数理解析レクチャー・ノート　3.

代　数　幾　何　学

――初学者のために――

広中平祐　講

1977年11月

数理解析レクチャー・ノート刊行会

代数幾何学

——初学者のために——

廣中平祐　講

ノート作製
森　重文

はしがき

この講義録は，1971年秋から72年の初頭にかけて，廣中平祐教授が京都大学理学部で行われたものの記録で，当時学生だった森重文氏に依頼してまとめて戴いたものである．当時から，何かの形で公にして我が国の数学界のお役に立てたいと思っていたのだが，今回廣中氏の快諾をえて，このシリーズ第3号として発行する運びになった．これで森氏の労にも応え得たものと思い，私としてもホッとした思いである．

標題は私がつけたのだが，副題として"初学者のために"とつけ加えたのも，講者の意図にそむくものではないと信じている．御覧のとおり，内容は代数幾何学の基礎的な点を説いたもので，"代数幾何学とは，$f_1(x_1,\cdots,x_n)=\cdots\cdots=f_m(x_1,\cdots,x_n)=0$（$f_i$は多項式）の解の全体の様子を調べる学問である"という，自然な考え方が流れていること，数多くの例が挙げられていることに見られるような，講者の奥行きの深さとが相まって，他にえがたい講義録になっていると思う．手書きの読みにくさは辛抱していただけると期待する．

このレクチャー・ノートを作りえたことについて，廣中教授，森重文氏および浄書にあたった数理研秘書諸姉に謝意を表する．

中野茂男

目　次

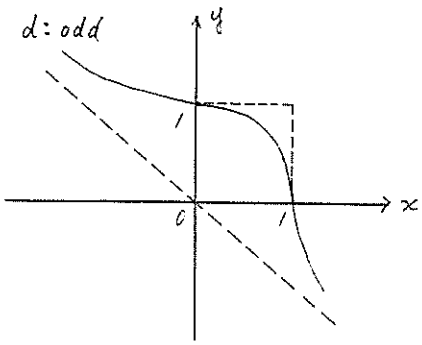
Introduction

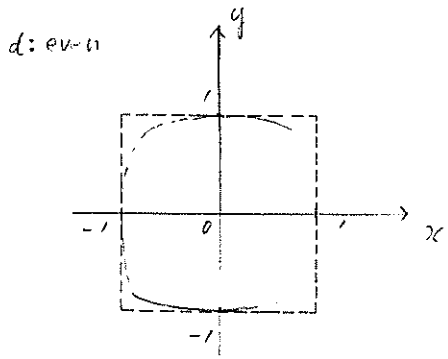
代数幾何学というのは、$f_1(x_1,\ldots,x_n) = \ldots = f_m(x_1,\ldots,x_n) = 0$ （ただし f_i は多項式）の $\boxed{\text{解の全体}}$ の様子を調べる学問である。従って、どの体の上で考えるかで、いろいろな代数幾何学ができる。

それを例をあげて説明しよう。

例　　$x^d + y^d = 1$　　（d は2以上の整数）

1)　x, y を実数とする。





2)　x, y を有理数とする。

すると問題は"上記の曲線上に有理点（座標が有理数の点）がどれだけあるか？"となる。これに関する次の conjecture はよく知られている。

Fermat's conjecture :　d > 2 の時　(1,0), (0,1) 以外には有理点がない。

ただし、d = 2 なら有理点はいくらでもある。

それは、$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = 1$ が恒等的に成立するから、
t に任意の有理数を代入すればよい。

3) x, y を複素数とする。

$\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$（平面）（$a + bi \leftrightarrow (a,b)$）だから $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^4$ であり、$x^d + y^d = 1$, $\bar{x}^d + \bar{y}^d = 1$ の2つの条件が与えられているから、$x^d + y^d = 1$ の $\boxed{\text{解の全体}}$ は $\mathbb{R}$-2次元（実曲面）になる。
これについて、位相幾何学的考察をしてみよう。
まず $\boxed{\text{解の全体}}$ に d 個の無限遠点を付加したものを $\boxed{\text{解の全体}}^*$ と表わすことにする。

$\boxed{\text{解の全体}}^* \underset{\text{homeo}}{\cong}$ 

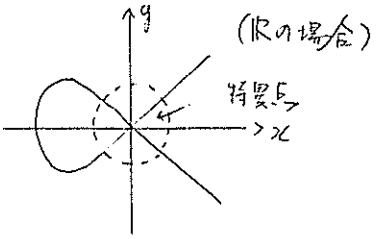
（穴の数 $= \frac{(d-1)(d-2)}{2}$）

特に $d = 2$ なら

$\boxed{\text{解の全体}}^* \underset{\text{homeo}}{\cong}$ 球面

更に、complex analytic structure までを考慮に入れれば、$\boxed{\text{解の全体}}^*$ は各点の近傍で manifold の構造をもち特異点のない curve である。逆に特異点をもった例としては次のようなものがある。

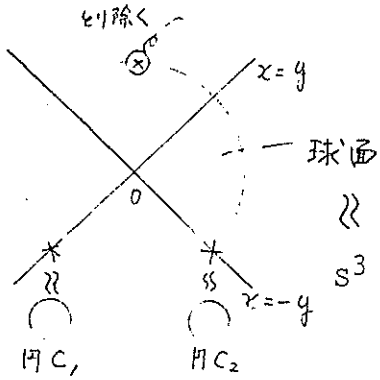
例1　$y^2 = x^2 + x^3$



原点のまわりでは

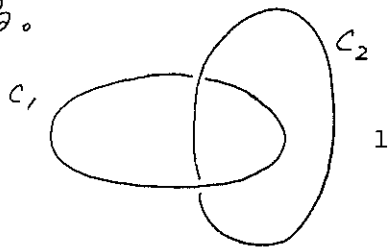
$$0 = y^2 - x^2 = (y + x)(y - x)$$

x, y を複素数として $\mathbb{R}^4$ の中で考えてみよう。
$\mathbb{R}^4$ の座標を (x_1, x_2, y_1, y_2) とする。



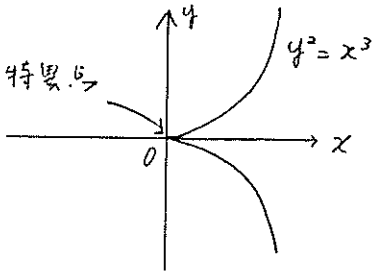
球面(3次元): $(x_1)^2+(x_2)^2+(y_1)^2+(y_2)^2=\varepsilon$
$\cong$ S^3
$\varepsilon > 0$ 十分小さいとする

そこで $S^3 - \{点(1,0,0,0)\} \cong \mathbb{R}^3$ $\left((x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto \left(\frac{x_2}{1-x_1}, \frac{y_1}{1-x_1}, \frac{y_2}{1-x_1}\right)\right)$ によって円 C_1, C_2 の関係を $\mathbb{R}^3$ の中で見ると次のようになっている。



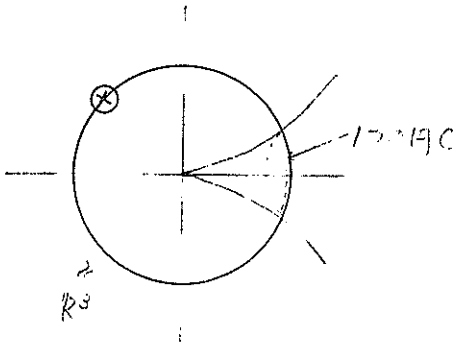
link

<u>例2</u> $y^2 = x^3$

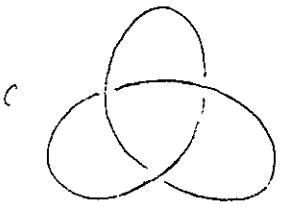


- x, y を実数とする。

- x, y を複素数として、例1と同様の操作をしてみよう。



CはR^3に次のようにembedされている。



knot

4) x, yをある有限体の代数的閉包の元とする。

pを素数とし、$d \notin p\mathbb{Z}$とする。そしてx, yを$\mathbb{F}_p$の中で考える。

$N_{p^n} \overset{\text{def.}}{=} \mathbb{F}_{p^n}$ に座標をもつ $x^d + y^d = 1$ の点の数.

$\mathbb{N} \ni s$ を $\mathbb{F}_{p^s}$ が -1 の d 乗根をすべて含むようにとって $q = p^s$ とおく,

$N'_{q^m} = N_{p^{sm}} + d$ として.

$\zeta(t) = \sum_{m>0} N'_{q^m} t^{m-1}$ とおくと、次の定理がある。

<u>定理</u>: $\zeta(t) = \frac{d}{dt} \log Z(t)$ である。

ただし $Z(t) = \frac{p(t)}{(1-t)(1-qt)}$

$p(t) = \prod_{i=1}^{2g} (1-\alpha_i t)$ 2g次の多項式

$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ = (複素数体上で考えた時のぬけ穴の数)

しかも、α_iに関しては次の定理がA. Weilによって示されて

いる。

<u>定理</u>: α_i は代数的整数で $|\alpha_i| = \sqrt{q}$

Chapter 1.

§1. Projective spaces I

<u>定義 1.1</u> V が k-vector space ($k = \mathbb{C}, \mathbb{R}$, 有限体等) であるとは

V に $\begin{cases} \text{加法} & V \times V \ni (v, v') \mapsto v + v' \in V \\ \text{スカラー乗法} & k \times V \ni (a, v) \mapsto av \in V \end{cases}$

が定義されており、これらが

I. 加群の性質

II. (scalar 乗法について)

結合的 ① $a(bv) = (ab)v \quad \forall a, \forall b \in k, \forall v \in V$

分配的 ② $a(v+v') = av+av' \quad \forall a \in k, \forall v, \forall v' \in V$

③ $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$

の性質を満たすことをいう。

<u>例 1.1</u> (有限次元) $V = \underbrace{k \times \cdots \times k}_{\ell} = k^\ell$ (set としての直積)に

加法: $v = (v_1, \ldots, v_\ell) \in V$, $v' = (v'_1, \ldots, v'_\ell) \in V$ について

$$v + v' \underset{\text{def.}}{=} (v_1 + v'_1, \ldots, v_\ell + v'_\ell) \in V$$

scalar 乗法: $av \underset{\text{def.}}{=} (av_1, \ldots, av_\ell) \quad a \in k$

を定義すると、これがk-vector spaceになることが、容易にわかる。

<u>定義 1.2</u>　k-vector space V の元 $w_1,\ldots,w_m$ が linearly independent である $\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $a_i \in k$, $\sum_{i=1}^{m} a_i w_i = 0$ ならば $\forall a_i = 0$

<u>定理 1.1</u>　V : vector space / k

V の linearly independent なvectors の列の最長なものはその長さ $(0,1,2,\ldots,n,\ldots,\infty)$ が一定. (V によりきまる)

(証明 略)

<u>定義 1.3</u>　その最長列の長さを $\dim_k V$ $(= \dim V)$ V の次元 と定義する

<u>定理－定義の系 1.1.1</u>

$\dim V = \ell(<\infty)$　$w_1,\ldots,w_\ell \in V$　とする。

この時、次の3条件は互いに同値である。

① $w_1,\ldots,w_\ell$ が linearly independent.

② $w_1,\ldots,w_\ell$ が V を生成する.

③ $(w_1,\ldots,w_\ell)$ によって　$\alpha : k^\ell \to V$ なる 全単射 (bijection)

で加法、乗法を保存するものが定まる。

ただし　$\alpha(a_1,\dots,a_\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} a_i w_i \in V$

これらの性質を持った $(w_1,\dots,w_\ell)$ を V の base と云う。

<u>例 1.2</u>　例1の $V = k^\ell$ については　$e_i = (0,\dots,0,\overset{i}{1},0,\dots,0)$

$i = 1,\dots,\ell$ が base.

∵ e_i が V を生成することは $(a_1,\dots,a_\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} a_i e_i$

より、又逆に $\sum_{i=1}^{\ell} a_i e_i = (a_1,\dots,a_\ell)$ だから $\sum_{i=1}^{\ell} a_i e_i = 0$

なら $\forall a_i = 0$ よって e_i は linearly independent.

