺第 4 項に関して、外場として $\Phi(\mathbf{q})$ が入っている為、一般にはこの項は ξ の伝播に関して \mathbf{q}_{in} と \mathbf{q}_{out} は異なる。後で具体的に見るように、このような運動量非保存な項は伝播関数のループ積分を考える上では小さな寄与しか与えない。(6.1.11) 式の右辺第 3 項および第 5 項は、 Φ と ξ がカップルした相互作用項を表す。 ξ の伝播関数に関する議論と同様、これらの運動量非保存な項はループ積分を計算する上では小さな寄与しか与えない。最後に、(6.1.11) 式の右辺第 6 項は ξ の 4 点接触相互作用項であり、揺らぎの寄与を考える上で主要な

寄与を果たしている。

ξ に関する汎関数積分を実行することで、揺らぎの寄与を考慮した熱力学関数を得る：

$$\Omega(\Phi) = TS_0(\Phi) - T \log \int \mathcal{D}\xi \exp\{-S_1(\Phi, \xi)\}. \quad (6.1.12)$$

(6.1.12) 式において、右辺第2項は揺らぎの寄与を表しており、この項を無視した場合熱力学関数はMFAでのそれと一致する。(6.1.12) 式を秩序変数のべきで展開すると、有効的な熱力学関数の表式を得る：

$$\begin{aligned} \Omega(\Phi) = & \frac{1}{2!} \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6} \bar{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \Phi(-\mathbf{p}_1) \Phi(-\mathbf{p}_2) \\ & + \frac{1}{4!} \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4}{(2\pi)^{12}} \bar{\Gamma}^{(4)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \Phi(-\mathbf{p}_1) \Phi(-\mathbf{p}_2) \Phi(-\mathbf{p}_3) \Phi(-\mathbf{p}_4) \dots \end{aligned}$$

6.1.3 揺らぎの効果を考慮した頂点関数

前節では熱力学関数の表式を導出したので、本節では揺らぎの効果を取り入れた頂点関数($\bar{\Gamma}^{(n)}$)の表式を求める。 $\bar{\Gamma}^{(n)}$ は次式によって定義される：

$$\bar{\Gamma}^{(n)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n) = \left. \frac{\delta^n \Omega}{\delta \Phi(-\mathbf{q}_1) \delta \Phi(-\mathbf{q}_2) \dots \delta \Phi(-\mathbf{q}_n)} \right|_{\Phi=0}.$$

以下では計算にあたり、 ξ の3次以上の高次のキュムラントに関しては無視する。これは専ら解析的に表式を求める為である。このとき Ω の1階 Φ 微分の表式は

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Omega}{\delta \Phi(-\mathbf{q}_1)} = & G_{\text{ps}}^{-1}(0, \mathbf{q}_1) \Phi(\mathbf{q}_1) + \frac{\lambda}{3!} \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6} \Phi(\mathbf{p}_2) \Phi(\mathbf{p}_3) \Phi(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \\ & + \frac{\lambda}{2!} T^2 \sum_n \int \frac{d^3 p_2 d^3 p_3}{(2\pi)^6} \langle \xi(\omega_n, \mathbf{p}_2) \xi(-\omega_n, -\mathbf{p}_3) \rangle_\xi \Phi(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3). \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

ここで $\langle \dots \rangle_\xi$ は ξ に関する熱平均を表す。(6.1.13)式について、(右辺) $=0$ は Φ に関する運動方程式になっていることに注意する。これを解けば、揺らぎを取り入れた非一様構造の表式を導出できる。しかしながら、これを実行することは極めて困難である。本研究では終境界線付近の物理について考えているので、運動方程式の空間非一様な解の存在は仮定し、かつ非一様構造の波数に関して熱力学関数を極小化させる値を $|\mathbf{q}| = q_c$ としている。

(6.1.13) 式に汎関数微分を繰り返せば、 $\bar{\Gamma}^{(n)}$ の表式は求められる。その為には、具体的に $\langle \xi(\omega_n, \mathbf{p}_2) \xi(-\omega_n, -\mathbf{p}_3) \rangle_\xi$ の表式を求めなくてはならない。ここで、伝播関数は(6.1.11)式右辺第4項からの寄与があるので、外場として $\Phi(\mathbf{p}_2)\Phi(\mathbf{p}_3)$ が無数個挿入されていることに注意する。従って、一般には ξ に関して運動量が非保存である。しかしながら、伝播関数のループ

積分を考える限り、運動量非保存な伝播関数からの寄与は実は小さい。実際、伝播関数 G_{ps} は $|\mathbf{q}| = q_c$ で最大値を持つことに注意すると、内線運動量は $|\mathbf{p}| = q_c$ で寄与が最大になる。これが実現するのは $\Phi(\mathbf{p}_2)\Phi(\mathbf{p}_3)$ について $\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0$ が成立する場合のみであり、これは ξ に関して伝播関数の運動量が保存することを意味している。以上より、 $\langle \xi(\omega_n, \mathbf{p}_2) \xi(-\omega_n, -\mathbf{p}_3) \rangle_\xi$ は有効的には

$$\langle \xi(\omega_{n_2}, \mathbf{p}_2) \xi(-\omega_{n_3}, -\mathbf{p}_3) \rangle_\xi = \beta \delta_{n_1, n_2} \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \langle \xi(\omega_n, \mathbf{p}_2) \xi(-\omega_n, -\mathbf{p}_3) \rangle_\xi.$$

で与えられることが分かった。



図 6.2: 揺らぎの効果を考える際に現れる運動量非保存な相互作用項。黒線は ξ に関する伝播関数を表し、 \times 印は $\Phi(\mathbf{q})$ の挿入を表す。左(右)は、(6.1.11)式における右辺第3(5)項からの寄与を表す。

$\langle \xi(\omega_n, \mathbf{p}_2) \xi(-\omega_n, -\mathbf{p}_3) \rangle_\xi$ の表式を求めるに当たり、(6.1.11)式の右辺第6項からの寄与に加えて、運動量が非保存になる第3項および第5項からの寄与も考える必要がある。しかし、以下で示すように、運動量が非保存の頂点からの寄与は小さいことが分かる。まず第3項の寄与について、これは例えば図 6.2 の左図で与えられる。図からも分かるように、このような寄与は ξ の tadpole グラフの一部になっていることに注意。 $\langle \xi \rangle_\xi = 0$ に注意すると、このような寄与は高次のダイアグラムまでの寄与を足し上げることで消える。従って、第3項からの寄与は $\langle \xi(\omega_n, \mathbf{p}_2) \xi(-\omega_n, -\mathbf{p}_3) \rangle_\xi$ の決定には影響しない。次に第5項の寄与について、これは例えば図 6.2 の右図で与えられる。これは伝播関数の運動量非保存成分の取扱いと同様に考えればよい。即ち、伝播関数のループ積分を考える限り、運動量非保存成分からの寄与は運動量が保存する場合と比べて δ 関数で抑制される。

以上より、 $\langle \xi(\omega_n, \mathbf{p}_2) \xi(-\omega_n, -\mathbf{p}_3) \rangle_\xi$ は (6.1.11) 式の右辺第6項によって決定される。従って、図 6.3 で定められる SD 方程式より、 $\langle \xi(\omega_n, \mathbf{p}_2) \xi(-\omega_n, -\mathbf{p}_3) \rangle_\xi$ の表式として次式を得る：

$$\langle \xi(\omega_n, \mathbf{q}_1) \xi(-\omega_n, -\mathbf{q}_2) \rangle_\xi = \frac{\beta \delta(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)}{r + \gamma(|\mathbf{q}_1|^2 - q_c^2)^2 + a_1 |\omega_n| + a_2 \omega_n^2}, \quad (6.1.14)$$

ここで r は次式を満たす繰り込まれた量である：

$$r = \tau + V^{-1} \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{p}) \Phi(-\mathbf{p}) + \frac{\lambda}{2} T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{r + \gamma(|\mathbf{p}|^2 - q_c^2)^2 + a_1 |\omega_n| + a_2 \omega_n^2}. \quad (6.1.15)$$

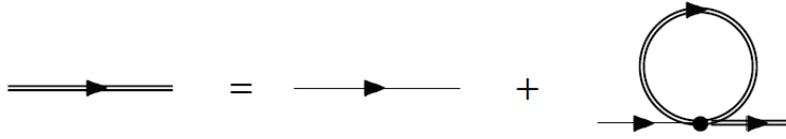


図 6.3: $\langle \xi(\omega_n, \mathbf{p}_2) \xi(-\omega_n, -\mathbf{p}_3) \rangle_\xi$ を決定する Schwinger-Dyson 方程式。実線 (2重線) は、裸の (線り込まれた) ξ の伝播関数を表す。

$\langle \xi(\omega_n, \mathbf{p}_2) \xi(-\omega_n, -\mathbf{p}_3) \rangle_\xi$ について、この量は揺らぎからの寄与を考慮した ϕ の伝播関数 $G_{\text{ps}}(\omega_n, \mathbf{q}) = \langle \phi(\omega_n, \mathbf{q}) \phi(-\omega_n, -\mathbf{q}) \rangle$ とは異なることに注意する。具体的には、 ξ の伝播関数は外場として Φ が入っているので、 $\langle \xi(\omega_n, \mathbf{q}) \xi(-\omega_n, -\mathbf{q}) \rangle_\xi|_{\Phi=0} = G_{\text{ps}}(\omega_n, \mathbf{q})$ である。

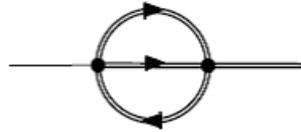


図 6.4: SD 方程式に寄与する高次のダイアグラム。

また、図 6.3 で与えられている SD 方程式は、(6.1.11) 式右辺第 6 項から考えられる全てのダイアグラムを足し上げている訳ではないことに注意する。実際、図 6.4 のような高次のループから来る寄与は落としてある。このようなグラフは温度の高次で表されるダイアグラムになっており、少なくとも低温では無視することができる。高温領域では図 6.4 は T 以外のパラメータにも影響されるので、その寄与の大きさを簡単に見積もることはできないが、Sec. 6.2 で近似の妥当性について言及する。

(6.1.14) 式および (6.1.15) 式を (6.1.13) 式に代入することで、これを具体的に書き下すことができる：

$$\frac{\delta \Omega}{\delta \Phi(-\mathbf{q}_1)} = \left[r + \gamma (|\mathbf{q}_1|^2 - q_c^2)^2 \right] \Phi(\mathbf{q}_1) + V^{-1} \frac{\lambda}{2!} \Phi(\mathbf{q}_1) \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{p}_2) \Phi(-\mathbf{p}_2) + \frac{\lambda}{3!} \sum_n \int \frac{d^3 p_2 d^3 p_3}{(2\pi)^6} \Phi(\mathbf{p}_2) \Phi(\mathbf{p}_3) \Phi(\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3). \quad (6.1.16)$$

(6.1.16) 式は Φ の汎関数微分を解析的に実行することができることに注意。以下では (6.1.16) 式を用いて揺らぎを考慮した頂点関数の表式を逐次導出する。このとき Φ の奇数次の項は全て消えるので、偶数次についてのみ導出する。

A $\bar{\Gamma}^{(2)}$ について

まずは2点関数の表式から導出する。(6.1.15)式より r は Φ の汎関数として与えられていることに注意。このとき(6.1.16)式より、熱力学関数の2回汎関数微分の表式は