V を $n+1$ 次元 $(n \geq 0)$ k-vector space とし

$V^* \underset{\text{def.}}{=} V - (0)$, $k^* \underset{\text{def.}}{=} k - (0)$ とおくと k^* は k の乗法で

自然に乗法群になり、k^* は V^* に作用する。$k^* \times V^* \ni (a,v) \mapsto av \in V^*$

[註] <u>1.1</u>　群 G が集合 X に作用するとは $G \times X \ni (g,x) \to gx \in X$

なる写像があって

$$\begin{cases} ① & g_1, g_2 \in G,\ x \in X \text{ に対して}\quad g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x \\ ② & \forall x \in X \text{ に対して}\quad ex = x \end{cases}$$

を満たすことを言う。

次に、k^* の作用による同値関係をいれる。

即ち：$v, v' \in V^*$ の時　$v \sim v' \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \exists \lambda \in k^*\quad v = \lambda v'$

この同値関係による同値類の集合を $\mathbb{P}_k^n$ (k上n次元の projective space) という。定義より、自然な map.

$$\begin{aligned} \pi : V^* &\to \mathbb{P}_k^n \\ \rotatebox{90}{$\in$} \quad & \\ v &\mapsto \pi(v) = \mathrm{cls}\ v \end{aligned}$$

が定義される。

<u>定義 1.4</u>　$\mathbb{P}_k^n$ の部分集合 L について

L が $\mathbb{P}_k^n$ の linear subspace である

$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$　$\pi^{-1}(L) \cup \{0\}$ が V の vector subspace

[註] <u>1.2</u>　W を V の vector subspace とすると

$W^* = W - \{0\} \subset V^*$

$\pi(W^*)$ が $\mathbb{P}_k^n$ の linear subspace

∵　$L = \pi(W^*)$ とおくと　$W = \pi^{-1}(L) \cup \{0\}$

<u>定理 1.2</u>　$\{V \text{ の vector subspaces}\} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \{\mathbb{P} \text{ の linear subspaces}\}$

が 1-1 の対応である.

$\alpha : W \subset V \qquad \alpha(W) = \pi(W - \{0\}) \subset \mathbb{P}$

$\beta : L \subset \mathbb{P} \qquad \beta(L) = \pi^{-1}(L) \cup \{0\} \subset V$

とおくと、$\alpha(W)$ が linear subspace であることは、上記 [註] より、$\alpha(\beta(L))$ が linear subspace であることは、定義より明らかで、$\alpha\beta = \mathrm{id}.$　$\beta\alpha = \mathrm{id}.$ であることがわかる。

例 1.3　① $W = \{0\}$ は V の vector subspace

この時　$\alpha(W) = \phi \subset \mathbb{P}$ は linear subspace

② W が $\dim W = 1 \Leftrightarrow \alpha(W)$ が一点

系 1.2.1　α(又は β)によって

$\mathbb{P}$ の点集合

$\underset{1-1}{\longleftrightarrow}$ V の中の原点を通る直線 (1-dim vector subspace) の集合.

$V = k^{n+1}$ (base を決めると　系 1.1.1 により同型が定まる)

この上で、座標関数

$x_i : (a_0, \ldots, a_n) \mapsto a_i$　なる

V の函数　$(i = 0, 1, \ldots, n)$　を考える。

定義 1.5　$(x_0, \ldots, x\ )$ を $\mathbb{P}$ の homogeneous coordinate system

(斉次座標) と定義する.

[註] 1.3　1) 各点　$\xi \in \mathbb{P}$ に対して

h.c.sys. の比が一意的にきまる。

即ち $\pi^{-1}(\xi) = \text{line} - \{0\} \ni {}^{\forall}v$　に対して

$(x_0(v), \ldots, x_n(v)) \in k^{n+1}$ で少なくとも1つの

$x_i(v) \neq 0$

連比　$(x_0(v) : \ldots : x_n(v))$ は v のとり方によらない。

2) $\xi, \xi' \in \mathbb{P}$ で、対応する連比が一致すれば $\xi = \xi'$.

これから次の定理が得られる。

<u>定理 1.3</u>　$\mathbb{P}^n$ の点集合

$\overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ 連比の集合（n+1 個の数の）

（ただし　0:0:...:0:0 なる trivial なものを除く）

[註] <u>1.4</u>　上の対応は、V の base をきめた時にはじめて定義されるものである。

$\mathbb{P}^n$ の homogeneous coordinate system $x_0, \ldots, x_n$ の d 次斉次多項式 $f(d > 0)$（即ち $f(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{i_0+\ldots+i_n=d \\ i_j \geq 0}} a_{i_0 \ldots i_n} x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n}$

について

"$\mathbb{P}$ の中の点 ξ で $f = 0$" というのは意味がある。

$\pi^{-1}(\xi) \ni v, v'$ をとると　$^\exists \lambda \in k^*$　$v' = \lambda v$

$f(v') = \lambda^d f(v)$　だから　$f(v') = 0 \Leftrightarrow f(v) = 0$

よって　　$f(\xi) = 0 \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} f(v) = 0$　（これは v のとり方によらない）

さて、x_i を上記の h.c.sys. とする時、

$U_i = \{\xi \in \mathbb{P} \mid x_i(\xi) \neq 0\}$　とおくと

<u>定理 1.4</u>　1) "自然" な方法で　$U_i \cong k^n$, $i = 0, 1, \ldots, n$

2) $\mathbb{P} = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$

[註] n次元の projective space $\mathbb{P}^n$ は n+1 個の vector space をはりあわせたもの

(証) 2) はどの $\xi \in \mathbb{P}$ をとっても、少くとも1つの i について $x_i(\xi) \neq 0$ だから明らか。

1) $\xi \in U_i$, 連比 $(x_0(\xi):x_1(\xi):\ldots:x_n(\xi))$ の時

$$x_i(\xi) \neq 0$$

$$\xi \mapsto \left(\frac{x_0(\xi)}{x_i(\xi)}, \frac{x_1(\xi)}{x_i(\xi)}, \ldots, \frac{x_n(\xi)}{x_i(\xi)}\right) \in k^n$$

$\left(\frac{x_i(\xi)}{x_i(\xi)}\right.$ は除く $\left.\right)$

この写像が1-1であることは、連比の定義より明らか。

<u>例 1.4</u> (1) $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} =$ 円 h.c.sys. (x_0, x_1)

$\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$

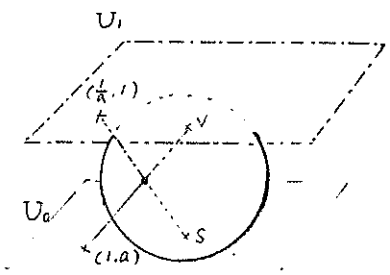
$U_0 \cong \mathbb{R} \quad (x_0:x_1) \leftrightarrow \frac{x_1}{x_0} = t \in \mathbb{R}$

$U_1 \cong \mathbb{R} \quad (x_0, x_1) \leftrightarrow \frac{x_n}{x_1} \ (= \frac{1}{t}) \in \mathbb{R}$

(2) $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ (実2次元曲面)

$\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1 \quad U_i \cong \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong S^2$ (2次元 sphere)



$N = (0, 1) \qquad S = (1, 0)$

$\pi : k^{n+1}-\{0\} \to \mathbb{P}^n$

$k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする

k^{n+1} の中で単位球面 S をとる。

$k = \mathbb{R}$ のときには $S = S^n$ n 次元

$$S^n = \{(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} a_i^2 = 1\}$$

$k = \mathbb{C}$ のときには $S = S^{2n+1}$ $(2n+1)$ 次元

$$S^{2n+1} = \{(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} a_i\bar{a}_i = 1\}$$

（ただし $z_i = x_i + y_i\sqrt{-1}$ $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,\dots,n$ とおくと

$$\sum_{i=0}^{n} z_i\bar{z}_i = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + \sum_{i=0}^{n} y_i^2$$ ）

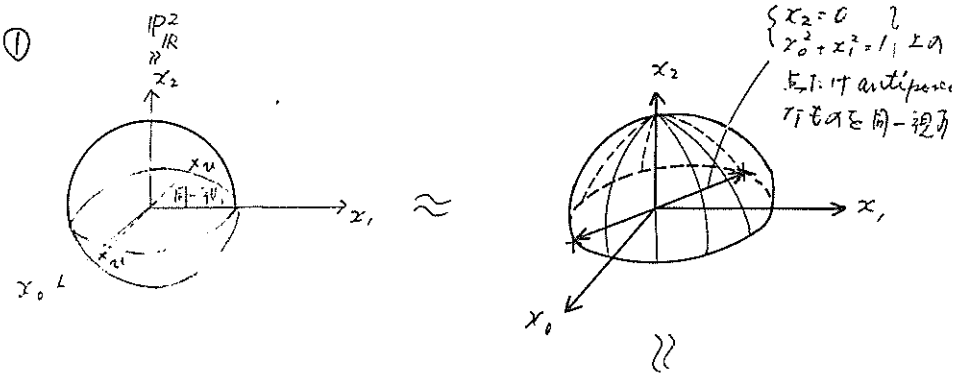
[註] 1.5 π は surjective な $\pi_0 : S \to \mathbb{P}^n$ を induce する

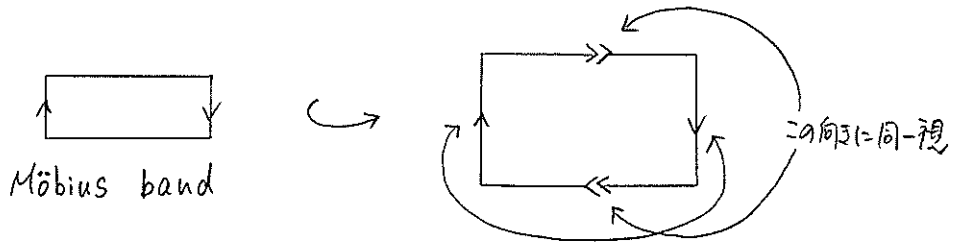
$k = \mathbb{R}$ の時 各点 $\xi \in \mathbb{P}$ に対して $\pi_0^{-1}(\xi)$ は 2 点からなる

$(= \{v, -v\},\ v \in S)$

$k = \mathbb{C}$ の時 $\pi_0^{-1}(\xi) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = 1$ つの circle

例 1.5 ①





従って $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ は non-orientable な曲面である.

② $\pi_0 : S^3 \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = S^2$

$\uparrow$

各 fibre $\cong S^1$

§2. Projective transformations

V^{n+1} を $(n+1)$-次元の k-vector space とし

$\pi : V^* \to \mathbb{P}^n$ を自然な写像とする.

V の base $(e_1,\dots,e_n)$ をとると

$$\begin{array}{ccc} V & \cong & k^{n+1} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \sum_{i=0}^{n} a_i e_i & \leftrightarrow & (a_0,\dots,a_n) \end{array}$$

この時 linear map. $f : V \to V'$ は $(f(e_0),\dots,f(e_n))$ によって一意にきまる。

$$\because \quad f\left(\sum_{i=0}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(e_i)$$

特に $V' = V$ の時. f は linear endomorphism になり

$f(e_i) = \sum_{j=0}^{n} A_{ij} e_j$ とおくとき

$f \mapsto ((A_{ij})) \in M_{n+1}(k)$ なる対応が定まり

$g \mapsto ((B_{jk}))$ とおくとき

$g \circ f \mapsto ((A_{ij}))((B_{jk}))$ (anti-ring homomorphism)

[註] <u>2.1</u> 線型代数により $\mathrm{End}_k V \underset{\uparrow}{\cong} M_{n+1}(k)$

この同型は"baseをきめる" と定まる(non-canonical)

$g \in \mathrm{End}_k V$ が $g \in GL(V)$, i.e. g が automorphism

$\Leftrightarrow$ $^{\exists} b \in \mathrm{End}_k(V)$ $gb = bg = \mathrm{id}$.

$\Leftrightarrow$ g が 1-1 対応

$$GL(V) \cong \{A \in M_{n+1}(k) \mid \det A \neq 0\}$$

$g \in GL(V)$ とすると

(a) $g(av) = ag(v)$, i.e. "lines"は"lines"に写される.

(b) $v \neq 0$ なら $g(v) \neq 0$

従って $^{\forall}\xi \in \mathbb{P}^n$ に対して一意的に $^{\exists}\eta \in \mathbb{P}^n$

$$g(\pi^{-1}(\xi)) = \pi^{-1}(\eta)$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & V \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{P} \arrow[r, "\bar{g}"] & \mathbb{P} \end{tikzcd}$$

即ち $g \in GL(V)$は (右図の diagram を可換にする) $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$

の map $\bar{g}$ を定める

($\bar{g}$ は逆元をもつ $(\bar{g})^{-1} = (\overline{g^{-1}})$)

従って $GL(V) \xrightarrow[\rho]{\text{map}} \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$

これから

<u>定義 2.1</u> $b \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$ で $P(g)$, $g \in GL(V)$ となるものを $\mathbb{P}^n$

の linear automorphism という。

$\mathbb{P}^n$ の linear automorphism の全体 (= ρ の image) を projective linear group といい $PL(V)$, $PL(\mathbb{P})$ で表わす。

$\rho : Aut(V) \to PL(V)$ は surjective group-homomorphism である.

<u>定理 2.1</u> $\rho^{-1}(1) \cong k^*$ $(= k - \{0\})$ 乗法群とみる。

(証) V^{n+1} の base $e_0, \ldots, e_n$ をとり

$b \in GL(V)$ については

$b(\xi_i) = \xi_i \quad i = 0, \ldots, n$ とする. ただし

各 e_i に対し $\pi(e_i) = \xi_i \in \mathbb{P}^n$

これだけから. b に対応する matrix A は diagonal $\begin{pmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ であることがわかる.

所で $e_{n+1} = e_0 + \ldots + e_n$, $\xi_{n+1} = \pi(e_{n+1})$ とおくと

同じ理由で $\bar{b}(\xi_{n+1}) = \xi_{n+1} \in \mathbb{P}$

即ち $b(e_{n+1}) = \lambda_{n+1} e_{n+1}$ とおくと

$$b(e_{n+1}) = b(\sum e_i) = \sum b(e_i) = \sum \lambda_i e_i$$

又 $b(e_{n+1}) = \lambda_{n+1} \sum e_i$

$\therefore \quad \lambda_i = \lambda_j \quad \forall i, j \qquad (\because \{e_i\}$ は linearly independent)

故に $A = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$ (同じ λ) となり

$\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \longleftrightarrow \lambda \in k^*$ により所要の isom が与えられる。

定義 2.2 $\mathbb{P}^n$ の点 $\xi_s,\dots,\xi_d$ をとるとき

$\xi_0,\dots,\xi_d$ が linearly independent

$\Leftrightarrow$ 各 i について $v_i \in \pi^{-1}(\xi_i)$ を任意にとるとき

$v_0,\dots,v_\ell$ が linearly independent (v の中で)

[註] 2.2 (v_i の) ある1つのとり方について確めれば十分.

何故なら $v_1,\dots,v_\ell$ が linearly independent $\Leftrightarrow a_0v_0,\dots,a_dv_d$ ($\forall a_i \neq 0$) linearly independent

定義 2.3 $\mathbb{P}^n$ の点 $\xi_0,\dots,\xi_d$ が一般の位置 (general position) にある。

$\Leftrightarrow$ その内から任意に m 個 ($m \leq n+1$) とると、その m 個が linearly independent

[註①] $\mathbb{P}^n$ の中には必ず (n+1) 個の linearly independent の点系がある。

例 V の base を $e_0,\dots,e_n$ とおくと

$\pi(e_1),\dots,\pi(e_n)$ は linearly independent

② $\mathbb{P}^n$ の中に任意に $\ell(>n+1)$ 個の点系をとると、それらは linearly independent でない。

定理 2.2 (1) (k がどんな体でも) $\mathbb{P}^n$ の中に (n+2) 個の点を general position にとれる。

(2)(kがどんな体でも) $\mathbb{P}^n$ の中の general position にある(n+2)個の点の系を任意に2つとる。

$\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n+1}\}, \{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n+1}\}$

この時 $\bar{g} \in PL(\mathbb{P})$ で次の性質をもつものが一意的に存在する。

$$\bar{g}(\xi_i) = \eta_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n+1)$$

(証) (1)(base を定めて) $V \cong k^{n+1}$ とすると

$e_i = (0, \ldots, 0, \underset{\hat{i}}{1}, 0 \ldots, 0)$ $(i = 0, \ldots, n)$ $e_{n+1} = (1, 1, \ldots, 1)$

$e_0, \ldots, e_{n+1}$ のどの (n+1) 個も独立。

よって $\pi(e_0), \ldots, \pi(e_{n+1})$ は general position にある。

(2) 各 i について $e_i \in \pi^{-1}(\xi_i)$ $i = 0, 1, \ldots, n$ とおくと

$e_0, \ldots, e_n$ は一次独立

そこで $e_{n+1} \in \pi^{-1}(\xi_{n+1})$ をとると $\dim V = n+1$ より

$e_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i$ $(\lambda_i \in k)$ と表わされる。

この時、どの λ_i も 0 でない。

もし $\lambda_{i0} = 0$ とすると e_{n+1} が $e_0, \ldots, \check{e}_{i0}, \ldots, e_n$

の linear combination で表わされる。これは不合理.

$\forall i$ $\lambda_i \neq 0$ だから e_i を $\lambda_i e_i$ ととりかえると

$i = 0, \ldots, n+1$ について $e_i \in \pi^{-1}(\xi_i)$

ここに $e_0, \ldots, e_n$: base

$$e_{n+1} = e_0 + \dots + e_n$$

このbaseで　$V \cong k^{n+1}$　$e_i = (0\dots,\underset{\hat{i}}{1},\dots 0)$ $(i = 0,1,\dots,n$

$e_{n+1} = (1,1,\dots,1)$

（一意性）　今　$\bar{g},\bar{h} \in PL(\mathbb{P}^n)$ が $\bar{g}(\xi_i) = \bar{h}(\xi_i) = \eta_i$ $(\forall_i)$とすると

$\bar{f} = \bar{g}^{-1}.\bar{h}$　とおけば $\bar{f}(\xi_i) = \xi_i$　$(\forall_i)$.

それに対応する　$f \in GL(V)$ をとれば

$f(\lambda e_i) = \lambda e_i$　$i = 0,\dots,n+1$　(Th. 2.1 の証の

論法を適用した)

故に　$\bar{f} = id$,　$\bar{g} = \bar{h}$

（存在）　$\begin{cases} e_i \in \pi^{-1}(\xi_i) \\ e_{n+1} = e_0 + \dots + e_n \end{cases}$　を上のようにとる.

同様に $\begin{cases} d_i \in \pi^{-1}(\eta_i) \\ d_{n+1} = d_0 + \dots + d_n \end{cases}$　をとると

$d_0,\dots,d_n$ も $e_0,\dots,e_n$ も V の base

$\therefore$ $\exists g \in GL(V)$ があって　$g(e_i) = d_i$　$i = 0,\dots,n$

よって　$g(e_{n+1}) = g(\sum e_i) = \sum g(e_i) = \sum d_i = d_{n+1}$

この　g に対して　$\bar{g} \in PL(\mathbb{P}^n)$

$$\bar{g}(\xi_i) = \eta_i \qquad i = 0,\dots,n+1$$

[註] <u>2.3</u>　$k = \mathbb{R},\mathbb{C}$,（代数的閉体）の様に $\#(k) = \infty$ のときには

任意に $\mathbb{Z} \ni \ell \geq 0$ をとるとき

$\exists$ general position にある $\xi_0,\dots,\xi_\ell \in \mathbb{P}^n$ が存在する。

<u>定義 2.3</u>　$\eta_1,\dots,\eta_s \in \mathbb{P}^n$ の時

$\{\eta_1,\dots,\eta_s\}$ で張られる linear subspace $L \subset \mathbb{P}^n$ とは:

$\pi^{-1}(\eta_1),\dots,\pi^{-1}(\eta_s)$ で張られる vector subspace

$W \subset V$ により定められる $L = \pi(W^*)$ の事と定義する。

[註] <u>2.4</u>　① いつでも $\dim W = \dim L+1 \leq s$

② $\dim L = s-1 \Leftrightarrow \eta_1,\dots,\eta_s$ が $\mathbb{P}$ の点として linearly independent

定理 2.2 の [註] の中の $\xi_1,\dots,\xi_\ell$ の列のとり方

かりに $\xi_1,\dots,\xi_{\ell-1}$ がとれたとする.

次に $\xi_\ell \in (\mathbb{P}^n - \bigcup_\sigma L_\sigma) = U$ をとればよい

ただし L_σ は $\xi_1,\dots,\xi_{\ell-1}$ の中の任意の m 個の列 σ

で張られる linear subspaces, ここに m は

$m \leq \min\{n,\ell-1\}$ なるすべての値をとる。

よって $\#k = \infty$ ならば $U \neq \phi$ を示せばよい.

$W_\sigma = \pi^{-1}(L_\sigma) \cup \{0\}$ とすると $W_\sigma \neq V$ だから

$x_0,\dots,x_n$ を V の座標関数とすると

$W_\sigma \subset \{v \in V \mid \sum_{i=0}^{n} a_i^\sigma x_i(v) = 0\} \equiv Y_\sigma$ なる a_i^σ がある。

（ただし $\forall_\sigma$ について $\exists_i \quad a_i^\sigma \neq 0$ ）

$\mathbb{P}^n \neq \bigcup L_\sigma \Leftrightarrow V \neq \bigcup W_\sigma$ だから

$V \neq \bigcup Y_\sigma = \{v \in V \mid \pi_\sigma(\sum_{i=0}^{n} a_i^\sigma x_i(v) = 0\}$ を示せばよい.

しかるに $\forall_\sigma$ について $\sum_{i=0}^{n} a_i^\sigma x_i$ は多項式としては non-zero だから $\pi_\sigma(\sum_i a_i^\sigma x_i)$ も多項式として non-zero.

よって Identity Theorem（定理 3.1）により $U \neq \phi$.

<u>例 2.1</u> $\mathbb{P}_k^1 = \mathbb{P}$

(1) general position にある 3 個（= n+2 個）の点として

$e_0 = (1:0)$, $e_1 = (0:1)$, $e_2 = (1:1)$ をとる。

$\mathbb{P}^1 = k \cup \{\underset{\infty}{\underset{\parallel}{-点}}\}$

$e_0 \mapsto 0$

$e_1 \mapsto \infty$

$e_2 \mapsto 1$

4 点 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ をとる。ξ_0, ξ_1, ξ_2 は general position にあるとしたとき $\mathbb{P}^1 = k \cup \{\infty\}$ を

$\left\{\begin{array}{l} \xi_0 \leftrightarrow 0 \\ \xi_1 \leftrightarrow \infty \\ \xi_2 \leftrightarrow 1 \end{array}\right\}$ と対応させる $PL(\mathbb{P}^1)$ の元によって.

$\xi_3 \leftrightarrow x \in k$ とすると

この x を $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2\}$ に対する ξ_3 の cross ratio という。

勝手に $\mathbb{P}^1 = k \cup \{\infty\}$ から $a, \cdots, d$ をとって

$\xi_0 \leftrightarrow a$

$\xi_1 \leftrightarrow b$ とするとき $x = \frac{d-a}{d-b} : \frac{c-a}{c-b}$ で表わされる.

$\xi_2 \leftrightarrow c$

$\xi_3 \leftrightarrow d$

§ 3. Polynomial maps I.

$V = k^n$ を vector space とし $y_1, \cdots, y_n$ をその座標関数とする。
この $y_1, \cdots, y_n$ を独立変数の system として多項式環
$k[y_1, \cdots, y_n] = k[y]$ をつくる。

即ち $f \in k[y]$ は $f = \sum_{\text{finite sum}} a_{i_1 \cdots i_n} y_1^{i_1} \cdots y_n^{i_n}$ $(a_{i_1 \cdots i_n} \in k)$

<u>定義 3.1</u> V 上の多項式函数 $\bar{f}$ とは

$\bar{f} : V \to k$ map. であって $\exists f \in k[y]$ s.t.

$\bar{f}[\eta] = f[\eta]$ $\forall \eta \in V$

<u>例 3.1</u> $k = \mathbb{Z}(p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p = prime とすると
次の事がわかる。

$f, g \in k[y]$ が同一の函数 $\bar{f} = \bar{g}$ を与える

$\Leftrightarrow$ $f - g \in (y_1^p - y_1, \cdots, y_n^p - y_n) k[y] = I$

proof.) $\Leftarrow$ は $\forall x \in k$ が $x^p - x = 0$ をみたすから明らか

$\Rightarrow$ $g = 0$ としてよい。 n についての帰納法で
示す。$n = 1$ の時 f を $y_1^p - y_1$ で割り算して、その余り
が $\in I$ を言えばよいから f は $(p-1)$ 次以下としてよい。
仮定から $f(y) = 0$ は p 個の相異なる根をもつ。しかるに
f は $(p-1)$ 次以下 $\therefore f = 0$ $\therefore f \in I$ $n - 1$

までは証明されたとする．　$n=1$の場合と同様に $\deg_{y_n} f$
（fを$k[y_1,\cdots,y_{n-1}]$上のy_nの多項式とみた時の次数）＝
$\max\{i \mid \exists i_1,\cdots,i_{n-1}\ \ a_{i_1\cdots i_{n-1}i} \neq 0\}$が$p-1$以下としてよい．$f=\sum_{i=0}^{p-1} f_i(y_1,\cdots,y_{n-1})y_n^{\,i}$ $(f_i \in k[y_1,\cdots,y_{n-1}])$
$\forall \eta' = (\eta_1,\cdots,\eta_{n-1}) \in k^{n-1}$に対して $f(\eta', y_n)$は仮定により，k上の関数として0　$\therefore f(\eta', y_n) = \sum f_i(\eta_1,\cdots,\eta_{n-1})y_n^{\,i}=0$
即ち，$\forall i\ \ f_i(\eta_1,\cdots,\eta_{n-1})=0$　f_iに帰納法の仮定を適用して　$f_i \in I$　$\therefore f \in I$　　Q.E.D.