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \Omega}{\delta \Phi(-\mathbf{q}_1) \delta \Phi(-\mathbf{q}_2)} &= \frac{\delta r}{\delta \Phi(-\mathbf{q}_2)} \Phi(\mathbf{q}_1) + \left[r + \gamma (|\mathbf{q}_1|^2 - q_c^2)^2 \right] \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \\ &\quad + V^{-1} \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{p}_3) \Phi(-\mathbf{p}_3) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) + \lambda V^{-1} \Phi(\mathbf{q}_1) \Phi(\mathbf{q}_2) \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{p}_3) \Phi(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_3). \end{aligned} \quad (6.1.17)$$

ここで $\delta r / \delta \Phi$ は(6.1.15)式より

$$\frac{\delta r}{\delta \Phi(-\mathbf{q})} = V^{-1} \lambda \Phi(\mathbf{q}) \left[1 + \frac{\lambda}{2} T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\left[r + \gamma (|\mathbf{p}|^2 - q_c^2)^2 + a_1 |\omega_n| + a_2 \omega_n^2 \right]^2} \right]^{-1}. \quad (6.1.18)$$

となる。(6.1.17)式および(6.1.18)式より、 $\bar{\Gamma}^{(2)}$ の表式として

$$\bar{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \left[\tau_R + \gamma (|\mathbf{q}_1|^2 - q_c^2)^2 \right],$$

を得る。ここで τ_R は揺らぎの寄与を考慮した ϕ の質量項であり、 $\tau_R \equiv r|_{\Phi=0}$ で定義される。具体的な表式は以下の通り：

$$\tau = \tau_R - \frac{\lambda}{2} T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\tau_R + \gamma (|\mathbf{p}|^2 - q_c^2)^2 + a_1 |\omega_n| + a_2 \omega_n^2}. \quad (6.1.19)$$

(6.1.19)式は松原振動数の和を含んでいる。具体的な計算はAppendix Cで行うとして、結果のみを与えると

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_R + \frac{\lambda}{8a_2\pi^3} \int_0^\infty dp \int_{1/\Lambda^2}^\infty \frac{dx p^2}{x \rho} \left(e^{-(\sigma-\rho)^2 x^2} - e^{-(\sigma+\rho)^2 x^2} \right) \\ &\quad - \frac{\lambda}{16\pi} \frac{q_c T}{\sqrt{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{\tau_R}} \frac{\lambda}{\bar{\gamma}} - \frac{\lambda \sigma}{a_2 \pi^3} \int_0^\infty dp \int_0^\infty dz \frac{1}{e^{z/T} + 1} \frac{p^2 z}{[z^2 + (\sigma + \rho)^2][z^2 + (\sigma - \rho)^2]}. \end{aligned} \quad (6.1.20)$$

となる (σ, ρ の定義はAppendix Cで与えている)。ここで(6.1.20)式において、真空部分の寄与をPTRを用いて正則化した。

最後に、(6.1.20)式から分かる τ_R の特徴について述べる。(6.1.20)式の右辺第3項は $1/\sqrt{\tau_R}$ に比例していることに注意。従って、この項は $\tau_R \rightarrow 0$ の下で負に発散している。これは任意の τ の値に対して $\tau_R > 0$ であることを意味している。2次相転移は $\tau_R = 0$ とならなければ実現しないので、従って揺らぎの効果を検討した場合、非一様-回復相転移は少なくとも2次相転移としては起こり得ないことが分かった。

$$\bar{\Gamma}^{(4)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) = V\lambda\delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4) \frac{1 + \frac{\lambda}{2} \text{ (ring diagram)}}{1 - \frac{\lambda}{2} \text{ (ring diagram)}}$$

図 6.5: $\bar{\Gamma}^{(4)}$ の模式図。リングダイアグラムは $-\Pi_2$ を表している。

B $\bar{\Gamma}^{(4)}$ について

次に $\bar{\Gamma}^{(4)}$ について考える。 $\bar{\Gamma}^{(2)}$ の場合と同様に考えると、(6.1.16) 式で汎関数微分を実行することにより

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{(4)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) &= \lambda\delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4) \\ &+ V^{-1} \frac{-\frac{\lambda}{2}\Pi_2}{1 + \frac{\lambda}{2}\Pi_2} (\delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)\delta(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4) + (2\text{permutations})), \end{aligned}$$

を得る。ここで Π_2 は揺らぎの場に関する自己エネルギーを表している：

$$\Pi_2 = T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{[\tau_R + \gamma(|\mathbf{p}|^2 - q_c^2)^2 + a_1|\omega_n| + a_2\omega_n^2]^2}. \quad (6.1.21)$$

Π_2 をダイアグラムで表すと図 6.5 のようになる。

(6.1.21) 式において、松原和が発散することなく実行される為には、伝播関数の分母は $\mathcal{O}(|\omega_n|)$ まで考慮すれば十分である。特に $a_1 \gg a_2T$ であるので、 $\mathcal{O}(\omega_n^2)$ の項は無視して構わない。以上より、松原和を実行した結果は以下の通り：

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \frac{1}{16\pi} \frac{q_c}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{1}{\pi a_1 \sqrt{\tau_R + \pi T a_1}} + \frac{T}{\tau_R^{3/2}} \right) \\ &- \frac{2}{\pi^3} a_1 \int_0^\infty dp \int_0^\infty dz \frac{1}{e^{z/T} + 1} \frac{(\tau_R + \gamma(p^2 - q_c^2)^2 + \pi T a_1)^2 p^2 z}{[a_1^2 z^2 + (\tau_R + \gamma(p^2 - q_c^2)^2 + \pi T a_1)^2]^2} \\ &\sim \frac{1}{16\pi} \frac{q_c}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{1}{\pi a_1 \sqrt{\tau_R}} + \frac{T}{\tau_R^{3/2}} \right). \end{aligned} \quad (6.1.22)$$

ここで最後の列では Π_2 の主要な寄与を果たす部分のみを取り出した。

$\bar{\Gamma}^{(4)}$ は非局所的な相互作用を表していることに注意。相転移の次数を議論する際は接触相互作用として記述されていることが望ましいので、これを等価に書き換える。これを実行する為に、具体的に非一様構造の関数形として $\Phi = \Delta \sin(qz)$ を選ぶ。 $\delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)\Phi^2(\mathbf{q}_1)\Phi^2(\mathbf{q}_2)$ を Fourier 変換すると $\Phi^2(x)\Phi^2(y)$ として与えられることに注意。 $V = \pi L^2/q$ (L : 系の x, y 軸方向の大きさ) とした上で変数の入れ替えも考慮し、1 周期分の積分値が接触相互作用の場合 ($\Phi^4(x)$) と合致するように係数を合わせる。具体的には

$$3 \times \left(\frac{q}{\pi} \int_0^{\pi/q} dz \Phi^2(z) \right)^2 = 2 \times \frac{q}{\pi} \int_0^{\pi/q} dz \Phi^4(z).$$

となる。ここで左辺の3は変数の入れ替えの自由度を表している。従って、デルタ関数の積は次のように書き換えることができる：

$$V^{-1}\delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)\delta(\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4) + (2\text{permutations}) \sim 2\delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4).$$

以下ではこのような近似を isotropic approximation と呼ぶ [113]。ここでは具体的に Φ の関数形を指定して計算を実行したが、この近似は高次元構造も含む任意の非一様構造に対して用いることができることに注意する。最終的な $\bar{\Gamma}^{(4)}$ の表式は以下の通り：

$$\bar{\Gamma}^{(4)} \sim \frac{1 - \frac{\lambda}{2}\Pi_2}{1 + \frac{\lambda}{2}\Pi_2} \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4). \quad (6.1.23)$$

(6.1.21) 式より Π_2 は正定値であることに注意する。従って、 Π_2 の大きさ次第では (6.1.23) 式の符号が反転することがある。 Π_2 は揺らぎの効果によって出現する項であるので、このことは揺らぎの寄与で相転移の次数が変化する可能性を示している ($\bar{\Gamma}^{(4)}$ が負でかつ十分小さければ相転移の次数は1次となる)。実際、Sec. 6.2 を見れば分かるように、 Π_2 は $\tau_R \rightarrow 0$ で急激に大きくなる為、 $\tau_R \sim 0$ で相転移の次数が2次から1次に変化することが分かる。

また、(6.1.23) 式は先行研究の結果をあらわに包含していることに注意する。実際 (6.1.23) 式において右辺第1項は $T \rightarrow 0$ の極限で残るので、この項は量子揺らぎからの寄与を表しているが、この項は Dyugaev によって導出された表式と係数および τ_R の次数が一致する [104]。さらに、本研究では Dyugaev による先行研究では考慮されていなかった効果も取り入れている。Dyugaev による研究では $\bar{\Gamma}^{(2)}$ の効果を考慮せず、従って Π_2 は $1/\tau^{1/2}$ に比例していた。一方本研究ではこの寄与を取り入れている為、 Π_2 は $1/\tau_R^{1/2}$ に比例している。さらに、(6.1.23) 式の右辺第2項は Brazovskii によって与えられた結果と完全に一致している [105]。従って、本研究の手法は先行研究の結果を包含していると言える。

C $\bar{\Gamma}^{(6)}$ について

最後に $\bar{\Gamma}^{(6)}$ について考える。(6.1.5) 式を見れば分かるように、本研究では MFA での $\Gamma^{(6)}$ の正定値性の下に、相転移の次数の変化を見る際この項は影響を与えないことを前提としてきた。この前提は $\bar{\Gamma}^{(4)}$ が揺らぎの効果によって急激に符号が変化し $\bar{\Gamma}^{(4)} \sim -1$ となるといふ、数値計算結果によって支持されていることに注意。実際 gGL と同様の議論から、1次相転移は $\bar{\Gamma}^{(4)} < 0$ かつ $(\bar{\Gamma}^{(4)})^2 \sim \bar{\Gamma}^{(2)}\bar{\Gamma}^{(6)}$ で起こるので、揺らぎの効果によって $\bar{\Gamma}^{(6)}$ の符号が変化しないまたは $\bar{\Gamma}^{(6)}$ 自体が発散しない限り、 $\bar{\Gamma}^{(4)}$ の符号が変化する点が1次相転移点と考えて差し支えない。もしも揺らぎの効果によって $\bar{\Gamma}^{(6)}$ の符号が負になるようならば、この前提は誤りであり、従って (6.1.5) 式で $\Gamma^{(6)}$ の項を取り入れた上で議論しなくてはならない。以下では $\Gamma^{(6)}$ に対する揺らぎの効果が小さいこと、従って $\Gamma^{(6)}$ は相転移の次数の変化を見る上で重要ではないことを見る。

具体的な計算はこれまでと同様である。 $\bar{\Gamma}^{(6)}$ の表式は以下の通り：

$$\bar{\Gamma}^{(6)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4, \mathbf{q}_5, \mathbf{q}_6) = \frac{\lambda^3 \Pi_3}{\left[1 + \frac{\lambda}{2} \Pi_2\right]^3} \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4 + \mathbf{q}_5 + \mathbf{q}_6). \quad (6.1.24)$$

ここで Π_3 は

$$\Pi_3 \sim \frac{3}{64\pi} \frac{q_c}{\sqrt{\gamma}} \frac{T}{\tau_R^{5/2}}.$$

で定められる。 $\Pi_3 / \left[1 + \frac{\lambda}{2} \Pi_2\right]^3$ は $\tau_R \rightarrow 0$ で発散していることに注意。 $\bar{\Gamma}^{(4)}$ が符号反転する領域は $\tau_R \rightarrow 0$ であるので、(6.1.24) 式より相転移線近傍では $\Gamma^{(6)}$ に対する揺らぎの効果は消えることが分かる。

$\bar{\Gamma}^{(6)}$ が消えてしまうのは一見問題があるように思われるが、これは (6.1.5) 式において $\Gamma^{(6)}$ を取り入れていなかったことに起因する。 $\Gamma^{(6)}$ が作用に含まれていると考えて、ここからの寄与を荒っぽく見積もると、正しい $\bar{\Gamma}^{(6)}$ の表式は

$$\bar{\Gamma}^{(6)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4, \mathbf{q}_5, \mathbf{q}_6) \sim \left(\Gamma^{(6)} + \frac{\lambda^3 \Pi_3}{\left[1 + \frac{\lambda}{2} \Pi_2\right]^3} \right) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4 + \mathbf{q}_5 + \mathbf{q}_6).$$

となる。熱力学的安定性の議論から、 $\Gamma^{(6)}$ は少なくとも相転移点近傍では正であることは知られている。以上より、 $\bar{\Gamma}^{(6)}$ は常に正であり、かつ揺らぎの影響をほとんど受けないことが分かった。従って、相転移の次数の変化を見る限りにおいて、我々は $\bar{\Gamma}^{(2)}$ および $\bar{\Gamma}^{(4)}$ の挙動のみに注目すれば十分である。

6.1.4 λ の決定について

本章の最後に裸の4点頂点関数である λ の決定について述べる。 λ を決定する最も素朴な方法は、作用を構成している元のクォークの理論から導出する手法である。本研究では有効模型として NJL 模型を採用しているので、ボソン化した熱力学関数を $|\mathbf{q}| \sim q_c$ の下で非一様構造の振幅 Δ の関数として表し、回復相における4次の係数を見ればよい。しかしながら、具体的に計算すると熱力学関数の表式は $\Delta, |\mathbf{q}|$ をパラメータとする積分関数として与えられるが、この関数は被積分関数に対し Δ 微分を実行したのち積分することができない。従ってこの手法で λ を決定しようとする、実直に数値微分を繰り返す必要がある。一般に高解の数値微分は誤差が大きく、特に λ は $\bar{\Gamma}^{(2)}, \bar{\Gamma}^{(4)}$ の決定に大きく影響を及ぼしてしまうので、単純に数値微分に頼ることは許されない。そこで本研究では他の手法を用いて λ を決定することにする。

他の手法として考えられるのは、熱力学関数を微分展開して係数を調べる方法である [92,93]。具体的に熱力学関数を書き下すと

$$\Omega \sim \left(\frac{\beta_2}{2} |\Phi|^2 + \frac{\beta_4}{4} |\Phi|^4 + \frac{\beta_6}{6} |\Phi|^6 \right) + \left(\frac{\beta_4}{4} + \frac{5\beta_6}{6} |\Phi|^2 \right) |\Phi|^2 \dots, \quad (6.1.25)$$

ここで $\{\beta_i\}_{i=2,4,6}$ は gGL によって与えられる係数と一致している [42]。特に β_2 の表式に着目すると、これは $\Gamma^{(2)}(0, \mathbf{0})$ と一致していることが分かる。このことは微分展開によって得られる熱力学関数は、本研究で用いた作用と正しく対応していること、また Sec. 6.1.1 と同様物理的自由度と対応させる為には適当な場の再定義 ($\tilde{\Phi} \equiv g_{\phi qq} \Phi$) が必要なことを意味している。以下では特定の非一様構造の関数形として $\Phi = \Delta \sin(qz)$ を採用し、 λ の表式を求める。

与えられた Φ に関して z 方向について 1 周期分平均化し、 q に関して熱力学関数を最小化すると、(6.1.25) 式の $\mathcal{O}(\Delta^4)$ の係数は $-\beta_4/16$ で与えられる [42]。一方 (6.1.12) 式で MFA を考え、同様の計算を行うと $\mathcal{O}(\Delta^4)$ の係数は $\lambda/64$ で与えられる。これらを比較し、適当な場の再定義による影響を考えると、 λ の表式として $\lambda = -4g_{\phi qq}^4 \beta_4$ を得る。

最後に β_4 の導出に関して注意を述べておく。一般に、 β_4 は真空部分に紫外発散に加えて赤外発散を含んでいる。赤外発散は媒質効果の部分と合わせることで除去することができるのだが、その際真空部分と媒質効果の部分とを同時に正則化しなくてはならない [114]。本研究で用いている PTR は真空部分にのみに用いているので、 β_4 の表式を求めるにあたり PTR を用いることができない。そこで本研究では PTR の代わりに通常 gGL でよく用いられている 3 次元運動量切断を正則化の手法として採用する。運動量切断パラメータの値はこれらの間で異なるので、記述する物理が異ならないよう適切に合わせる必要がある。本研究では PTR のパラメータを真空中での構成子クォーク質量およびパイオン崩壊定数を再現するように定めていたので、3 次元運動量切断でも同様にする。このようなパラメータの取り方は、 $\Lambda_{\text{TM}} = 653$ MeV, $G\Lambda_{\text{TM}}^2 = 2.14$ であることが知られている。

6.2 数値計算結果および議論

前節で揺らぎの効果を考慮する為の定式化ができたので、本節では具体的な数値計算結果を示し、これに関して議論する。前節の定式化は同様に一様-回復相転移についても考察できることに注意。我々は一様構造の物理に関しては良く調べられているので、ここから得られた結果と非一様構造での結果とを比較しながら議論することは意義深い。そこでまず始めに、一様-回復相転移での揺らぎの効果について議論し、その後非一様-回復相転移での揺らぎの効果について議論する。

6.2.1 一様-回復相転移について

本小節では MFA において非一様相が現れないような、高温低密度領域での一様-回復間の 2 次相転移について議論する。章の始めに述べたように、繰り込み群を用いた議論から、この相転移は揺らぎの効果を加味しても 2 次相転移として残ることが知られている [110, 111]。

そこで本節では $\bar{\Gamma}^{(2)}$ の挙動について調べ、 $\bar{\Gamma}^{(2)} = 0$ となる点を揺らぎの効果を考慮した 2 次相転移点とする。

前節では非一様相への相転移を念頭に議論を進めていた。そこで、数値計算結果を見る前に、これまでの議論を一様-回復相転移を考察できる形に少し変更する。具体的に変更する箇所は、 ξ に関する伝播関数の表式および λ の表式である。

一般に、伝播関数は (6.1.8) 式のように書けていたことに注意。非一様構造が存在する場合 ($q_c \neq 0$)、 $\mathcal{O}(|\mathbf{q}|^2 - q_c^2)$ の係数は q_c を決定する (3.3.8) 式により消えていた； $\bar{\gamma} = 0$ 。非一様構造が存在しない場合 ($q_c = 0$)、 $\bar{\gamma} = 0$ である必要はなく、一般には $\bar{\gamma} \neq 0$ となる。従って、 $G_{\text{ps}}^{-1}(\omega_n, \mathbf{q})$ の表式は

$$G_{\text{ps}}^{-1}(\omega_n, \mathbf{q}) \sim \tau + \bar{\gamma}|\mathbf{q}|^2 + a_1|\omega_n| + a_2\omega_n^2.$$

で与えられる。後は前節の計算と同様、図 6.3 で与えられる SD 方程式を計算すると、揺らぎの効果を考慮した 2 点関数 ($\bar{\Gamma}^{(2)} = \tau_R$) の表式として

$$\tau = \tau_R - \frac{\lambda}{4\pi^2} \left[\frac{1}{8\sqrt{a_2\bar{\gamma}}} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{dx}{x^2} e^{-\tau_R x / \bar{\gamma}} + \frac{\sqrt{a_2}}{\bar{\gamma}^{3/2}} \int_0^{\infty} dp \frac{p^2}{\sqrt{\tau_R/a_2 + p^2}} \frac{1}{e^{\beta\sqrt{\tau_R/a_2 + p^2}} + 1} \right], \quad (6.2.1)$$

を得る。ここで真空部分に対して PTR を用いて正則化した。(6.2.1) 式は、非一様構造の場合の τ_R を決定する方程式と定性的に異なる点があることに注意。Sec. 6.1.3 における $\bar{\Gamma}^{(2)}$ の決定でも触れたように、非一様構造が存在する場合 τ_R は正定値である。一方、(6.2.1) 式の右辺各項は $\tau_R \rightarrow 0$ の極限で全て収束している。従って一様-回復相転移の場合 2 次相転移は実際に起こり、それは τ に関する条件式として

$$\tau = -\frac{\lambda}{2} \left[\frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{\sqrt{a_2\bar{\gamma}}} + \frac{T^2}{12} \frac{a_2^2}{(a_2\bar{\gamma})^{3/2}} \right],$$

で定められていることが分かる。

次に λ の表式を求める。基本的に導出方法は Sec. 6.1.4 で与えた手法と同じである。ただし、一様-回復相転移を考える場合、 G_{ps}^{-1} の最小値が $q_c = 0$ で与えられるので、 λ と β_4 の関係式が異なる。具体的に計算すると、求める関係式は場の再定義も考慮に入れて $\lambda = 6g_{\phi qq}^{-4}\beta_4$ となる。

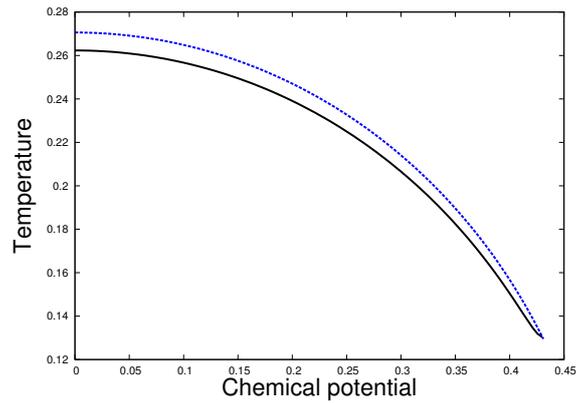


図 6.6: 一様-回復相転移の T - μ 平面上での相図。青点線は MFA での相境界を表し、黒実線は揺らぎの効果を検討した相境界を表す。

図 6.6 に一様-回復相転移の相境界を描いた。上述のように、揺らぎの効果の有無に依らず相転移の次数は 2 次である。青線と黒線との比較により、揺らぎの効果は各 T に対して相境界を μ が小さくなる方向に引き下げていることが分かる。

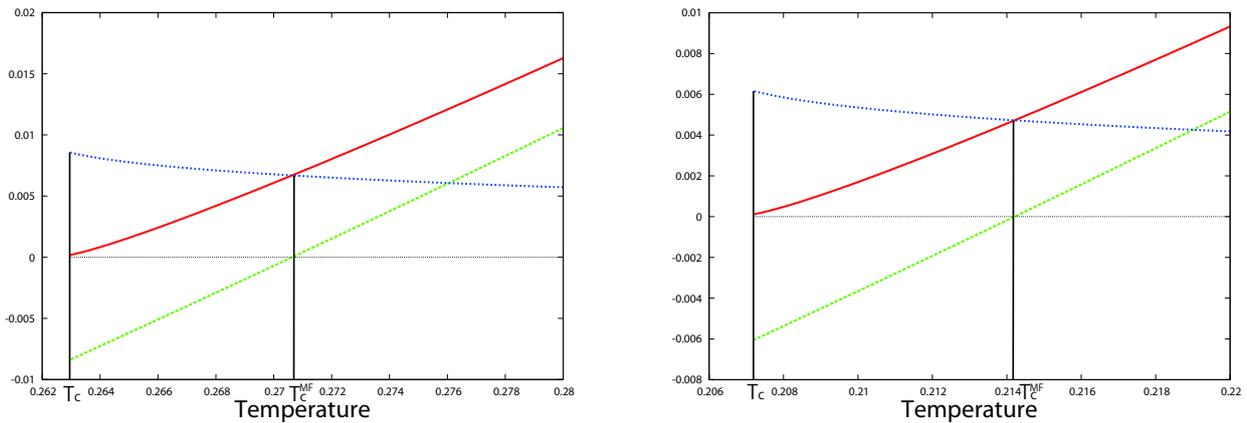


図 6.7: 固定された μ での τ, τ_R の変化を T の関数として描いた (左: $\mu = 0\text{MeV}$ 、右: $\mu = 0.3\Lambda\text{MeV}$)。赤実 (緑破) 線は τ_R (τ) の変化を表し、青点線は $\tau_R - \tau$ を表している。