Rを ring とする．Rの subset I について，
<u>Iが Ideal であるとは</u>　1) 加法に関して部分群，
2) $R\cdot I \subset I$　が成立することをいう．

<u>定理 3.1</u>　（多項式関数の一致の定理）　$\#(k)=\infty$とする．
$\forall f \in k[\underline{y}]$に対して　$\bar{f} \equiv 0$ (on V) $\Rightarrow$ $f=0$ （多項式として）
即ち　$\forall f, g \in k[\underline{y}]$
$\bar{f} \equiv \bar{g}$ (on V)　$\Rightarrow$　多項式として　$f=g$

（証）　nについての帰納法
$n=1$の時　$\bar{f} \equiv 0$ $\Rightarrow$ 多項式 $f(y)=0$が無限個の根をもつ．ところが $f \neq 0$なる（$f=0$の根の数）$\leq \deg f$ $\therefore f=0$

$n > 1$ に対して　$0 \neq f \in k[y]$ とすると

$$f = f_0 + f_1 y_n + \cdots + f_\ell y_n^\ell .$$

ただし　$\forall f_i \in k[y_1, \cdots, y_{n-1}]$, $f_\ell \neq 0$

帰納法の仮定より　$f_\ell \neq 0 \Rightarrow \bar{f}_\ell \neq 0$

$\exists \eta_1, \cdots, \eta_{n-1} \in k$ で，$\eta' = (\eta_1, \cdots, \eta_{n-1}) \in k^{n-1}$ とおくとき，

$f_\ell(\eta') \neq 0$．すると $f(\eta', y_n) = f_0(\eta') + \cdots + f_\ell(\eta') y_n^\ell \neq 0$

$n=1$ の時の結果から $\exists \eta_n \in k$　で $f(\eta', \eta_n) \neq 0$

$\eta = (\eta', \eta_n) \in k^n$ とおけば　$f(\eta) \neq 0$　$\therefore \bar{f} \neq 0$　Q.E.D.

§ 4. Algebraic sets

<u>定義 4.1</u>　$V = k^n$ の subset A が algebraic set (代数的集合)

$\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 多項式 $f_\alpha \in k[y]$ の系があって（有限個，又は無限個）

$$A = \{\eta \in V \mid f_\alpha(\eta) = 0, \ \forall \alpha\}$$

[註] <u>4.1</u> 一般に $\{f_\alpha\}$ によって生成される ideal　を

記号　$(f_\alpha, \forall \alpha) k[y] = (f_\alpha, \forall \alpha) = I$ で表わす

即ち　$I = \{f \in k[y] \mid f = \sum_{\alpha:\text{finite}} p_\alpha f_\alpha, \ p_\alpha \in k[y]\}$

A が algebraic set で $\{f_\alpha\}$ で定義される時　A はやはり

ideal $I = \{f_\alpha, \forall \alpha\} k[y]$ で定義される．

故に algebraic set を考える時 $\{f_\alpha\}$ として ideal にとってもよい．

I が ideal の時

$V(I) \underset{def.}{=} I$ で定義される algebraic set

<u>定理4.1</u> ① I, J ideal とする時 $I \subset J \Rightarrow V(I) \supset V(J)$

(方程式が多いと解は少くなる)

② $V(I \cdot J) = V(I) \cup V(J)$

③ $V(I+J) = V(I) \cap V(J)$

<u>補4.2</u> I, J が ideal のとき.

$\Rightarrow$ $I \cdot J \underset{def.}{=} \{ \sum_{\alpha : finite} f_\alpha g_\alpha \mid f_\alpha \in I, g_\alpha \in J \}$ は ideal

$I + J \underset{def.}{=} \{ f+g \mid f \in I, g \in J \}$ は ideal

(証) ①は明らか

② $I \cdot J \subset I, J$ より $V(I \cdot J) \supset V(I), V(J)$

$\therefore V(I \cdot J) \supset V(I) \cup V(J)$

$V(I) \cup V(J) \ni x$ とすると $\exists f \in I$ $f(x) \neq 0$, $\exists g \in J$

$g(x) \neq 0$ $\therefore (fg)(x) \neq 0$. $fg \in I \cdot J$ $\therefore x \notin V(I \cdot J)$

$V(I \cdot J) = V(I) \cup V(J)$

③ $I+J \supset I, J$ より $V(I+J) \subset V(I), V(J)$

$V(I+J) \subset V(I) \cap V(J)$

$V(I) \cap V(J) \ni x$ とすると $\forall f \in I$ について $f(x) = 0$

$\forall g \in J$ について $g(x) = 0$

$\therefore \forall h \in I+J$ について $h = f+g$, $f \in I, g \in J$ とおける

から $h(x) = f(x) + g(x) = 0$

$\therefore x \in V(I+J)$ 　 : $V(I+J) = V(I) \cap V(J)$

<u>系 4.1.1</u> ① I を ideal とすると $m > 0$ について $V(I^m) = V(I)$

② $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$

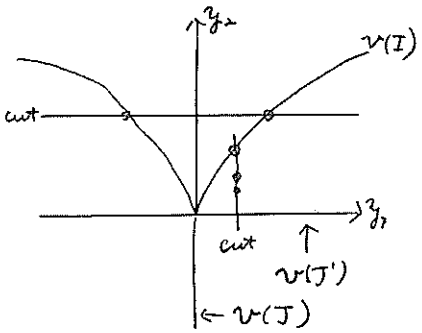
<u>例 4.1</u> 　$n = 2$, $k = \mathbb{C}$

$I = (y_1^2 - y_2^3)$ 　 $J = (y_1)$

$V(I+J) = V(I) \cap V(J) = \{原点\}$

$I + J = (y_1^2 - y_2^3, y_1) k[y]$

$= (y_1, y_2^3) k[y]$



$y_1 \neq 0$ の所で切ると，

$V(I)$ と 3 点で交わるが，

その中二つは y_2 が虚数の

部分に来る．

$J' = (y_2)$ とおくと

$I + J' = (y_1^2, y_2) k[y]$ ideal

$I + J$ が $V(I)$ と $V(J)$ の Inter setion multiplicity

を定める

<u>定理 4.2</u> (Hilbert の基定理)

$R = k[y_1, \cdots, y_n]$ とすると，すべての ideal は

有限生成である．即ち，$\forall$ ideal $I \subset R$ に対して

$\exists f_1, \cdots, f_m \in I$ s.t. $I = (f_1, \cdots, f_m)$

[註] 4.3 (1) 任意の algebraic set A $\subset k^n$ は有限個の多項式を用いて $A = \{\xi \in k^n \mid f_1(\xi) = \cdots = f_m(\xi) = 0\}$ と書わせる。ただし $f_i(\xi) \in k[\xi]$

(2) R を ring として、$\forall$ ideal $\subset R$ が有限生成である時 R を noetherian ring という。

(3) ring R が noetherian という条件は次のようにもいいかえられる。R が noetherian

$\Leftrightarrow$ R の ideal の任意の列 $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots \subset I_n \subset I_{n+1} \subset \cdots$ について $\exists N$ s.t. $I_N = I_{N+1} = I_{N+2} = \cdots$

$\Leftrightarrow$ R の ideal の任意の集合 $\mathfrak{J}$ には必ず極大元がある

(極大とは inclusion についていう)

(定理の証) (証明は略)

n に関する帰納法で証明する。

$n = 0$ の時 $R = k$, ideal は (0), (1) だけ。

$k[y_1, \cdots, y_n] = (k[y_1, \cdots, y_{n-1}])[y_n]$ だから、帰納法の仮定により、次の lemma を認めれば Q.E.D.

lemma 4.3 R : noetherian $\Rightarrow R[X]$ (X : 者数) : noetherian

(証) $\forall$ ideal $I \subset R[X]$

$0 \neq {}^\forall f \in R[X]$ に対して、一意的に $f = f_0 + f_1 X + \cdots + f_\ell X^\ell$ と表わせる。ただし $f_i \in R$, $f_\ell \neq 0$.

この時 $\begin{cases} f^* \underset{def.}{=} f_\ell \in R \\ 0^* \underset{def.}{=} 0 \in R \end{cases}$ と定義する。

$\mathfrak{a}_0 = \{ f^* \in R \mid f \in I \}$ は R の ideal をなす。

仮定により $\exists f_1^*, \cdots, f_s^* \in \mathfrak{a}_0$ $f_i \in I$

$\mathfrak{a}_0 = (f_1^*, \cdots, f_s^*)$

$d = \max_{i=1,\cdots,s} \deg_x f_i$ とし、任意の j $(0 \leq j < d)$ をとり

この j に対して $\mathcal{L}_j = \{0\} \vee \{ f^* \in R \mid f \in I, \deg f = j \}$

は ideal をなす。仮定により $\mathcal{L}_j = (g_{j,1}^*, \cdots, g_{j,r(j)}^*)$

ただし $g_{jk} \in I$ $\deg_x g_{jk} = j$.

すると $0 \neq {}^\forall f \in I$ とすると、$\deg f \geq d$ なら modulo $(f_1, \cdots, f_s)$

で、$\deg f = j < d$ なら modulo $(g_{j,1}, \cdots, g_{j,r(j)})$ で次数を

(少くとも) 1つおとすことができる。この操作をくりか

えして $f \in (f_i, g_{jk}, {}^\forall i, j, k)\, R[x]$

即ち $I = (f_i, g_{jk}, {}^\forall i, j, k)\, R[x]$ Q.E.D.

<u>系 4.3.1</u> $\mathbb{Z}$ を整数環とすると

$\mathbb{Z}[y_1, \cdots, y_n]$ も noetherian.

<u>註 4.4</u> "ideal I に $V(I)$ を対応させることを考えると、

${}^\forall I, J$ に対して $V(I) = V(J)$ は、I, J に対して何を

意味するか?" という問題がおこるがこれに対して

次の定理がある．(Hilbert's Nullstellensatz)

<u>定理</u> k を algebraically closed とすると

$$V(I)=V(J) \Leftrightarrow {}^{\exists}m>0 \text{ 整数 } I^m \subset J,\ I \supset J^m$$

(証)は §8. 定理 8.7 参照 ただし $k=\bar{k}$ でないと ダメ

<u>例 4.2</u> $k=\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^2 \supset A=\{0\}$

$A=V(x_1^2+x_2^2)=V((x_1, x_2))$

しかも、${}^{\forall}n$ $(x_1, x_2)^n \not\subset (x_1^2+x_2^2)$.

<u>定理 4.4</u> (多項式関数の一致の定理) $\#(k)=\infty$ とする

$f \in k[x]$ とする、A : algebraic set $\subset k^n$ ただし

$A \neq k^n$. この時 $\bar{f}\,|\,k^n - A \equiv 0 \Rightarrow f=0$

(証) $A=V(I) \neq k^n$ より $0 \neq {}^{\exists}h \in I$ $\bar{h}\,|\,A \equiv 0$

故に、多項式 hf を考えると $\overline{hf}\,|\,k^n \equiv 0$

既出の一致の定理により $hf=0$

$h \neq 0$ $\therefore f=0$ Q.E.D.

§5. Zariski topology

$V=k^n$, その座標関数を $y_1,\dots,y_n$, 座標環 $k[y_1,\dots,y_n]$ とし

V の中に Zariski topology を定義する.

定義 5.1 subset $U\subset V$ が open set.

$\Longleftrightarrow$ $V-U$ が algebraic set

即ち $\exists$ ideal $I\subset k[y]$

$$V-U=\{\xi\in V \mid g(\xi)=0 \quad {}^{\forall}g\in I\}=v(I)$$

この定義で V に topology が導入される事:

1) 全体 V $(\phi = V-V=v((1))$
空集合 ϕ $(V=V-\phi=v((0))$ } は open

2) 任意の open sets の family $\{U_\alpha\}$ をとる時

$\bigcup_\alpha U_\alpha$ は open

(即ち、任意に algebraic sets の family $\{A_\alpha=v(I_\alpha)\}$ をとる時

$\bigcap_\alpha A_\alpha$ は algebraic set $(=v(\sum_\alpha I_\alpha))$)

3) 有限の open subsets $\{U_1,\dots,U_s\}$ に対して

$\bigcap_{\alpha=1}^{s} U_\alpha$ は open

(即ち、有限個の algebraic sets $\{A_\alpha=v(I_\alpha)_{\alpha=1,\dots,s}$ に対して

$\bigcup_{\alpha=1}^{s} A_\alpha$ は algebraic set $(=v(\prod_{\alpha=1}^{s} I_\alpha))$)

ただし 3) は無限の union については成立しない.

例 5.1 $k=\mathbb{R}=V$ $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$

$V=Z=\bigcup_{a\in Z}\{a\}$ はalgebraic set でない.