相境界の振る舞いは τ, τ_R の振る舞いを調べることで理解することができる。図 6.7 にいくつかの μ に対して、 μ を固定した際の τ, τ_R の変化を T の関数として描いた。 τ, τ_R は揺らぎの効果の有無の違いはあるが、共に熱力学関数の 2 点関数に対応していることに注意。従って、2 次相転移は $\tau = 0$ (MFA)、 $\tau_R = 0$ (揺らぎの効果有り) で定められる。これらの点を T_c 、 T_c^{MF} とそれぞれ描いた。いずれの図についても T の減少と共に τ, τ_R は共に単調に減少していることが分かる。また、いずれの図についても揺らぎの効果によって τ_R の値は増加していることに注意する。従って、 $\tau_R = 0$ が実現するのは MFA での相転移点 ($\tau = 0$) よりも低温領域である。この傾向は任意の μ に対して同様に言えるので、図 6.6 のような QCD 相図を

得る。

最後に図 6.7 の青線について議論する。青線は $\tau_R - \tau$ を T の関数として描いたものであるが、この量は揺らぎの有無による 2 点関数の値の差を表しているので、この大きさは各 μ における揺らぎの効果の大きさを表していると解釈できる。図 6.7 の両図を見ると、 $\tau_R - \tau$ の値は T の増加と共に単調に減少していることが分かる。一般に T の増加は熱揺らぎの増加を示唆するので、この結果は一見直感と反しているように思われる。しかしながら、本研究では τ, λ といったパラメータが T の関数となっているので、実は無矛盾であることが分かる。つまり、 τ_R は τ, λ といったパラメータによって決定されているので、これらが揺らぎを小さくする方向に作用した結果、総合的に見て揺らぎの効果が T の上昇と共に小さくなっていると考えられる。

6.2.2 非一様-回復相転移について

一様構造に対する揺らぎの効果が分かったので、本小節では非一様構造に対する揺らぎの効果について議論する。本研究では、量子揺らぎと熱揺らぎの両者を同時に取り扱っていることに注意。これらを同時に考えるとそれぞれの効果が見えにくくなってしまいうように思われる。従って、本小節ではまず始めに $T \rightarrow 0$ の極限を考え、次に有限の T での相構造を調べる。

本小節で得られる結果を簡単に述べると以下の通りである。まず $T \rightarrow 0$ の極限について。熱揺らぎは $T \rightarrow 0$ で消えるので、従って量子揺らぎが支配的である。このとき量子揺らぎによって相転移の次数が変化すること、また相境界の位置も変化することを見る。

次に有限の T での議論について。一般に T の上昇に伴い熱揺らぎの効果は大きくなるので、従ってある温度領域からは熱揺らぎが支配的になると考えられる。この場合に関しても $T \rightarrow 0$ の極限と同様、揺らぎの効果によって相転移の次数は変化し、また相境界の位置も変化することを見る。

A $T \rightarrow 0$ の極限について

まずは $T \rightarrow 0$ の極限を考える。このとき $\bar{\Gamma}^{(2)}$ および $\bar{\Gamma}^{(4)}$ の表式は簡略化されることに注意。 $\bar{\Gamma}^{(2)}$ の表式について、(6.1.20) 式において温度依存する項は無視できるので

$$\begin{aligned} \tau \sim \tau_R + \frac{\lambda}{32\pi^2} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{dx}{x^2} e^{-\tau_R x} \\ + \frac{\lambda}{a_2} \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{\infty} dp \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{p^2}{\rho} \left(e^{-(\sigma-\rho)^2 x^2} - e^{-(\sigma+\rho)^2 x^2} \right). \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

を得る。同様に $\bar{\Gamma}^{(4)}$ について、この表式は Π_2 によって定められているが、(6.2.2) 式より

$$\Pi_2 \sim \frac{1}{16\pi} \frac{q_c}{\sqrt{\gamma}} \frac{1}{\pi a_1} \frac{1}{\sqrt{\tau_R}}. \quad (6.2.3)$$

となる。(6.2.3) 式は仮に $\bar{\Gamma}^{(2)}$ に対する揺らぎを考慮しなくとも定義されることに注意。その場合は (6.2.3) 式において $\tau_R \rightarrow \tau$ と置き換えれば良い。以下ではこれらの表式を念頭に置いて議論を進める。

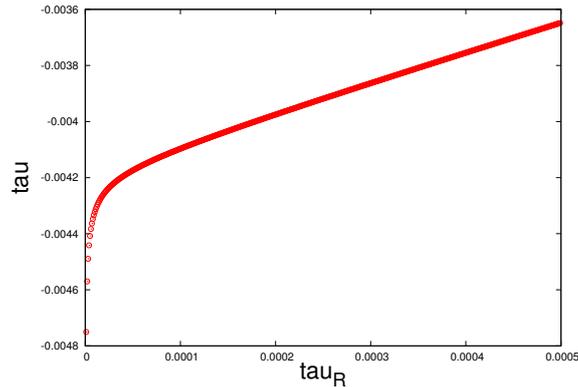


図 6.8: $T \sim 0, \mu = 0.5566\Lambda$ における τ, τ_R の関係式。

まず始めに図 6.8 に (6.2.2) 式から得られる τ と τ_R の関係を T, μ 固定の下で示した。Sec. 6.1.3 でも述べたように、 τ_R は任意の τ に対して正定値であることに注意。実際、図 6.8 では $\tau_R \rightarrow 0$ の極限で $\tau \rightarrow -\infty$ となっていることが分かる。

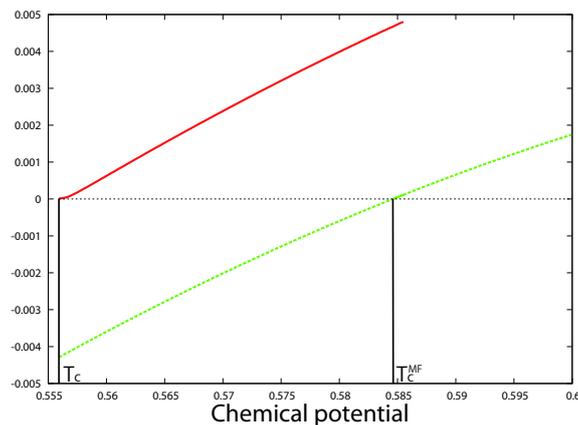


図 6.9: $T \sim 0$ の下で τ, τ_R を μ の関数として描いた。赤実 (緑点) 線は τ_R (τ) を表している。

次に $T \sim 0$ での τ, τ_R の値の推移を μ の関数として図 6.9 に描いた。まず τ について、 μ の減少と共にこの値は単調に減少し、最終的に $\tau < 0$ となる。特に $\tau = 0$ となる点は MFA での 2 次相転移点を表している。次に τ_R については、一様構造の場合と同様に揺らぎの効果によって各 μ において値が増加していることが分かる。

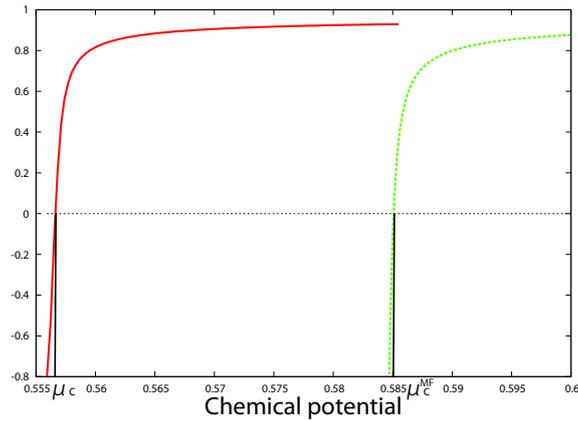


図 6.10: $T \sim 0$ における $\bar{\Gamma}^{(4)}$ の値を μ の関数として描いた。赤実線、緑点線はそれぞれ図 6.9 における τ_R, τ の値と対応している。

ここで相転移の次数の変化は $\bar{\Gamma}^{(4)}$ の符号の変化によって引き起こされていることに注意。 Π_2 は $\bar{\Gamma}^{(2)}$ に対する揺らぎを考慮してもしなくても定義できるので、図 6.9 の各線に対して $\bar{\Gamma}^{(4)}$ を μ の関数として与えることができる。

$T \sim 0$ における MFA の場合および揺らぎの効果を考慮した場合の $\bar{\Gamma}^{(4)}$ の値の変化を、図 6.10 に μ の関数として描いた。まず MFA の場合 (緑線) について考える。 $\bar{\Gamma}^{(4)}$ の値は μ の値が大きい領域では μ の減少と共に単調にゆるやかに減少し、MFA における臨界点近傍 ($\tau \sim 0$) では急激に減少し符号反転する。1 次相転移は $\bar{\Gamma}^{(4)} < 0$ かつ $(\bar{\Gamma}^{(4)})^2 \sim \bar{\Gamma}^{(2)}\bar{\Gamma}^{(6)}$ で起こることを思い出すと、 $\bar{\Gamma}^{(4)}$ が急減少する領域では $\bar{\Gamma}^{(2)} = \tau \sim 0$ であるので、1 次相転移点は $\tau = 0$ となる点で起こると考えてもほぼ誤差は与えない。以下では MFA での 1 次相転移点の温度および化学ポテンシャルを、それぞれ T_c^{MF} および μ_c^{MF} と表す。従って、熱力学関数の 2 点頂点関数への揺らぎを考慮しない場合、相転移の次数は 2 次から 1 次へと変化するが、その相境界の位置はほとんど変化しないことが分かった。

次に揺らぎの効果を考慮した場合 (赤線) について考える。 $\bar{\Gamma}^{(4)}$ の定性的な振る舞いは MFA は同様である。即ち、相転移点付近で $\bar{\Gamma}^{(4)}$ は急激に減少し、符号を変える。従って、相転移の次数は 2 次から 1 次へと変化するが、 $\bar{\Gamma}^{(4)} = 0$ となる点がほぼ誤差なく臨界点を与えている。以下では揺らぎを考慮した 1 次相転移点の温度および化学ポテンシャルを、それぞれ T_c および μ_c と表す。一方で、定量的な振る舞いについては MFA と大きく異なっていることに注意する。図 6.9 の赤線を見れば分かるように、量子揺らぎの効果によって τ_R の値は τ と比べて増加している。これに伴い、 $\bar{\Gamma}^{(4)}$ の値は MFA の場合と比べて大きくなる。結果、1 次相転移点は非一様相を減少させる方向に移動することが分かった。

B 有限の T について

量子揺らぎの効果による相転移の次数および位置の変化は分かったので、以下では有限の T で考える。以下では 2 (4) 点頂点関数に対する量子揺らぎとは (6.1.20) 式 ((6.1.22) 式) における第 2 項および第 3 項 (括弧内の第 1 項) を意味する。同様に、2 (4) 点頂点関数に対する熱揺らぎとは (6.1.20) 式 ((6.1.22) 式) における第 4 項および第 5 項 (括弧内の第 2 項) を意味する。 $q_c, \tau, \lambda, \gamma, a_1, a_2$ といったパラメータは全て T, μ 依存性を持っていることに注意。従って、例え「量子揺らぎ」であっても T, μ の値によってその寄与の大きさは変化する。本研究では、 $T \rightarrow 0$ の極限で残る項を広義の意味で量子揺らぎと呼ぶ。