(∵) Z上で0になる多項式は0しかない)

〔註〕5.1 k の中でのZariski topology は "1点をclosed set にするweakest topology" と規定できる.

k^n の中のZariski topologyは "このkのweakest topology に対してすべての多項式がcontinuousになるようなweakest topology" にほかならない.

〔註〕5.2 Zariski topology はnoetherian である.

すなわち (def) すべてのopen set U がcompact

即ち $U=\bigcup_\alpha U_\alpha$ (U_α : open) $\Rightarrow \exists\ \alpha_1,\cdots,\alpha_s$ (有限個)

$$U=\bigcup_{i=1}^{s} U_{\alpha_i}$$

後者の条件は $\Leftrightarrow$ U_i $(i\in N)$: open, $U_1\subset U_2\subset\cdots\subset U_n\subset\cdots$

とすると $\exists N$ s.t. $U_N=U_{N+1}=\cdots=\cdots$ (昇鎖律)である.

(証) $U_\alpha=V-v(I_\alpha)$ とおくと

$$U=V-\bigcap_\alpha v(I_\alpha)=V-v(\sum_\alpha I_\alpha)$$

ところが $k[y]$ はnoetherianだから $\sum_\alpha I_\alpha$ は有限生成

即ち $a_1,\cdots,a_m\in\sum_\alpha I_\alpha$ $\sum_\alpha I_\alpha=(a_1,\cdots,a_m)$

ところが $\forall a_i$ は有限個のI_α で生成されたideal に属する.

$\therefore$ $\exists\ \alpha_1,\cdots,\alpha_s$ $\sum_\alpha I_\alpha=\sum_{i=1}^{s} I_{\alpha_i}$

$\therefore$ $U=V-v(\sum_{i=1}^{s} I_{\alpha_i})=\bigcup_{i=1}^{s} U_{\alpha_i}$

($\Rightarrow$の証) $U=\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ とおくと 仮定より $\exists\ i_1,\cdots,i_s$ $i_1<\cdots<i_s$

$$U = \bigcup_{j=1}^{s} U_{i_j} = U_{i_s}$$

$N \geqq i_s$ とおくと $U = U_{i_s} \subset U_N \subset U_{N+1} \subset \cdots = U$

$\therefore \quad U_N = U_{N+1} = \cdots$

($\Leftarrow$ の証) $U = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ でしかも どの有限個の α_i, $i = 1, \cdots, s$ についても $U \neq \bigcup_{i=1}^{s} U_{\alpha_i}$ とする.

この時次のように $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ を Λ の中から選ぶ.

$\alpha_1 \in \Lambda$ は任意にとり, $\alpha_1, \cdots \alpha_{n-1}$ まで選ばれたとすると $U \neq \bigcup_{i=1}^{n-1} U_{\alpha_i}$ だから $^\exists \alpha_n$ s.t. $U_{\alpha_n} \not\subset \bigcup_{i=1}^{n-1} U_{\alpha_i}$

これから $U_n = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ とおくと $U_1 \subsetneqq U_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq U_n \subsetneqq \cdots$

(昇鎖律に反する) Q.E.D.

A: ring (commutative, $\ni 1$) について

<u>定義 5.2</u> ideal $P \subset A$ が prime ideal

$\underset{def.}{\Leftrightarrow}$ ($^\forall f, g \in A \quad f \cdot g \in P \Rightarrow f \in P$ or $g \in P$)

<u>定義 5.3</u> ideal $Q \subset A$ が primary ideal

$\underset{def.}{\Leftrightarrow}$ ($^\forall f, g \in A \quad f \cdot g \in Q, \ f \notin Q \Rightarrow {}^\exists l > 0 \quad g^l \in Q$)

<u>定義 5.4</u> I ideal $\subset A$

その radical $\sqrt{I} \underset{def.}{=} \{ f \in A \mid {}^\exists l > 0 \ f^l \in I \}$. これは ideal になる.

($\because$) $f_1^{l_1}, f_2^{l_2} \in I \Rightarrow (f_1 - f_2)^{l_1 + l_2 - 1} \in I$)

(註) <u>5.3</u> Q : Primary $\Rightarrow \sqrt{Q}$ ($= P$ とおく) は prime

(証) $f \cdot g \in P \Rightarrow {}^{\exists}\ell \quad f^{\ell} g^{\ell} \in Q$

$\Rightarrow f^{\ell} \in Q$ or ${}^{\exists}\ell' > 0 \quad g^{\ell\ell'} \in Q$

$\Rightarrow f \in P$ or $g \in P$ Q.E.D.

この P を Q の associated prime という.

逆はいえない

<u>例 5.2</u> $A = k[x, y]$ k: 体 x, y 変数

$I = (xy, x^2)$ とおくと

$\sqrt{I}$: prime I : primary でない.

(証) $A/(x) \approx k[y]$ より (x) は prime ideal. $\therefore \sqrt{(x)} = (x)$

$I \subset (x)$ より $\sqrt{I} \subset \sqrt{(x)} = (x)$

$x^2 \in I$ より $(x) \subset \sqrt{I}$ $\therefore \sqrt{I} = (x)$ prime

$xy \in I$, $x \notin I$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $y^n \notin I$ I は primary

でない. Q.E.D.

〔註〕<u>5.4</u> Q : primary , P : associated prime

$fg \in Q$, $f \notin P \Rightarrow g \in Q$

<u>定理 5.1</u> (Lasker - Noether)

R : noetherian の時

任意の ideal I をとると

(1) $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r$ と表わせる

ただし Q_i は primary, どの Q_i も必要

しかも $\sqrt{Q_i} \neq \sqrt{Q_j}$ (if $i \neq j$)

(つまり、$I \subsetneqq \bigcap_{j \neq i} Q_j \quad \forall i$

いいかえれば $Q_i \not\supset \bigcap_{j \neq i} Q_j \quad \forall i$)

(2) P_i を Q_i の associated prime とする時

$\{P_1, \cdots, P_r\}$ は $Q_1, \cdots, Q_r$ のとり方によらず I によって一意にきまる.

(3) $P_i \not\supset P_j$ ($j \neq i$) になる P_i (これを I の minimal prime と定義する) に対応する Q_i は I によって一意にきまる.

<u>例5.3</u> (3) は minimal でない prime については成立しない

例5.2 の I について

$I = (x) \cap (x^2, xy, y^2) = (x) \cap (x^2, xy, y^3)$

(x^2, xy, y^2) も (x^2, xy, y^3) も primary で ass. prime は

(x, y) (*), これは min. でない.

(*) は prime (min. prime)

$(x^2, xy, y^2) \subsetneqq (x^2, xy, y^3)$ ($y^2 \in$ 左辺だが $\notin$ 右辺)

(*)は 次の lemma を認めればわかる

<u>lemma 5.2</u> R : ring (commutative かつ $\ni 1$) とし

ideal I について $\sqrt{I}$ が R の maximal ideal ならば

I は primary ideal

(証) R のかわりに R/I を考えることにより $I=0$ としてよい.

$\sqrt{I}=P$ $ab=0$, $\forall n\in N$ $a^n\neq 0$ とすると $a\notin P$

P: maximal だから $1=ar+p$ with $\exists r\in R$, $\exists p\in P$

$\therefore b=abr+bp=bp$ ($\because ab=0$)

$p\in P$ より $\exists \ell$ $p^\ell=0$ $\therefore b=bp=bp^2=\cdots=bp^\ell=0$

Q.E.D.

定理 5.1 の証) (1) の証: まずつぎの用語を用いる:

ideal J が indecomposable $\underset{def.}{\Leftrightarrow}$ ($J=J_1\cap J_2 \Rightarrow J=J_1$ or J_2)

<u>lemma 5.3</u> noetherian R の $\forall I$: ideal は indecomposable ideal

の有限個の intersection で表わされる.

(証) $\tilde{\mathfrak{J}}=\{$ R の ideal で indecomposable ideal の有限個

の intersection で表わせないもの $\}$

$\tilde{\mathfrak{J}}\neq\phi$ なら R : noetherian であることから

$\tilde{\mathfrak{J}}$ の中に maximal なもの I がある

I は indecomposable でないから $I=I_1\cap I_2$ $I_1, I_2 \supsetneq I$

I の極大性から $I_1, I_2 \notin \tilde{\mathfrak{J}}$

$\therefore \quad I_1 = I^{(1)}_{\alpha_1} \cap \cdots \cap I^{(1)}_{\alpha_s}, \quad I_2 = I^{(2)}_{\beta_1} \cap \cdots \cap I^{(2)}_{\beta_t}$

$I^{(1)}_{\alpha}, \quad I^{(2)}_{\beta}$ は indecomposable

$\therefore \quad I = I^{(1)}_{\alpha_1} \cap \cdots \cap I^{(1)}_{\alpha_s} \cap I^{(2)}_{\beta_1} \cap \cdots \cap I^{(2)}_{\beta_t}$

これは $I \in \tilde{\mathfrak{J}}$ に反する　　$\therefore \tilde{\mathfrak{J}} = \phi$　　Q.E.D.

<u>lemma 5.4</u>　R を noetherian ring としQ をその indecomposable ideal とするとQ は primary ideal

(証)　$fg \in Q$　$f \notin Q$, $\forall l \in \mathbb{N}$ $g^l \notin Q$ とする.

この時　$Q = (Q : g^l) \cap (Q + g^l)$ である（ただし $l >> 0$ とする）しかも $Q : g^l \ni f \notin Q$, $Q + g^l \ni g^l \notin Q$　よってQ : decomposable

(∵)　$Q : g \subset Q : g^2 \subset \cdots$, R : noetherian だからこの列はどこかでとまる.

よって　$Q : g^l = Q : g^{l+1} \cdots$ とする

$Q \subset (Q : g^l) \cap (Q + g^l)$ は明らかだから

$x \in (Q : g^l) \cap (Q + g^l)$

$\Rightarrow \quad x = q + a g^l \quad g^l x \in Q \quad ({}^\exists q \in Q, {}^\exists a \in R)$

$\Rightarrow \quad g^l x - g^l q = a g^{2l} \in Q$

$\Rightarrow \quad a \in Q : g^{2l} = Q : g^l \quad \therefore a g^l \in Q$

$\Rightarrow \quad x \in Q$　　Q.E.D.

lemma 5.5　　Rを ring　　Pを prime ideal

Q_1, Q_2 P- primary ideals とする.

この時 $Q_1 \cap Q_2$ も P - primary ideal

(証)　$ab \in Q_1 \cap Q_2$, $a \notin Q_1 \cap Q_2$ とすると $a \notin Q_1$ or $a \notin Q_2$

例えば $a \notin Q_1$ とすると $ab \in Q_1$ より

$b \in \sqrt{Q_1} = P = \sqrt{Q_1} \cap \sqrt{Q_2} = \sqrt{Q_1 \cap Q_2}$

$\therefore$ $\exists l$　s.t. $b^l \in Q_1 \cap Q_2$　$\therefore Q_1 \cap Q_2$

primary ideal　しかも $\sqrt{Q_1 \cap Q_2} = \sqrt{Q_1} \cap \sqrt{Q_2} = P$ Q.E.D.

[註]5.5　lemma 5.4　の逆は もちろん成立しない.

$R = k[x, y]$ とおくと (kは体), lemma 5.2 より

$Q_1 = (x_2, y_2)$, $Q_2 = (x^2, xy, y^3)$ は共に (x, y)-

primary ideal　$Q_1 \ni y^2 \notin Q_2$, $Q_1 \not\ni xy \in Q_2$

$\therefore$ $Q_1 \cap Q_2 \neq Q_1, Q_2$　$Q_1 \cap Q_2$ は decomposable

しかも lemma 5.5 より $Q_1 \cap Q_2$ は (x, y)-

primary ideal

上の3つの lemma から (1) は明らか.

(2) の証

lemma 5.6　定理の仮定の下で P が I の (1) をみたす) 1つの

decomposition の中に現われる

$\Leftrightarrow$ $^\exists f \in R$　$P = (I : f)$

(証) ($\Leftarrow$)　$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r$　Q_i : P_i-primary とする

$$P = (I : f) = \bigcap_{i=1}^{r} (Q_i : f)$$

$\forall_i$, $(Q_i : f) = R$ ということはない　$(Q_i : f) \neq R$ なら

$f \notin Q_i$　$\therefore Q_i \subset Q_i : f \subset P_i$　よって $\sqrt{Q_i : f} = P_i$

$\therefore$　$P = \bigcap P_{ik}$　$P_{ik} \in S \subset \{P_1, \cdots, P_s\}$

$\prod P_{ik} \subset \bigcap P_{ik} = P$　$\therefore \exists_{ik}$

$P_{ik} \subset P \ (\subset P_{ik}) \Rightarrow P = P_{ik}$

($\Rightarrow$) $\exists f_i \in \bigcap_{\alpha \neq i} Q_\alpha - Q_i$　(∵ (1)の分解で どの Q_i も必要)

P_i : Q_i に associated　$\Rightarrow \exists l$　$P_i^l f_i \subset Q_i$

よって $\exists l$　s.t.　$P_i^l f_i \notin Q_i$,　$P_i^l f_i \subset Q_i$

よって $\exists h \in P_i^l$　s.t. $h f_i \notin Q_i$

そこで　$f = h f_i$ とおくと　$f \notin Q_i$,　$f P_i \subset Q_i$

$\therefore$　$P_i = (I : f)$　Q.E.D.

lemma 5.6　の後の条件は decomposition によらない.