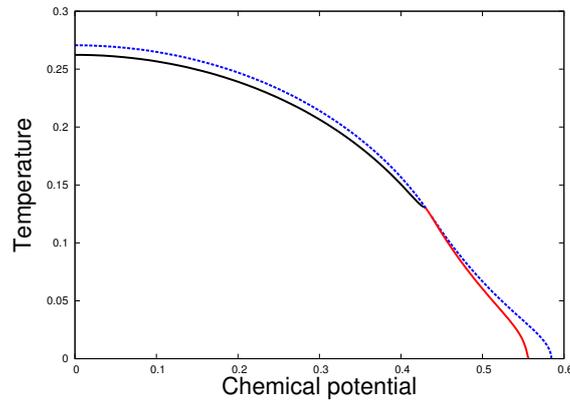


図 6.11: 量子および熱揺らぎの効果을考慮した QCD 相図。赤実線の終点が LP を表している。LP より高温領域の青点線および黒実線は図 6.6 と同様。LP より低温領域の青点線は MFA での終境界線を表し、赤実線は揺らぎの効果を考慮した終境界線を表す。

まず始めに量子および熱揺らぎの効果を考慮した QCD 相図を図 6.11 に描いた。一様-回復相転移の場合と同様、揺らぎの効果によって相境界は非一様相を減少させる方向へ動く。また、 $T \rightarrow 0$ の場合と同様、任意の T において $\bar{\Gamma}^{(4)}$ の符号は相境界上で反転する。従って、終境界線の相転移の次数は任意の T において 1 次である。

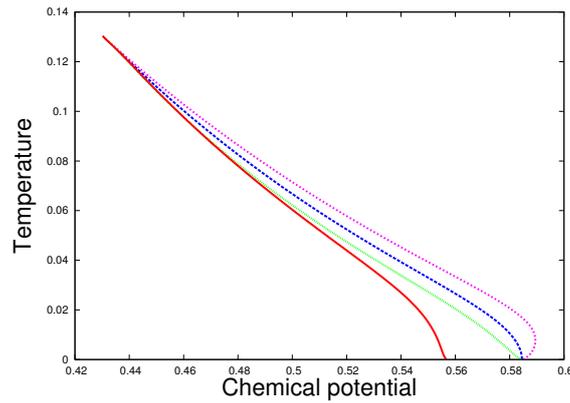


図 6.12: 揺らぎの効果を検討した終境界線。 $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(4)}$ に対する揺らぎの効果の有無に関して 4 種類描いた。

次に非一様-回復相転移に対する各頂点関数に対する揺らぎの効果を検討する為、図 6.12 に $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(4)}$ に対する揺らぎの効果の有無に関して相境界を 4 種類描いた。

まず始めに、 $\Gamma^{(4)}$ に対する量子揺らぎの役割について述べておく。 $T \rightarrow 0$ の場合における $\Gamma^{(4)}$ に対する量子揺らぎは、相転移の次数を変化させるだけでその位置に関しては影響を与えなかったことを思い出す。実はこの傾向は有限の T についても継承されている。即ち、 $\Gamma^{(4)}$ への量子揺らぎの有無で相境界の位置は変化しない。この事実を念頭に置いて、図 6.12 では青線を除いて全て $\Gamma^{(4)}$ に対する量子揺らぎを取り入れた結果を描いている。これは専ら相転移線をいたずらに増やすことで、議論が煩雑になってしまうことを避ける為である。尚、赤・緑・紫線は全て 1 次相転移線であるが、これらは $\Gamma^{(4)}$ に対する量子揺らぎの有無によって相転移の次数は変化しない。つまり $\Gamma^{(4)}$ に対する熱揺らぎは、相転移の次数を変化させる役割を持っている。以下では図 6.12 の各線について議論する。

図 6.12 の青 (破) 線に MFA の結果を描いた。この線は相関関数を用いた議論からも分かるように、2 次相転移線である。図 6.12 の紫 (点) 線は $\Gamma^{(4)}$ に量子および熱揺らぎを考慮した結果である。青線と紫線を比較すると、 $\Gamma^{(4)}$ に対する熱揺らぎは非一様相を拡大させる役割を持つが分かる。図 6.12 の緑線は $\Gamma^{(2)}$ に対して熱揺らぎを考慮し、 $\Gamma^{(4)}$ に量子および熱揺らぎを考慮した結果である。紫線と緑 (1 点鎖) 線を比較すると、 $\Gamma^{(2)}$ に対する熱揺らぎは非一様相を減少させる役割を持つことが分かる。最後に図 6.12 の赤 (実) 線について、これは $\Gamma^{(2)}$ および $\Gamma^{(4)}$ に量子および熱揺らぎを考慮した結果である。赤線と緑線を比較すると、 $\Gamma^{(2)}$ に対する量子揺らぎは非一様相を減少させる役割を持つことが分かる。

$\Gamma^{(2)}$ に対する揺らぎは量子または熱に関わらず非一様相を減少させる方向に働くことが分かったが、紫・緑・赤線を比較することで、これらの寄与の大きさを温度領域で比較できる。まず低温領域について、紫・緑線の比較から熱揺らぎはほぼ効かないことが分かる。一方量子揺らぎに関しては、緑・赤線の比較から非一様相を減少させる方向に働いている。従って、低

温領域では量子揺らぎの効果が支配的であると言える。この関係は、温度の上昇と共に逆転することに注意する。このことを見るために、 $\Gamma^{(2)}$ に対する量子または熱揺らぎが相境界の決定に与える影響を、各 T ごとに比較する。以下では紫・緑・赤線上の μ の値を T の関数としてそれぞれ $\mu_P(T), \mu_G(T), \mu_R(T)$ とする。このとき $\mu_P(T) - \mu_G(T)$ は、 $\Gamma^{(2)}$ に対する熱揺らぎが、非一様相を減少させた大きさと解釈することができる。同様に考えると、 $\mu_G(T) - \mu_R(T)$ は、 $\Gamma^{(2)}$ に対する量子揺らぎが、非一様相を減少させた大きさと解釈できる。これらを比較すると、 T が上昇するにつれ、 $\mu_G(T) - \mu_R(T) \gg \mu_P(T) - \mu_G(T)$ から $\mu_G(T) - \mu_R(T) \ll \mu_P(T) - \mu_G(T)$ へと変化していることが分かる。即ち、低温領域では量子揺らぎが支配的であるが、高温領域では熱揺らぎが支配的である。特に $T \sim 0.04\Lambda$ では $\mu_G(T) - \mu_R(T) \sim 0$ となり、量子揺らぎの効果がほぼ消滅している。

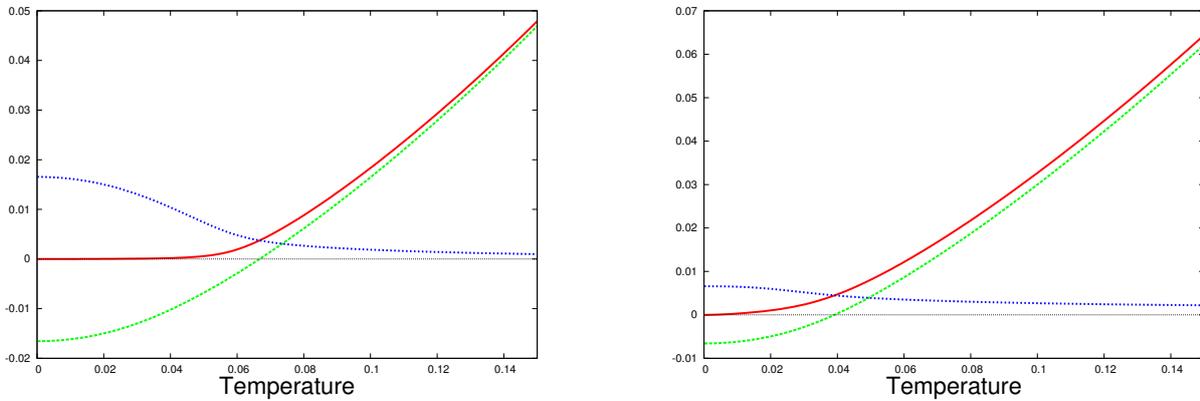


図 6.13: 固定された μ での τ, τ_R の変化を T の関数として描いた (左図: $\mu = 0.5\Lambda\text{MeV}$ 、右図: $\mu = 0.54\Lambda\text{MeV}$)。赤実(緑破)線は τ_R (τ) の変化を表し、青点線は $\tau_R - \tau$ を表している。

量子または熱揺らぎの各頂点関数に対して果たす役割については明らかになったので、以下では図 6.12 の青線 (MFA) および赤線 (全ての揺らぎの効果有り) を比較し、揺らぎの効果の温度変化について議論する。

上の議論と同様に考え、MFA での相境界上の化学ポテンシャルの値を $\mu_B(T)$ として $\mu_R(T)$ と $\mu_B(T)$ の値を比較する。 $\mu_B(T) - \mu_R(T)$ は揺らぎの大きさを表す目安と解釈することができるが、この値は T の上昇と共に単調に減少している。従って、揺らぎの効果は T の上昇と共に単調に減少していると考えられる。素朴に考えると熱揺らぎは T の上昇と共に増加するので、この結果は直感に反しているように思われる。この結果を考察する為に、図 6.13 を用いて議論する。図 6.13 に、いくつかの固定された μ に対して、 τ, τ_R の値の変化を T の関数として描いた。赤線 (τ_R) が揺らぎの効果によって緑線 (τ) と比べて増加すること、特に正定値性は (6.1.20) 式からの帰結であった。青線 ($\tau_R - \tau$) の挙動に注目する。この振る舞いは一様構造における振る舞い (図 6.7 の青線) と定性的には同じであり、いずれの図に関しても T の上昇と共に単調に減少している。一様構造の場合にも述べたように、この挙動の原因はパラ

メータの T 依存性にある。即ち、 τ_R は $\tau, \lambda, \gamma, a_1, a_2$ といった温度依存するパラメータによって決定されているので、これらの値の変化によって相境界の位置も変化していく。青線の単調性を考慮すると、これらのパラメータは総合的に見て T の上昇と共に揺らぎの効果を減少させる方向に働いていると解釈できる。この傾向は任意の μ に対して同様であるので、従って揺らぎの効果は温度の上昇と共に単調に減少すると結論付けられる。

以上は数値計算に基づいた考察であったが、LP 近傍に限定すれば、揺らぎの効果の上記の振る舞いの原因は以下のように理解できる。今回の計算では、 $\langle \xi \xi \xi \xi \rangle_\xi$ といった高次のキュムラントを落としているので、LP の位置は MFA の場合と比べて変化しないことに注意。即ち、LP では $\lambda = 0$ であるので、揺らぎの効果が消えてしまい MFA の結果と一致する。従って、LP の近傍では、揺らぎの効果は単調に減少する。

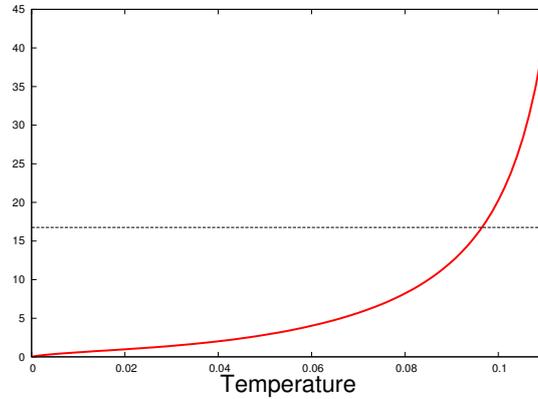


図 6.14: 近似の妥当性を考察する為の図。赤線は相境界上での (6.2.4) 式の右辺の値を T の関数で表した。黒線は $16\pi/3$ を表す。

本章の最後に、 τ_R の導出の際に課した近似の妥当性について言及する。 τ_R は SD 方程式を解くことで求められていたが、このとき考えられているダイアグラムは図 6.3 のみであったことに注意。即ち、本研究では例えば図 6.4 で与えられるような、高次のループからの寄与を無視している。一般に高次のループからの寄与は温度の上昇と共に無視できなくなるが、本研究では伝播関数に現れるパラメータにも T 依存性があるので、その挙動は非自明である。以下では図 6.3 と図 6.4 の寄与を比較し、どの程度の温度領域まで本研究で用いた近似が妥当であるか検証する。

非一様相が出現するのは温度領域であるので、図 6.3 と図 6.4 の主要な寄与は松原和の最低次によって与えられている。従って (6.1.20) 式より、図 6.3 の主要な寄与は $\lambda T q_c / 16\pi \sqrt{\gamma \tau_R}$ で与えられる。一方、図 6.4 の主要な寄与は

$$\lambda^2 T^2 \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6} \frac{1}{\tau + \gamma(|\mathbf{p}_1|^2 - q_c^2)^2} \frac{1}{\tau + \gamma(|\mathbf{p}_2|^2 - q_c^2)^2} \frac{1}{\tau + \gamma((\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 - q_c^2)^2} \sim \frac{3}{256\pi^2} \frac{\lambda^2 T^2}{\gamma^2 q_c^2 \tau_R}$$

で与えられる。これらを比較すると、本研究の近似が妥当であるのは

$$\frac{\lambda T q_c}{16\pi\sqrt{\gamma_{TR}}} \gg \frac{3}{256\pi^2} \frac{\lambda^2 T^2}{\gamma^2 q_c^2 T_R} \Leftrightarrow \frac{16\pi}{3} \gg \frac{\lambda T}{\gamma^{3/2} q_c^3 \sqrt{T_R}}. \quad (6.2.4)$$

を満たす温度領域に限られることが分かる。

図6.14の赤線に、相境界上での(6.2.4)式の右辺の値を T の関数として描いた。黒線は $16\pi/3$ を表すので、近似が妥当であるのは(黒線の値) \gg (赤線の値)となるような温度領域である。赤線は T の上昇と共に単調に上昇するので、従って温度の上昇に伴い図6.4からの寄与が無視できなくなっていく。最終的には $T \sim 0.09\Lambda$ 程度で図6.3の寄与と図6.4の寄与が同程度となり、これは我々の取扱いが破綻することを示している。

第7章 まとめと展望

本論文では、カイラル非一様相の性質を、これまでの簡単化された初期的研究から発展させることで明らかにした。以下で各章のまとめを述べ、最後に展望について述べる。

まず第4章では、外部磁場が存在する系に対するカイラル非一様相の性質について議論した。クォークのエネルギースペクトルが正負に非対称な場合、正負のエネルギー固有値の個数差によって、Atiyah-Patodi-Singer の η 不変量と呼ばれるトポロジカルな項が、クォーク数密度の表式に現れる。このような項によって、熱力学関数にはアノマリーに起因した負の量が加味される。 η 不変量は外部磁場と $\nabla\theta$ に比例していることに注意。従って、 η 不変量は熱力学関数に $\mathcal{O}(-qB)$ の寄与を与え、結果 $B \neq 0$ では位相方向に空間変調した非一様構造が(振幅そのものが消えない限り)出現することが分かった。

本章ではさらに、具体的な非一様構造を用いて相構造の詳細を議論した。非一様構造の関数形として、典型的な非一様構造である RKC および DCDW を包含する HCC を提案し、これに関して QCD 相図を求めた。結果、アノマリーの効果によって $B \neq 0$ では常に位相方向の波数が有限となる非一様構造が出現することを示した。

次に第5章では current quark mass (m_c) が非一様相に与える影響について議論した。カイラル極限では chiral circle 上の任意の点は全て等価な基底状態を与えていたが、 m_c の存在によって単一の基底状態を持つようになる。この効果は chiral circle 上に等価に巻き付くような非一様構造であった DCDW を、定性的に変化させる。即ち、有限質量効果によって DCDW は特定の基底状態のまわりに偏在した構造へと変化する。DCDW タイプの構造に対して BdG 方程式の厳密解を求めることは非常に困難であるため、本研究では非一様構造の位相方向に変分関数として $\theta(z)$ を与え、近似的に解を求めその熱力学的性質を調べた。

結果として、有限の m_c に対しても DCDW 相が存在することを示した。DCDW 相内部に関して、高温領域では非一様構造の波数が小さくなる為、LP に近づくにつれてより chiral circle 上の1点に偏在した非一様構造が出現することが分かった。また相境界に関して、始境界線はカイラル極限と同じく1次相転移として与えられ、終境界線はカイラル極限とは異なり1次相転移として特徴づけられる。特に終境界線近傍の回復相では DCDW 相は熱力学関数の極小として存在し、この領域では非一様構造は急激に偏在化されることを示した。このことは、終境界線付近では高次の m_c の寄与などによって、出現する非一様構造の関数形が大きく変化し得ることを示唆している。

最後に第6章では量子-熱揺らぎが非一様相に与える影響について議論した。これまで物性系やパイオン凝縮の研究において、非一様-一様相境界が2次相転移である場合、揺らぎの効果によって相転移の次数が1次へ変化することが示唆されてきた。相転移の次数が変化すれば、これに伴い例えば非一様相に特徴的な物理的応答も変化する。従って、非一様カイラル相転移の描像を正しく理解する為には、揺らぎの効果を検討することは重要である。先行研究ではこれまで量子または熱揺らぎをそれぞれ独立に考察していたが、本研究ではカイラル非一様相転移において、これら両者を同時に取扱い議論した。具体的には、典型的な非一様構造に対して終境界線は2次相転移線であることが知られているので、本研究では回復相でのMFAでの熱力学関数からスタートし、適切に揺らぎの効果を取り入れることで、揺らぎの効果を加味した熱力学関数の表式を秩序変数(Φ)のベキとして導出した。特に本研究では熱力学関数のベキの係数($\bar{\Gamma}^{(i)}$)の挙動を調べることで、相転移の次数およびその位置の量的変化を議論した。

結果、 $\bar{\Gamma}^{(4)}$ は量子または熱揺らぎのいずれも相転移の次数を変化させること、特に熱揺らぎは非一様相の領域を拡大させる効果を持つことを示した。また、 $\bar{\Gamma}^{(2)}$ への揺らぎは量子または熱揺らぎのいずれも非一様相の領域を減少させる効果を持つことを示した。これらの結果を合わせると、揺らぎの効果によって終境界線は1次相転移となり、かつ非一様相の領域は減少することが分かった。また、低温領域では量子揺らぎが相境界の決定に関して支配的であること、温度が上昇するにつれて熱揺らぎが支配的になることを示した。

本論文では「カイラル非一様相の発現およびその特徴について、既存の単純化された枠組みを本質的に発展させ、カイラル非一様相の理論的理解を深める」ことを念頭に議論を進めてきた。しかしながら、各研究項目では例えば外部磁場「のみ」を取り入れるといったようにあくまで限定的であり、未だ十分な議論がなされたとは言い難い。また、より現象論的研究を考える上でも、より多角的なカイラル非一様相の理解は必要である。例えばコンパクト天体内部では荷電中性が保たれていると考えられているが、uクォークとdクォークの電荷が異なる為、化学ポテンシャルに関して $\mu_u \neq \mu_d$ である。この効果を取り入れた議論としては例えば[27]などが挙げられるが、本論文で取り扱った内容も考慮し複合的に考察することが必要である。また、本論文で取り扱った議論に限っても、興味深い研究課題が残されている。有限の m_c の下で外部磁場の影響を議論した研究としては[115]があるものの、例えば揺らぎの寄与を含めた複合的考察といった領域は未開拓である。揺らぎの効果の議論に関しては、カイラル非一様相転移に限らず様々な理論的分野に対して関連する可能性を持つ。本研究で取り扱った手法は有効作用から出発して、非一様相転移の量子および熱揺らぎに対する次数の変化を議論するものであった。同様の考察は、例えばFFLOにおける相転移の次数の変化の議論へと関連付くことが期待される。

さらに、カイラル非一様相の存在を実証する為には、実験・観測によって得られる特徴的

な応答を説明・予言することが重要である。このことに関し、例えば [116] ではカイラル非一様相によるクォーク物質が自発磁化を持つことおよび、マグネターの強磁場の起源となる可能性が示唆されている。本論文からの直接的な展望としては、例えば揺らぎの効果による 1 次相転移に起因する物理量の応答などが挙げられる。例えば高分子系において、揺らぎによって誘導された 1 次相転移線上での核生成は、共重合体の特徴的な相転移の応答となることが言及されている [113,117]。カイラル非一様相の研究においても、同様の概念から知見が得られることが期待される。

謝辞

異敏隆氏には指導教官として、また共同研究者として、未熟な著者を常に気にかけて叱咤激励していただきました。さらに本論文執筆にあたり、同氏には幾度も有益な助言を与えていただきました。また國廣悌二氏、李東奎氏には著者が研究活動を進める上で度々議論に付き合ってください、さらに本論文執筆においても有益な助言を与えていただきました。最後に、原子核理論研究室のスタッフおよび院生の皆様には、研究活動や日々の生活を通じて著者を支えていただきました。ここに深く感謝の意を表したいと思います。

付録 A $\Pi_{\text{ps}}^0(\omega_n, \mathbf{q})$ の計算

本項では分極関数 $\Pi_{\text{ps}}^0(\omega_n, \mathbf{q})$ の表式を導出する。導出にあたり、クォークの虚時間における伝播関数 $S_\beta(\omega, \mathbf{q})$ からスタートする：

$$S_\beta(\omega_m, \mathbf{q}) = \frac{-1}{(i\omega_m + \mu)\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{q}},$$

ここで、 $\omega_m = (2n+1)\pi T$ ($m \in \mathbb{Z}$) はフェルミオンの松原振動数である。分極関数は $S_\beta(\omega_n, \mathbf{q})$ を用いて以下のように定義される：

$$\Pi_{\text{ps}}^0(\omega_n, \mathbf{q}) = T \sum_m \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{tr} [i\gamma_5 \tau_3 S_\beta(\omega_m + \omega_n, \mathbf{p} + \mathbf{q}) i\gamma_5 \tau_3 S_\beta(\omega_m, \mathbf{p})], \quad (\text{A.0.1})$$

以下では $\omega_m > 0$ として議論する。負の場合に対しても得られる結論は変わらない。(A.0.1) 式を具体的に計算する為に、実時間における遅延/先進グリーン関数を

$$S_{R/A}(\omega, \mathbf{q}) = - \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{(p'_0 \gamma_0 - \vec{\gamma} \cdot \mathbf{q}) \epsilon(p'_0) \delta(p'_0 - \mathbf{q}^2)}{\omega - p_0 \pm i\eta},$$

のように定義する。ここで $p'_0 = p_0 + \mu$ であり、 η を実の無限小の量とする。 $\omega_m > 0$ に対して、 $S_\beta(\omega_m, \mathbf{q}) = S_R(i\omega_m, \mathbf{q})$ の関係があることに注意。(A.0.1) 式に代入すると、 $\Pi_{\text{ps}}^0(\omega_n, \mathbf{q})$ の表式は

$$\Pi_{\text{ps}}^0(\omega_n, \mathbf{q}) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tanh \frac{\beta p_0}{2} \text{tr} [S_R(p_0 + i\omega_n, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \text{Im} S_R(p_0, \mathbf{p}) + S_A(p_0 - i\omega_n, \mathbf{p} - \mathbf{q}) \text{Im} S_R(p_0, \mathbf{p})], \quad (\text{A.0.2})$$