(3)　P_i : min. とする(この P_i は分解のしかたに無関係にきまる)

<u>lemma 5.7</u>　定理の条件の下で　$Q_i = \{g \in R \mid \exists f \notin P_i \quad fg \in I\}$

(これから Q_i の一意性が得られる)

(証)　$\bigcap_{\alpha \neq i} Q_\alpha \notin P_i$ である

∵ $P_i \supset \bigcap_{\alpha \neq i} Q_\alpha$ とすると　$P_i \supset \prod_{\alpha \neq i} Q_\alpha \Rightarrow$

$P_i \supset \exists Q_j \supset \exists P_j \Rightarrow P_i \supset P_j$　不合理

$^{\exists} f_i \in \bigcap_{\alpha \neq i} Q_\alpha - P_i$

この f_i に対して　$f_i Q_i \subset Q_1 \cap \cdots \cap Q_r = I$　$\therefore Q_i \subseteq$ 右辺

逆の $\supseteq$ は　Q_i が P_i-primary であることから明らか

Q.E.D.

再び　$V = k^n$ とし　$y_1, \cdots, y_n$ を座標関数　$k[y]$ を

座標環とする　$V \supset X$ をsubset とすると

$\mathcal{I}(X) = \{ f \in k[y] \mid f|X \equiv 0 \}$ とおくと

$\mathcal{I}(X)$ は ideal をなす.

<u>定理 5.8</u> ① X, Y. Zariski closed　$X \subset Y \Leftrightarrow \mathcal{I}(X) > \mathcal{I}(Y)$

② X_1, X_2 Zariski closed とすると

$$\mathcal{I}(X_1 \cup X_2) = \mathcal{I}(X_1) \cap \mathcal{I}(X_2)$$

③ X_1, X_2 Zariski closed とすると

$$\mathcal{I}(X_1 \cap X_2) \geq \sqrt{\mathcal{I}(X_1) + \mathcal{I}(X_2)}$$

④ X: Zariski closed とすると　$v(\mathcal{I}(X)) = X$

⑤ I: ideal とすると　$\mathcal{I}(v(I)) \geqq \sqrt{I}$

∵ (①の⇒), ②, ③, ⑤は明らか.

⊕　$X = v(I)$ とおくと　(I は ideal)

$v(\mathcal{I}(X)) \supset X$ は明らかで.

$\mathcal{I}(X)=\mathcal{I}(\mathcal{V}(I))\supset I$ も明らか.

後半と①より　$\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))\subset\mathcal{V}(I)=X$

$\therefore\ \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))=X$

④から（①の⇐）は明らか.

[註] 5.6 ③,⑤の＝は一般には ≠ だが $k=\bar{k}$ なら Hilbert's Nullstellensatz (§8) より⑤が成立. 又⑤で等号が成立すれば③でも等号が成立することがわかる.

例 5.4 ③ $\left\{\begin{matrix}k=\mathbb{R}\\ n=2\end{matrix}\right\}$ の場合　$X_1=\mathcal{V}(y),\ X_2=\mathcal{V}(y^2-x^2-1)$

$X_1\cap X_2=\phi$　　$\therefore\ \mathcal{I}(X_1\cap X_2)=k[x,y]$

しかも　$\mathcal{I}(X_1)+\mathcal{I}(X_2)=(y,\ x^2+1)$

$\therefore\ \mathcal{I}(X_1\cap X_2)\neq\sqrt{\mathcal{I}(X_1)+\mathcal{I}(X_2)}$

⑤ $\left\{\begin{matrix}k=\mathbb{R}\\ n=1\end{matrix}\right\}$ の場合　$I=(X^2+1)$　　$\mathcal{V}(I)=\phi$

$k[X]=\mathcal{I}(\mathcal{V}(I))\neq\sqrt{I}=I=(x^2+1)$

定義 5.5　k^n の Zariski topology で closed X が irreducible

(既約)

$\underset{def.}{\Leftrightarrow}\begin{cases}X=X_1\cup X_2 & X_i:\text{closed set}\\ X=X_1 \text{ or } X=X_2\end{cases}$ とかけたとすると

[註] 5.7　$k^n\supset X$ irreducible closed set　Y closed set

$X-Y\neq\phi\ \Rightarrow\ \overline{X-Y}=X$

即ち irreducible closed set X の任意の open set U は

X の中で dense.

(証) $X = (\overline{X-Y}) \cup (X \cap Y)$

ところが $X - Y \neq \phi$ により $X \cap Y \neq X$ $\therefore \overline{X-Y} = X$

<u>定理 5.9</u> $k^n \supset X$;Zariski closed set とすると

X が irreducible $\Leftrightarrow$ $\mathcal{I}(X)$ が prime ideal

(証) ($\Rightarrow$) $\mathcal{I}(X)$ が prime でないとすると $^{\exists} fg \in \mathcal{I}(X)$,

$f, g \notin \mathcal{I}(X)$ $X_1 = X \cap \{x \in k^n \mid f(x) = 0\}$,

$X_2 = X \cap \{x \in k^n \mid g(x) = 0\}$ とおくと

$X_1 \lneqq X$, $X_2 \lneqq X$ ($\because f, g \notin \mathcal{I}(X)$)

又 $X_1 \cup X_2 = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X) + f k[Y] \cdot (\mathcal{I}(X) + g \cdot k[Y]))$

$\mathcal{I}(X) \supset (\mathcal{I}(X) + f k[Y]) \cdot (\mathcal{I}(X) + g \cdot k[Y]) \supset (\mathcal{I}(X))^2$

$\therefore X_1 \cup X_2 = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X) = X$ X = reducible

($\Leftarrow$) $\mathcal{I}(X)$ が prime だとし, $X = X_1 \cup X_2$ とすると

(X_1, X_2 : Zariski closed sets)

$\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(X_1) \cap \mathcal{I}(X_2) \supset \mathcal{I}(X_1) \cdot \mathcal{I}(X_2)$

$\therefore \mathcal{I}(X_1) \subset \mathcal{I}(X)$ or $\mathcal{I}(X_2) \subset \mathcal{I}(X)$

定理 5.8 の① より $X_1 \supset X$ ($\supset X_1$) or $X_2 \supset X$ ($\supset X_2$)

$\therefore X = X_1$ or $X = X_2$ Q.E.D.

<u>(註) 5.8</u> ただし $k \neq \bar{k}$ なら P が prime でも $\mathcal{V}(P)$ は irreducible とはいえない

例 5.5　$k=\mathbb{R}$,　$n=2$　$p=\{(y-x^2)^2+(y-1)^2\}k[x,y]$は

prime だが　$k=\mathbb{R}$ だから　　（$k=\mathbb{R}$だから）

$$v(p)=v(y-x^2)\cap v(y-1)^2=\{(-1,1),(1,1)\},$$

reducible

これから 定理5.1を幾何学的に言いかえると次のようになる.

定理 5.10　k^n ⊃ X : Zariski closed set はirreducible closed sets の finite union で表わせる.

詳しくいうと、$\exists X_1,\cdots,X_r$ irreducible Zariski closed sets s.t.　$i\neq j$ なら　$X_i\not\subset X_j$　　$X=X_1\cup\cdots\cup X_r$

しかも このように分解するしかたは、順序を除いて一意的.（これらのX_iをXのcomponents という）

(証) 定理5.1より　$\mathcal{I}(X)=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_r$　$\mathfrak{q}_i$はp_i-primary

しかるに$\sqrt{\mathcal{I}(X)}=\mathcal{I}(X)$　$\therefore \mathcal{I}(X)=P_1\cap\cdots\cap P_r\ (=\sqrt{\mathcal{I}(X)})$

よって無駄のない表現をすれば、結局

$\mathcal{I}(X)=\mathfrak{p}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_r$　（すべての$\mathfrak{p}_i$はmin. prime）

となる　(*)　$X_i=v(\mathfrak{p}_i)$とおくと

$\mathcal{I}(X_i)=\mathfrak{p}_i$がいえる（これがいえれば定理5.9より

前半は明らか、後半は定理5.1 定理5.8 および(*)より

明らか)

∵ $X = v(\mathcal{I}(X)) = v(\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r) = X_1 \cup \cdots \cup X_r$

$\therefore \mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(X_1) \cap \cdots \cap \mathcal{I}(X_r)$

$\mathcal{I}(X_i) \supset \mathfrak{p}_i$ は明らかだから　$\mathfrak{p}_i \supset \mathcal{I}(X) \supset$

$\mathcal{I}(X_i) \cdot (\bigcap_{j \neq i} \mathcal{I}(X_j)) \supset \mathcal{I}(X_i)$ $(\prod_{j \neq i} \mathfrak{p}_j)$

$\mathfrak{p}_i$ min. だから　$\mathfrak{p}_i \not\supset \prod_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$

$\therefore \mathfrak{p}_i \supset \mathcal{I}(X_i) (\supset \mathfrak{p}_i)$　　$\therefore \mathcal{I}(X_i) = \mathfrak{p}_i$　　Q.E.D.

[註] 5.9　$k = \bar{k}$ の時は §8 で更に詳しい事がわかる.

§ 6. Rational maps

定義 6.1 k^n上の rational function とは：k^nのzariski open Uと $f: U \to k$ なるmap の pair (U, f)で次の性質をもつものである。 $\exists\ F(y) = \dfrac{G(y)}{H(y)} \in k(y)$

$\forall \eta \in U$ $H(\eta) \neq 0$に対し $f(\eta) = F(\eta)$ とかける。

定理 6.1 （有理函数の一致の定理）

$\#(k) = \infty$ とし k^n上の有理函数 (U_1, f_1), (U_2, f_2) があり $U_1 \cap U_2 \supset U_0 \neq \phi$ open set とし

$f_1 | U_0 = f_2 | U_0$ とする

$\Rightarrow$ f_1とf_2 は 同じ $F \in k(y)$ で与えられる。

(証) $f_1 = \dfrac{G_1}{H_1}$, $f_2 = \dfrac{G_2}{H_2}$ と与えられたとする。

$f_1 | U_0 \equiv f_2 | U_0 \Rightarrow H_2 G_1 - H_1 G_2 | U_0 \equiv 0$

$\Rightarrow H_2 G_1 - H_1 G_2 = 0$ (多項式として)

(∵ 定理 4.4)

$\Rightarrow \dfrac{G_1}{H_1} = \dfrac{G_2}{H_2}$ $(\in k(y))$ Q.E.D.

定義 6.2 k^nからk^mへの rational mapとは k^nのopen set Uと $f: U \to k^m$なるmap の pair (U, f)で次の性質をみたすもの のことである

(性質) $\forall \xi \in U$ に対して その周近傍 U_0で $\xi \in U_0 \subset U$

があり　又　$\exists F_i = \frac{G_i}{H_i} \in k(y_1, \cdots, y_n)$　$i = 1, \cdots, m$

$G_i, H_i \in k[y_1, \cdots, y_n]$ で，　$f|U_0 = (F_1, \cdots, F_m)|U_0$

（F_iの分母H_iがU_0上のどの点でも0にならない）

〔註〕6.1　$\#(k) = \infty$ の時，k^nの中の2つのopen sets U_1, U_2

が共にnon empty　$\Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \phi$

（i.e. 2つのalgebraic set　$A_1, A_2 \subsetneqq k^n$　$\Rightarrow A_1 \cup A_2 \neq k^n$）

（証）　$A_i = v(I_i)$　$(i=1,2)$　$A_i \neq k^n$より　$0 \neq I_i$　$\Rightarrow f_i \neq 0$

$0 \neq f_1 f_2 \in I_1 I_2$　　$\therefore k^n \neq v(I_1 I_2) \supset A_1 \cup A_2$　Q.E.D.

〔註〕6.2 rational map.　$k^n \supset U \xrightarrow{f} k^m$に対して（定理6.1と

〔註〕6.1より）fのdefinition　の中のF_iはξのとり方によら

ず一意的に定まる．しかし、F_iの分数表示が$\xi \in U$の

とり方によらずにできることは自明でない．

rational maps $(U, f), (U', f') : k^n \longrightarrow k^m$　$U, U' \neq \phi$　に

対して　$(U, f) \sim (U', f') \underset{def.}{\Leftrightarrow} (U \cap U', f) = (U \cap U', f')$

$\sim$は〔註〕6.1と定理6.1により、同値関係になる．

そこで次の命題が成り立つ

<u>定理6.2</u>　各equivalence class $= Cls(U, f)$に対して

$\exists (\tilde{U}, \tilde{f}) \in Cls(U, f)$　　s.t. $\exists F_1, \cdots, F_m \in k[y]$

$F_i = \dfrac{G_i}{H_i}$ $\quad {}^{\exists} G_i,\ H_i \in k[y]$

${}^{\forall}\xi \in \tilde{U}$ $\quad H_i(\xi) \neq 0$ $\quad \tilde{f}(\xi) = (F_1(\xi), \cdots, F_m(\xi))$

かつ ${}^{\forall}(U', f') \in Cls(U, f) \Rightarrow U' \subset \tilde{U}$

この証明のために、以下代数的な準備を行なう。

<u>定理 6.3</u> $\quad k$：体とすると

$k[y_1, \cdots, y_n]$ はunique factorization domain (U.F.D)

である

U.F.Dの定義のために言葉を導入する。

R を ring (commutative かつ $\ni 1$) とする

<u>定義 6.3</u> $\quad R \ni f$ が unit $\underset{def.}{\Leftrightarrow}$ ${}^{\exists} g \in R$ s.t. $fg = 1$

<u>例 6.1</u> $\quad \{\mathbb{Z}$ の units $\} = \{\pm 1\}$, $\{k[y]$ の units $\} = k^*$

$= k - \{0\}$

<u>定義 6.4</u> $\quad R \ni f$ が irreducible $\underset{def.}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f \neq 0 \text{ であり} \\ f = gh\ (g, h \in R) \text{ なら} \\ \quad g \text{ or } h \text{ は unit} \end{cases}$

<u>例 6.3</u> $\quad R$: noetherian domain

$\Rightarrow 0 \neq {}^{\forall} f \in R$ は $f = f_1 \cdots f_s$ (f_i が irreducible)

と表わせる

<u>例 6.2</u> domain という仮定をおとすとダメ

$R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (直和) において

$$\begin{cases} (1,1) \text{ は unit であり irreducible} \\ (1,0),\ (0,1) \text{ は unit でなく irreducible でもない.} \\ \qquad (\because\ (1,0) = (1,0)^2,\ (0,1) = (0,1)^2) \\ (0,0) \text{ は zero, irreducible でない} \end{cases}$$

ところが $(1,0)$ は $(1,1)$ のべきでないから, irreducible な元の積に表わせない.

(命題 6.3 の証) $\mathfrak{S} = \{ fR \mid f$ は irreducible な元の積に表わせない$\}$ として $\mathfrak{S} = \phi$ をいえばよい.

$\mathfrak{S} \neq \phi$ なら R : noetherian だから

$\mathfrak{S}$ の中に極大な ideal f_0R が存在する.

f_0 は irreducible でないから. $f_0 = gh$ g, h unit でない R の元.

ここでもし $g \in f_0R$ なら $g = f_0 g'$ $f_0 = f_0 g' h$

R = domain だから $1 = g'h$, h unit. これは, 不合理 $\therefore g \notin f_0R$ $\therefore f_0R \subsetneqq gR$, $f_0R \subsetneqq hR$

f_0R の極大性より gR, $hR \notin \mathfrak{S}$

$\therefore$ $g = g_1 \cdots g_r$, $h = h_1 \cdots h_s$ g_i, h_j (irreducible $\in R$)

$\therefore f_1 = g_1 \cdots g_r\ h_1 \cdots h_s$ これは $f_0R \in \mathfrak{S}$ に反する.

$\therefore \mathfrak{S} < \phi$ Q.E.D.

定義 6.5　R : U.F.D.（素因子分解環）

$\underset{def.}{\Leftrightarrow}$ R : 整域であって

$0 \neq {}^{\forall}f \in R$ が $f = f_1 \cdots f_s \cdot u$

$s \geqq 0$,　u = units　${}^{\forall}f_i$ (units でなく irreducible) と, 順序を除いて一意的に表わせる.

ただし 一意的とは $u \cdot f_1 \cdots f_s = u' f_1' \cdots f_s'$

f_i, f_j' irreducible non-units $\Rightarrow r = s$,

${}^{\exists}$ permutation σ on $\{1, \cdots, s\}$

f_i = unit $\times f'_{\sigma(i)}$　　$i = 1, 2, \cdots, s$.

例 6.4　R : U.F.D.

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} {}^{\forall}\text{irreducible } f \quad {}^{\forall}g, h \in R \text{ に対して} \\ f \backslash gh \ (\underset{def.}{\Leftrightarrow} gh \text{ が } f \text{ でわれる}) \\ \Rightarrow f \backslash g \quad \text{or} \quad f \backslash h \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} {}^{\forall}\text{irreducible non unit} \\ \qquad f \in R \text{ について} \\ fR \text{ は prime ideal} \end{array}\right.$$

R が noetherian domain なら $\Leftrightarrow$ になる.

(証) $\Rightarrow$ は明らか.

(R が noetherian domain の時の $\Leftarrow$)

例 6.3 より. 分解のしかたが 2 通りはないことを示せばよい.

$f_1 \cdots f_s = f_1' \cdots f_{s'}'$　　f_i, f_j' irreducible non-units と

すると $s = s'$, ${}^{\exists}$permutation σ on $\{1, \cdots, n\}$, f_i = unit

$\times f'_{s(i)}$ (${}^{\forall}i$) を　$s'' = \max\{s, s'\}$ について帰納法で

示す.　　$s'' = 1$ なら明らか.

$s-1$ までは証明されたとすると. $f'_{s'} \mid f_1 \cdots f_s$ よって仮定

より $\exists i$ $f'_{s'} \mid f_i$ しかるに f: irreducible,

$f'_{s'}$ non unit $\Rightarrow$ f_i = unit $\times f'_{s'}$

$f_1 \cdots \overset{i}{f_i} \cdots f_s$ = unit $\times f'_1 \cdots f'_{s-1}$ に帰納法の仮定を適用して

Q.E.D.

<u>定理 6.4</u> A; U.F.D. とすると z を変数としたとき

$A[z]$ も U.F.D. である

(定理 6.3 はこれの系 ∵ $k[y_1, \cdots, y_n] = (k[y_1, \cdots, y_{n-1}])[y_n]$)

<u>系 6.4</u> $\mathbb{Z}[y_1, \cdots, y_n]$ は U.F.D.

定理6.4のために言葉を導入する.

<u>定義 6.6</u> $f = a_0 + a_1 z + \cdots + a_\ell z^\ell \in A[z]$ $(a_i \in A)$ が primitive

$\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $a_0, a_1, \cdots, a_\ell$ が共通の (unit でない) factor をもたない.

$a_0, a_1, \cdots, a_\ell$ が A を生成するという意味ではない

<u>例 6.3</u> $A = k[x, y]$ $A[z] \ni x + yz = f$: primitive

<u>lemma 6.5</u> (Gauss の lemma)

A : U.F.D. $A[z] \ni f(z), g(z)$

f, g が primitive $\Rightarrow$ fg : primitive

(証) $A \ni {}^{\forall}u$ irreducible non-unit について

$fg \notin u \cdot A[z]$ をいえばよい

$A[z]/u \cdot A[z] \cong (A/uA)[z]$ であり，A/uA は整域 $\Rightarrow$

$(A/uA)[z]$ は整域 mod. $uA[z]$ でみると

$\bar{f} \neq 0$, $\bar{g} \neq 0$ in $(A/uA)[z]$

$(A/uA)[z]$ は整域だから $\bar{f}\bar{g} = \bar{f} \cdot \bar{g} \neq 0$ $\therefore fg \notin uA[z]$

Q.E.D.

<u>系 6.5.1</u> $u \in A$ irreducible, $f, g \in A[z]$

$u \mid fg \Rightarrow u \mid f$ or $u \mid g$

<u>(註) 6.5</u> k : 体 $\Rightarrow$ $k[z]$: U.F.D.

(証) (註) 6.4 により f: irreducible $f \mid gh$ $f, g, h \in k[z]$ とし，

$f \nmid g$ でないとする．(f, g) の中で degree 最小のものを d $(\neq 0)$ とする f を d でわり $f = dq + r$

$q, r \in k[z]$, $\deg r < \deg d$ とすると

$r \in (f, g)$ よって d のとり方により $r = 0$ で

なければならない．

$\therefore f \in (d)$ 同様に $g \in (d)$

$f = dq$ から d か q は unit. q が unit なら $(f) = (d) \ni g$

となり　"$f \nmid g$ でない" に反する．　∴ d は unit.

∴ $(f, g) \ni 1$

∴ $\exists a, b \in R$　　$af + bg = 1$

∴ $h = afh + bgh \in (f)$,　$f \nmid h$.　　Q.E.D.

<u>系 6.5.2</u>　　A: U.F.D.　K: A の商体　z: 変数

f が $A[z]$ で irreducible　$\Rightarrow$ f は $K[z]$ でも irreducible

(証)　$f = g'h'$　$g', h' \in K[z]$ とすると

$g = c \cdot g'$,　$h = d \cdot h'$ $(c, d \in K)$ として

$f = \frac{b}{a} gh$ $\begin{cases} A \ni a, b \\ A[z] \ni g, h \text{ primitive} \end{cases}$　と表わせる．

$af = b \cdot (gh)$　　系 6.5.1 より gh は primitive

af の係数の最大公約数 $= a$　　$\Rightarrow \frac{a}{b}$ unit　$\in R$

$b \cdot gh$　　〃　　$= b$

よって f: irreducible により deg g or deg h $= 0$

∴ deg g' or deg h' $= 0$

i.e.　g' or h' unit　　Q.E.D.

(定理 6.4 の証明)　　(註) 6.4 より

f: irreducible　と　$f \mid gh \Rightarrow f \mid g$ or $f \mid h$ を示せばよい．

系 6.5.2 より　f は $K[z]$ で irreducible だから (註) 6.5 より

例えば　$g = \frac{b}{a} \cdot \alpha \cdot f$ （$A \ni a, b$ 互いに素，$\alpha \in A[z]$ primitive ）と表わせる．

$f \in A$ なら 系 6.5.1 より明らかだから，$f \notin A$ よって f primitive としてよい．

lemma 6.5 より $\alpha \cdot f$ primitive よって 系 6.5.2 と同じ論法で $\frac{b}{a}$: unit $\in A$ $\therefore f \in A$　Q.E.D

（定理 6.2 の証明） rational map

$k^n \supset \underset{\neq \phi}{U} \xrightarrow{f} k^m$ に対して 註 6.2 より

$(F_1, \cdots, F_m)$　$F_i \in k(\xi)$ が定まる

$k[\xi] = k[\xi_1, \cdots, \xi_n]$ が U.F.D だから

$F_i = \frac{G_i}{H_i}$,　$G_i, H_i \in k[\xi]$　と表わせる．

（G_i と H_i は共通の non-constant factor をもたない）

$\tilde{U} = k^n - \bigcup_{i=1}^{m} V(H_i)$

$(F_1, \cdots, F_m)$ が $\tilde{U} \xrightarrow{\tilde{f}} k^m$ rational map を定め．

$(\tilde{U}, \tilde{f}) \sim (U, f)$

$\tilde{U}$ が最大の domain であることは，$\frac{G_i}{H_i} = \frac{G_i'}{H_i'}$ なら $H_i \backslash H_i'$ であることから明らか

§7. Polynomial maps II.

k^nの座標関数 $y_1, \cdots, y_n$, Iを$k[y]$のideal

とすると、それに対してalgebraic set $v(I)$が

考えられる.

註7.1 $A = k[y]/I$: k-algebra

この時 $\{v(I)の点\} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \{A の k\text{-maximal ideal}\}$

(ただし $M \subset A$ が k-maximal ideal

$\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{\sigma} & A/M \\ \downarrow & & \uparrow \\ k[y] & \xrightarrow{nat.} & A \end{array}$ natural が isom. (kは体だからMはmaximal ideal))

$\longrightarrow$の対応 $z = (z_1, \cdots, z_n) \longmapsto M_z = (y_1 - z_1, \cdots y_n - z_n)$

$\longleftarrow$の対応 $M : k \xrightarrow{\theta} A/M$とし $z_1 = \theta^{-1}(y_1 \bmod. I)$ $z = (z_1, \cdots, z_n)$

定義7.1

$$\begin{array}{ll} Y = v(I) \hookrightarrow k^n & y_1, \cdots, y_n は k^n の座標関数 \\ \downarrow f. map & \\ X = v(I) \hookrightarrow k^m & x_1, \cdots, x_m は k^m の座標関数 \end{array}$$

の時 fがpolynomial map

$\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\exists m$ 個のpolynomial $f_1(y), \cdots, f_m(y) \in k[y]$

$\forall \eta \in Y$ $f(\eta) = (f_1(\eta), \cdots, f_m(\eta))$

註7.2 今 k-algebra homomorphism

$\Theta : k[x]/J \longrightarrow k[y]/I$ が与えられたとする.