と書き換えられる。(A.0.2)の右辺第1・2項に関して、それぞれ計算を実行すると

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tanh \frac{\beta p_0}{2} \text{tr} [S_R(p_0 + i\omega_n, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \text{Im} S_R(p_0, \mathbf{p})] \\
&= -\frac{1}{2} \frac{N_f N_c}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 dx \int_0^\infty p dp \left[\tanh \frac{\beta(p - \mu)}{2} \left(1 - \frac{-\omega_n^2 - |\mathbf{q}|^2}{-\omega_n^2 - |\mathbf{q}|^2 - 2p|\mathbf{q}|x + 2ip\omega_n} \right) \right. \\
&\quad \left. - \tanh \frac{\beta(-p - \mu)}{2} \left(1 - \frac{-\omega_n^2 - |\mathbf{q}|^2}{-\omega_n^2 - q^2 - 2p|\mathbf{q}|x - 2ip\omega_n} \right) \right], \tag{A.0.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tanh \frac{\beta p_0}{2} \text{tr} [\text{Im} S_R(p_0, \mathbf{p}) S_A(p_0 - i\omega_n, \mathbf{p} - \mathbf{q})] \\
&= -\frac{1}{2} \frac{N_f N_c}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 dx \int_0^\infty p dp \left[\tanh \frac{\beta(p - \mu)}{2} \left(1 - \frac{-\omega_n^2 - q^2}{-\omega_n^2 - |\mathbf{q}|^2 + 2p|\mathbf{q}|x + 2ip\omega_n} \right) \right. \\
&\quad \left. - \tanh \frac{\beta(-p - \mu)}{2} \left(1 - \frac{-\omega_n^2 - |\mathbf{q}|^2}{-\omega_n^2 - |\mathbf{q}|^2 + 2p|\mathbf{q}|x - 2ip\omega_n} \right) \right]. \tag{A.0.4}
\end{aligned}$$

となる。(A.0.3)式と(A.0.4)式をまとめ真空部分についてPTRを行うと、 $\Pi_{\text{ps}}^{0,\text{vac}}(\omega_n, \mathbf{q})$ および $\Pi_{\text{ps}}^{0,\text{med}}(\omega_n, \mathbf{q})$ の表式を得る。

付録B $T \rightarrow 0$ での $\Pi_{\text{ps}}^{0,\text{med}}$ の表式

本項では $T \rightarrow 0$ での $\Pi_{\text{ps}}^{0,\text{med}}$ の表式を導出する。(A.0.2)式において $i\omega_n \rightarrow q_0$ と解析接続すると

$$\Pi_{\text{ps}}^0(q_0, \mathbf{q}) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tanh \frac{\beta p_0}{2} \text{tr} [S_R(p_0 + q_0, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \text{Im} S_R(p_0, \mathbf{p}) + S_A(p_0 - q_0, \mathbf{p} - \mathbf{q}) \text{Im} S_R(p_0, \mathbf{p})], \quad (\text{B.0.1})$$

となる。以下では(B.0.1)式の各項について、有限の T, μ からの寄与を計算する。第1項について、有限の T, μ からの寄与を取り出すと

$$\begin{aligned} & - \int \frac{d^4p}{(4\pi)^4} \tanh \frac{\beta p_0}{2} \text{tr} [S_R(p_0 + q_0, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \text{Im} S_R(p_0, \mathbf{p})] \\ & \rightarrow - \frac{N_f N_c}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 dx \int_0^\infty pdp \left[\frac{1}{e^{\beta(p-\mu)} + 1} \left(1 - \frac{q_0^2 - |\mathbf{q}|^2 + i\epsilon(p+q_0)\eta}{q_0^2 - |\mathbf{q}|^2 + 2pq_0 - 2p|\mathbf{q}|x + i\epsilon(p+q_0)\eta} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{e^{\beta(p-\mu)} + 1} \left(1 - \frac{q_0^2 - |\mathbf{q}|^2 + i\epsilon(-p+q_0)\eta}{q_0^2 - |\mathbf{q}|^2 - 2pq_0 - 2p|\mathbf{q}|x + i\epsilon(-p+q_0)\eta} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.0.2})$$

を得る。(B.0.2)式について、 $T \rightarrow 0$ の下で実部は

$$\frac{N_f N_c}{(2\pi)^2} \left[-\mu^2 + \frac{|\mathbf{q}|^2 - q_0^2}{2|\mathbf{q}|} \int_0^\mu dp \log \left| \frac{q_0^2 - |\mathbf{q}|^2 + 2pq_0 - 2p|\mathbf{q}|}{q_0^2 - |\mathbf{q}|^2 + 2pq_0 + 2p|\mathbf{q}|} \right| \right], \quad (\text{B.0.3})$$

虚部は

$$i \frac{N_f N_c}{8\pi} \frac{|\mathbf{q}|^2 - q_0^2}{|\mathbf{q}|} \left(\mu - \frac{|\mathbf{q}| - q_0}{2} \right) \theta(|\mathbf{q}| - q_0) \theta \left(\mu - \frac{|\mathbf{q}| - q_0}{2} \right), \quad (\text{B.0.4})$$

でそれぞれ与えられる。同様に第2項について、有限の T, μ からの寄与を取り出すと

$$\begin{aligned} & - \int \frac{d^4p}{(4\pi)^4} \tanh \frac{\beta p_0}{2} \text{tr} [\text{Im} S_R(p_0, \mathbf{p}) S_A(p_0 - q_0, \mathbf{p} - \mathbf{q})] \\ & \rightarrow - \frac{N_f N_c}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 dx \int_0^\infty pdp \left[\frac{1}{e^{\beta(p-\mu)} + 1} \left(1 - \frac{q_0^2 - |\mathbf{q}|^2 - i\epsilon(p-q_0)\eta}{q_0^2 - |\mathbf{q}|^2 - 2pq_0 + 2p|\mathbf{q}|x - i\epsilon(p-q_0)\eta} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{e^{\beta(p-\mu)} + 1} \left(1 - \frac{q_0^2 - |\mathbf{q}|^2 - i\epsilon(-p-q_0)\eta}{q_0^2 - |\mathbf{q}|^2 + 2pq_0 + 2p|\mathbf{q}|x + i\epsilon(-p+q_0)\eta} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.0.5})$$

を得る。(B.0.5)式について、 $T \rightarrow 0$ の下で実部は

$$\frac{N_f N_c}{(2\pi)^2} \left[-\mu^2 + \frac{|\mathbf{q}|^2 - q_0^2}{2|\mathbf{q}|} \int_0^\mu dp \log \left| \frac{q_0^2 - |\mathbf{q}|^2 - 2pq_0 - 2p|\mathbf{q}|}{q_0^2 - |\mathbf{q}|^2 - 2pq_0 + 2p|\mathbf{q}|} \right| \right], \quad (\text{B.0.6})$$

虚部は

$$-i \frac{N_f N_c}{8\pi} \frac{|\mathbf{q}|^2 - q_0^2}{|\mathbf{q}|} \left(\mu - \frac{|\mathbf{q}| + q_0}{2} \right) \theta(|\mathbf{q}| - q_0) \theta \left(\mu - \frac{|\mathbf{q}| + q_0}{2} \right), \quad (\text{B.0.7})$$

でそれぞれ与えられる。

(B.0.3) 式および (B.0.6) 式より、具体的に q_0 に関して展開すると、 $\Pi_{\text{ps}}^{0,\text{med}}$ の実部は q_0 に関して偶数のべきのみで構成されることが分かる。(B.0.4) 式および (B.0.7) 式から $\Pi_{\text{ps}}^{0,\text{med}}$ の虚部を求める。一般に $|\mathbf{q}| < 2\mu$ が $1+3$ 次元の非一様相では成立し、かつ伝播関数のループ積分において重要な寄与を果たすのは $q_0 \sim 0$ である。以下ではこの領域にのみ限って議論をすると、虚部の関数形は以下の通り：

$$i \frac{N_f N_c}{8\pi} \frac{|\mathbf{q}|^2 - q_0^2}{|\mathbf{q}|} q_0. \quad (\text{B.0.8})$$

(B.0.8) 式より虚部は q_0 の奇数次のべきのみで構成されている。

付録C (6.1.19)式における松原振動数の和

本項では (6.1.19) 式における松原振動数の和の具体的な計算を示す。具体的には

$$T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\eta + a_1 \omega_n + a_2 \omega_n^2},$$

の計算を実行する。ここで $\eta \equiv \tau_R + \gamma (|\mathbf{p}|^2 - q_c^2)^2$ である。以下では κ_{\pm} を $\eta + a_1 x + a_2 x^2 = 0$ の解とする。また、 a_1, η は常に正、 a_2 は常に負とする。この仮定の妥当性は数値的に保証される。

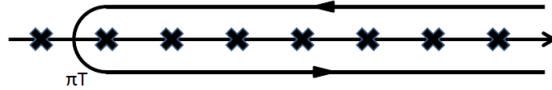


図 C.1: 松原和を実行する際の積分経路。

松原和を実行すると和は z 積分に置き換えられるが、図 C.1 のような積分路を考えれば、次の式を得る：

$$T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\eta + a_1 \omega_n + a_2 \omega_n^2} = \int_{i\infty+\pi T}^{-i\infty+\pi T} \frac{dz}{2\pi} \frac{1}{e^{iz/T} + 1} \frac{1}{\eta + a_1 z + a_2 z^2}.$$

κ_+ は正の値であるので、図 C.1 は κ_+ が極に含まれる場合がある。具体的には $\kappa_+ > \pi T$ の場合に対して、この項からの寄与も考慮しなくてはならない：

$$\begin{aligned} T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\eta + a_1 \omega_n + a_2 \omega_n^2} &= -\frac{2}{a_2} \int_0^{\infty} \frac{dz}{2\pi} \tanh \frac{z}{2T} \frac{\sigma z}{[z^2 + (\sigma + \rho)^2] [z^2 + (\sigma - \rho)^2]} \\ &\quad - i \text{Res}_{z \rightarrow \kappa_+} \frac{1}{a_2(z - \kappa_+)(z - \kappa_-)} \frac{1}{e^{iz/T} - 1} \\ &= -\frac{2}{a_2} \int_0^{\infty} \frac{dz}{2\pi} \tanh \frac{z}{2T} \frac{\sigma z}{[z^2 + (\sigma + \rho)^2] [z^2 + (\sigma - \rho)^2]} \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{a_1^2 - 4a_2\eta}} \cot \frac{\kappa_+}{2T}. \end{aligned} \quad (\text{C.0.1})$$

ここで σ, ρ は

$$\sigma = -\frac{a_1}{2a_2} - \pi T,$$
$$\rho = \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2\eta}}{2a_2},$$

(C.0.1) 式の右辺第 2 項が κ_+ からの寄与である。 η, κ_+ は運動量の関数となっていることに注意すると、この項は激しく振動し特に低温領域では各周期でキャンセルする、従って、(C.0.1) 式の運動量積分の結果、右辺第 2 項は無視できる。真空部分を PTR することで、最終的に (6.1.20) 式を得る。

関連図書

- [1] M. Gell- Mann, Phys. Lett. **8** (1964) 214.
- [2] M. Y. Han and Y. Nambu, Phys. Rev. B **139** (1965) 1006.
- [3] M. Gyulassy and L. McLerran, Nucl. Phys. A **750** (2004) 30.
- [4] A. Schmitt, Lect. Notes Phys. **811** (2010) 1.
- [5] D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343.
- [6] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346.
- [7] K. G. Wilson, Phys. Rev. D **10** (1974) 2445.
- [8] M. Creutz, Phys. Rev. D **21** (1980) 2308.
- [9] S. Muroya, A. Nakamura, C. Nonaka and T. Takaishi, Prog. Theor. Phys. **110** (2003) 615.
- [10] F. Karsch, Prog. Theor. Phys. Suppl. **153** (2004) 106.
- [11] Y. Nambu and G. Jona- Lasinio, Phys. Rev. **122** (1961) 345.
- [12] T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Rept. **247** (1994) 221.
- [13] S. P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64** (1992) 649.
- [14] D. Bailin and A. Love, Phys. Rept. **107** (1984) 325.
- [15] M. G. Alford, K. Rajagopal and F. Wilczek, Phys. Lett. B **422** (1998) 247.
- [16] K. Fukushima, Phys. Lett. B **591** (2004) 277.
- [17] P. Fulde and R. A. Ferrell, Phys. rev. A **135** (1964) 550.
- [18] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **47** (1964) 1136. Sov. Phys. JETP **20** (1965) 762.

- [19] A. W. Overhauser, Phys. Rev. Lett. **4** (1960) 462; Phys. Rev. **128** (1962) 1437.
- [20] G. Gruner, Rev. Mod. Phys. **66** (1994) 1.
- [21] G. Gruner, Rev. Mod. Phys. **60** (1988) 4.
- [22] T. Tatsumi and T. Muto, Phys. Rev. D **89** (2014) 103005.
- [23] S. Carignano, D. Nickel and M. Buballa, Phys. Rev. D **82** (2010) 054009.
- [24] I.E.Frolov, Z.Ch.Zhukovsky and K.G.Klimenko, Phys. Rev. D **82** (2010) 076002.
- [25] T.Tatsumi, K.Nishiyama and S.Karasawa, Phys. Lett. B **743** (2015) 66.
- [26] K. Nishiyama, S. Karasawa and T. Tatsumi, Phys.Rev. D **92** (2015) 036008.
- [27] Y. Iwata and H. Abuki, K. Suzuki, arXiv:1206.2870.
- [28] S. Karasawa and T. Tatsumi, Phys. Rev. D **92** (2015) 116004.
- [29] S. Karasawa, T.- G. Lee and T. Tatsumi, submitted.
- [30] G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 8.
- [31] J. Hubbard, Phys. Rev. Lett. **3** (1959) 77.
- [32] R. L. Stratonovich, *On a Method of Calculating Quantum Distribution Functions*, Soviet Physics Doklady **2**, 416.
- [33] J. I. Kapusta, *Finite – Temperature Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1989.
- [34] C. Itzykson and J.- B. Zuber, *QuantumFieldTheory*, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [35] M. Buballa and S. Carignano, Prog. Part. Nucl. Phys. **81** (2015) 39.
- [36] T. Tatsumi and E. Nakano, hep-ph/0408294 .
- [37] E. Nakano and T. Tatsumi, Phys.Rev. D **71** (2005) 114006.
- [38] G. Başar, G. V. Dunne and M. Thies, Phys.Rev. D **79** (2009) 105012.
- [39] G. Başar and G. V .Dunne, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 200404.
- [40] G. Başar and G. V. Dunne, Phys. Rev. D **78** (2008) 065022.

- [41] D. Nickel, Phys. Rev. D **80** (2009) 074025.
- [42] D. Nickel, Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 072301.
- [43] S. Kagoshima, H. Nagasawa and T. Sambongi, *One Dimensional Conductors*, Springer series in solid-state sciences Vol. 72, Springer-Verlag, Berlin 1988.
- [44] L. P. Gorkov and G. Gruner, *Charge Density waves in Solids*, MODERN PROBLEMS IN CONDENSED MATTER SCIENCES. VOL. 25, AMSTERDAM: North-Holland, 1989.
- [45] P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989.
- [46] G. Eilenberger, Z. Phys. **214** (1968) 195.
- [47] L. A. Dickey, *Soliton Equations and Hamiltonian Systems*, World Scientific, Singapore, 1991.
- [48] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajin, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*, Springer, Berlin, 1987
- [49] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segure, Stud. Appl. Math. **53** (1974) 249.
- [50] F. Correa, G. V. Dunne and M. S. Plyushchay, Ann. Phys. **324** (2009) 2522.
- [51] D. A. Takahashi, S. Tsuchida, R. Yoshii and M. Nitta, Phys. Lett. B **718** (2012) 632.
- [52] D. A. Daisuke and M. Nitta, Phys. Rev. Lett. **110** (2013) 131601.
- [53] A. Brazovskii and N. N. Kirova, JETP Lett. **33** (1980) 4.
- [54] M. Thies and K. Urlichs, Phys. Rev. D **71** (2005) 105008.
- [55] J. Feinberg and S. Hillel, Phys. Rev. D **72** (2005) 105009.
- [56] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [57] V. L. Ginzburg and L. D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **20** (1950) 1064.
- [58] O. Schnetz, M. Thies and K. Urlichs, Ann. Phys. **314** (2004) 425.
- [59] T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Rev. Lett. **66** (1985) 158.

- [60] T. Kunihiro, Phys. Lett. B **219** (1989) 363, Phys. Lett. B **245** (1990) 687.
- [61] A. Altland and B. Simons, *Condensed Matter Field Theory*, the United Kingdom at the University Press, Cambridge, 2006.
- [62] V. Skokov, A. Y. Illarionov and V. Toneev, Int. J. Mod. Phys. A **24** (2009) 5925.
- [63] S. A. Olausen and V. M. Kaspi, arXiv:1309.4167.
- [64] C. Thompson and R. C. Duncan, MNRAS **275** (1995) 255.
- [65] K. Fukushima, D. E. Kharzeev and H. J. Warringa, Phys. Rev. D **78** (2008) 074033.
- [66] V. Gusynin, V. Miransky and I. Shovkovy, Nucl. Phys. B **462** (1996) 249.
- [67] H. Suganuma and T. Tatsumi, Ann. Phys. **208** (1991) 470.
- [68] S. P. Klevansky and R. H. Lemmer, Phys. Rev. D **39** (1989) 3478.
- [69] K. G. Klimenko, Teor. Mat. Fiz. **89** (1991) 211; Theor. Math. Phys. **89** (1991) 1161.
- [70] K. G. Klimenko, Teor. Mat. Fiz. **90** (1992) 3; Theor. Math. Phys. **90** (1992) 1.
- [71] G. S. Bali, F. Bruckmann, G. Endrudi, Z. Fodor, S. D. Katz, S. Krieg, A. Schfer and K. K. Szab, J. High Energy Phys. **02** (2012) 044.
- [72] K. Fukushima and Y. Hidaka, Phys. Rev. Lett. **110** (2013) 031601.
- [73] J. Braun, W. A. Mian and S. Rechenberger, arXiv:1412.6025.
- [74] N. Mueller and J. M. Pawłowski, Phys. Rev. D **91** (2015) 116010.
- [75] K. A. Mamo, J. High Energy Phys. **05** (2015) 121.
- [76] G. Endrodi, arXiv:1311.0648 (accepted for publication in JHEP).
- [77] W. J. de Haas and P. van Alphen, Proc. Am. Acad. Arts Sci. **33** (1936) 1106.
- [78] D. Ebert, K. G. Klimenko, M. A. Vdovichenko and A. S. Vshivtsev, Phys. Rev. D **61** (1999) 025005.
- [79] A. J. Niemi and G. W. Semenoff, Phys. Reports **135** (1986) 99.
- [80] M. Atiyah, V. Patodi and I. Singer, Bull. Lond. Math. Soc **5** (1973) 229.

- [81] A. Chodos, K. Everding and D. A. Owen, *Phys. Rev. D* **42** (1990) 2881.
- [82] D. T. Son and M. A. Stephanov, *Phys. Rev. D* **77** (2008) 014021.
- [83] A. A. Sokolov and I. M. Ternov, *Radiation from Relativistic Electrons* (American Institute of Physics, New York, 1986).
- [84] T. Inagaki, D. Kimura and T. Murata, *Prog. Theor. Phys.* **111** (2004) 371.
- [85] O. Schnetz, M. Thies and K. Urlichs, *Annals. Phys.* **321** (2006) 2604.
- [86] C. Boehmer, M. Thies and K. Urlichs, *Phys. Rev. D* **75** (2007) 105017.
- [87] C. Boehmer, U. Fritsch, S. Kraus and M. Thies, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 065043.
- [88] G. Lamé, *Journal de mathématiques pures et appliquées* **2**, 147.
- [89] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Bateman Manuscript Project, Vol. III*, New York-Toronto-London, 1955.
- [90] S. Maedan, *Prog. Theor. Phys.* **123** (2010) 285.
- [91] V. Schon and M. Thies, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 096002.
- [92] K. Kikkawa, *Prog. Theor. Phys.* **56** (1976) 947.
- [93] T. Eguchi and H. Sugawara, *Phys. Rev. D* **10** (1974) 4257.
- [94] M. Gell-Mann, R. J. Oakes and B. Renner, *Phys. Rev.* **175** (1968) 2195.
- [95] L. Landau, *Diamagnetismus der Metalle. Z. Physik* **64** (1930) 629.
- [96] R. Peierls, *Z. Physik* **80** (1933) 763.
- [97] C. A. M. dos Santos, M. S. da Luz, Yi-Kuo. Yu, J. J. Neumeire, J. Moreno and B. D. White, *Phys. Rev. B* **77** (2008) 193106.
- [98] S. D. Liang, Y. H. Bai and B. Beng, *Phys. Rev. B* **74** (2006) 113304.
- [99] Y. Matsuda and H. Shimahara, *J. Phys. Soc. Japan* **76** (2007) 051005.
- [100] H. Shimahara, *J. Phys. Soc. Japan* **67** (1998) 1872.
- [101] Y. Ohashi, *J. Phys. Soc. Japan* **71** (2002) 2625.

- [102] T-. G. Lee, E. Nakano, Y. Tsue, T. Tatsumi and B. Friman, Phys. Rev. D **92** (2015) 034024.
- [103] Y. Hidaka, K. Kamikado, T. Kanazawa and T. Noumi, Phys. Rev. D **92** (2015) 034003.
- [104] A. Dyugaev, JETP Lett. **22** (1975) 83.
- [105] S. Brazovskii, Sov. Phys. JETP, **41** (1975) 85.
- [106] H. Fellner D. Briskin, D. L. Jhonson and M. E. Neubert, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 178.
- [107] L. Leibler, Macromolecules, **13** (1980) 1602.
- [108] F. S. Bates, J. H. Rosedale, G. H. Fredrickson and C. J. Glinka, Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 2229.
- [109] D. D. Ling, B. Friman and G. Grinstine, Phys. Rev. B, **24** (1981) 2718.
- [110] R. D. Pisarski and F. Wilczek, Phys. Rev. D **29** (1984) 338.
- [111] K. Fukushima and T. Hatsuda, Rept. Prog. Phys. **74** (2010) 014001.
- [112] A. B. Migdal, Rev. Mod. Phys. **50** (1978) 107.
- [113] G. H. Fredrickson and K. Binder, J. Chem. Phys. **91** (1989) 7265.
- [114] D. Ishibashi H. Abuki and K. Suzuki, Phys. Rev. D **85** (2013) 074002.
- [115] R. Yoshiike and T. Tatsumi, arXiv:1511.01248.
- [116] R. Yoshiike, K. Nishiyama and T. Tatsumi, Phys. Lett. B **751** (2015) 123.
- [117] P. C. Hohenberg and J. B. Swift, Phys. Rev. E **52** (1995) 1828.