その時 $f : Y \longrightarrow X$ polynomial map. が次のようにしてきまる. 即ち $\Theta(x_i \bmod. J) = f_i(y) \bmod. I$ となる.

$f_1, \cdots, f_m \in k[y]$ をとる. ここで $F = (f_1, \cdots, f_m) : k^n \to k^m$

これが $f : Y \longrightarrow X$ を induce する.

実際 $\forall \eta \in Y$ $F(\eta) = \xi \in k^m$ とすると. $F(\eta) \in V(J) = X$

(∵ $\forall h(x) \in J$ をとる

$$\Theta : k[x] \longrightarrow k[y]$$
$$\quad\ \ \rotatebox{90}{$\in$} \qquad\qquad \rotatebox{90}{$\in$}$$
$$x_i \longrightarrow f_i(y)$$

Θ が Θ を induce する $\Rightarrow$ $\Theta(J) \hookrightarrow I$

即ち $\Theta(h) = h(f_1(y), \cdots, f_m(y)) \in I$

従って $h(\xi) = h(F(\eta)) = [\Theta(h)](\eta) = 0$ $\therefore \xi \in X$)

このようにしてできる f は Θ によって unique にきまる.

(f_i のとり方によらない)

(註) 2.3 $\Theta : k[x]/J \longrightarrow k[y]/I$ が対応

f: $X \longleftarrow Y$ を与えている.

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & Y \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \xi & \longleftarrow & \eta \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ M_\xi & & M_\eta \end{array}$$

k-maximal ideal

この時 $f(\eta) = \xi \iff \Theta^{-1}(M_\eta) = M_\xi$

(証) $\Theta^{-1}(M_\eta) = M_{f(\eta)}$ 即ち $M_\eta \supset \Theta(M_{f(\eta)})$ を言えば十分だが $M_{f(\eta)} \ni \forall h$ に対して $(\Theta(h))(\eta) = h(f(\eta)) = 0$ より明らか.

§8. Integral dependence

定義 8.1 $\theta : A \longrightarrow B$ ring homomorphism とする.

B が A の上で integral (θ に対して)

$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall z \in B$ が次の様な方程式をみたす.

$$z^\ell + \theta(a_1) z^{\ell-1} + \cdots + \theta(a_\ell) = 0 \qquad a_i \in A$$

定理 8.1 $\theta : A \longrightarrow B$ を ring homomorphism とする.

$\xi \in B$ が integral over A (θ に対して)

$\Longleftrightarrow$ ring $A[\xi]$ $\left(\underset{\text{def.}}{=} \theta(A)[\xi]\right)$ について

$^\exists A[\xi]$-module M

1) faithful (即ち $^\forall \Delta \in A[\xi]$ について $\Delta M = 0 \Rightarrow \Delta = 0$)

2) M : A-module として finite module

(証) ($\Leftrightarrow$) ξ integral over A なら $A[\xi]$ は finite A-module

($\xi^\ell + a_1 \xi^{\ell-1} + \cdots + a_\ell = 0 \qquad a_i \in \theta(A)$

$\Rightarrow$ $A[\xi]$ は A-module として $1, \xi, \xi^2, \cdots, \xi^{\ell-1}$ で生成される)

$M = A[\xi]$ とおける

M は faithful $A[\xi]$-module ($^\exists 1 \in M$)

($\Leftarrow$) $^\exists M$ とすると $M = \theta(A) m_1 + \cdots + \theta(A) m_r$

$$\xi m_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} m_j \qquad (i = 1, \cdots, r)$$

$\Delta = \det(\xi \delta_{ij} - a_{ij})$ とおくと

$\Delta m_i = 0 \quad ^\forall i$

よって M が faithful であることから $\Delta = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi - a_{11} & -a_{12} & \cdots \\ -a_{21} & \xi - a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \; \xi - a_{rr} \end{vmatrix} = \xi^r + a_1 \xi^{r-1} + \cdots + a_r = 0 \qquad a_i \in \Theta(A)$$

Q. E. D.

<u>系 8.1.1</u> (1) $\xi, \eta \in B$, integral $\Rightarrow$ $\xi+\eta$, $\xi\eta$: integral

(2) $A \to B$, $\xi, \eta \in B$; $\left.\begin{array}{l} \xi : \text{integral}/A \\ \eta : \text{integral}/A[\xi] \end{array}\right\} \Rightarrow \eta$: integral$/A$

(証) (1) $A[\xi, \eta]$ は A module として finite

$\because$ $\begin{cases} \xi^l + \cdots = 0 \\ \eta^n + \cdots = 0 \end{cases}$ なら $A[\xi, \eta] = \sum_{\substack{0 \le \alpha < l \\ 0 \le \beta < n}} A \xi^\alpha \eta^\beta$

(2) $M = A[\xi, \eta]$ ととればよい. Q. E. D

<u>Proposition 8.2</u> $\Theta : A = k[x]/I \to B = k[y]/J$ が k-alg. hom

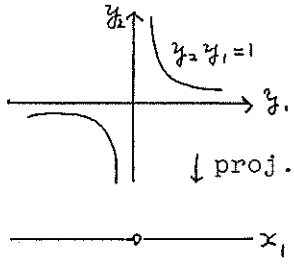
の時 対応する polynomial map を

$$f : X = \underset{k^n}{\underset{\downarrow}{V(I)}} \longleftarrow Y = \underset{k^m}{\underset{\downarrow}{V(J)}} \text{ とする}$$

Θ が integral でかつ injective, $k = \bar{k}$

$\Rightarrow$ f が surjective

<u>例 8.1</u> integral という条件をゆるめるとダメ



$B = k[y_1, y_2]/(y_1 y_2 - 1) \underset{(*)}{\cong} k[x_1, \frac{1}{x_1}]$

$A = k[x_1]$

f は surjective でない

(*) の同型は 次の lemma を認めればよい.

<u>lemma 8.3</u> R を integral domain とし X を変数とする.

$R \ni u, v$ が $uR : vR = uR$ $(\Leftrightarrow vR : uR = vR)$

をみたす時 $R[X]$ の中で $(uX - v)R[X]$ は prime ideal

そして $R \longrightarrow R[X]/(uX-v)$ は injective

(証) 後半は明らか. 前半を示す. $f g \in (uX-v)R[X]$ とすると

$\exists h \in R[X]$ $f \cdot g = (uX - v)h$ $Y = uX$ とおくと

$f' = u^{\deg f} f$, $g' = u^{\deg g} g$, $h' = u^{\deg h} h$ は $R[Y]$ に属し,

$f' \cdot g' = u(Y - v)h'$

$(Y - v)$ は $R[Y]$ の prime ideal だから 例えば

$f' \in (Y - v)R[Y]$. 故に $f \cdot u^n \in (uX - v)R[X] \Rightarrow$

$f \in (uX - v)R[X]$ を示せばよい

$v = 1$ としてよい

deg f についての induction で示す.

$f = xg + a$ $g \in R[X]$, $a \in R$ とすると deg g < deg f

定数項を比べて $au \in v$ $vR : uR = vR$ より $a \in vR$

$\therefore a = va'$ $a' \in R$

$f + a'(uX - v) = X(g + a'u)$ で

$X \cdot u^n(g + a'u) \in (uX - v)R[X]$ $X \cdot u^n(g + a'u) = (uX - v)h$

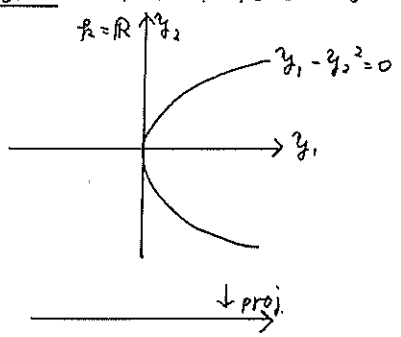
定数項を比べて $h \in XR[X]$ $\therefore h = Xh'$ $h' \in R[X]$

$\therefore u^n(g + a'u) = (uX - v)h'$, $\deg(g + a'u) < \deg f$

induction の仮定より $g+a'u \in (ux-v)R[X]$

$\therefore\ f = x(g+a'u)-a'(ux-v) \in (ux-v)R[X]$ Q.E.D.

<u>例8.2</u> $k \neq k$ だと θ が injective, integral でも ダメ



$B = \mathbb{R}[y_1, y_2]/(y_1-y_2^2) \cong \mathbb{R}[\sqrt{x_1}]$

$\uparrow$ integral injective

$A = \mathbb{R}[x_1]$

$f_{\mathbb{R}}$ は surjective でない

Prop. 8.2 のために 次の代数の定理を証明する.

<u>定理8.4</u> (going-up lemma)

$B \uparrow A$ integral injective, $A \supset M$ prime ideal の時

$\Rightarrow$ $\exists$ prime ideal $N \subset B$ s.t. $M = N \cap A$

(証) $\mathfrak{N} = \{ B$ の ideal $N \mid N \cap A \subset M \}$ を考える

$\mathfrak{N}$ は inductive set (Zorn's lemma が適用できる)

従って maximal ideal $N \in \mathfrak{N}$ がある.

この N について $\begin{cases} 1)\ N \cap A = M \\ 2)\ N \text{ は prime} \end{cases}$ を示す

1) $N \cap A \subsetneq M$ とすると $\exists a \in M - (N \cap A)$

$N' = N + aB \supsetneq N$ 従って $N' \cap A \not\subset M$

$\therefore\ \exists x \in N' \cap A - M$ $x = n + ab$ $b \in B$, $n \in N$, b は integral/A

$b^\ell + c_1 b^{\ell-1} + \cdots + c_\ell = 0 \qquad c_i \in A$

$a^\ell \times (b^\ell + c_1 b^{\ell-1} + \cdots c_\ell) = 0$ に $ab = x - n$ を代入して

$x^\ell + aP + nQ = 0$, $P \in A$, $Q \in B$ の形の式をうる.

$nQ = -x^\ell - aP \in A \cap N \subset M$

$a \in M$ より $x^\ell \in M \Rightarrow x \in M$ 矛盾

2) $f \cdot g \in N$ $N + fB = N'$, $N + gB = N''$ とおくと

$(N' \cap A) \cdot (N'' \cap A) \subset (N' \cdot N'') \cap A \subset N \cap A = M$

M : prime だから $N' \cap A \subset M$ or $N'' \cap A \subset M$

$N \subset N', N''$ だから $N = N'$ or N''

$\therefore f$ or $g \in N$ Q.E.D.

(Proposition 8.2 の証)

$X \ni \xi \longleftrightarrow M_\xi = (X_1 - \xi_1, \cdots, X_n - \xi_n)A$ という対応がある

$Y \ni \eta \longleftrightarrow M_\eta$: B の k-maximal ideal

$\eta \in f^{-1}(\xi)$ ということは, $M_\xi B \subset M_\eta$ かと同うのと同じである. 故に次のことを示せばよい "$M_\xi B$を含む k-maximal ideal M_ηが存在する".

going-up lemma によって $\exists N$ prime $\subset B$, $N \cap A = M_\xi$

$B/N \xleftarrow{\text{integral}} A/M_\xi \cong k$

故に次の lemma を示せば $k = \bar{k}$ より N : k-maximal ideal

Q.E.D.

lemma 8.5 $k \underset{\text{integral}}{\hookrightarrow} S$ S: integral domain.

k: 体

$\Rightarrow$ S は体, algebraic over k

(証) $S \ni b \neq 0$ とすると $b^{\ell} + a_1 b^{\ell-1} + \cdots + a_{\ell} = 0$ $a_i \in k$

S は integral domain だから $a_{\ell} \neq 0$ としてよい

この時 $1 = b \cdot \left\{ -\frac{1}{a_{\ell}} (b^{\ell-1} + a_1 b^{\ell-2} + \cdots + a_{\ell-1}) \right\}$

$\therefore$ $b^{-1} \in S$ Q.E.D.

定理 8.6 (Noether Normalization theorem)

$k \subset K$ 体 $\#(k) = \infty$

$A = K[y_1, \cdots, y_m]/J$ J ideal $\neq 1$

$\Rightarrow$ y の k- linear combination $\exists z_1, \cdots, z_r$ $r \geq 0$

Θ: $K[\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_r] \to A$ が injective integral

独立変数

$\bar{z}_i \longrightarrow z_i$

(証) m についての induction ($m = 0$ なら明らか)

$J \neq (0)$ としてよく この時 $0 \neq F(y) \in J$

$\#(k) = \infty$ だから y の k-lin. transformation で移しておく

$F = c y_m^{\ell} +$ (y_m の degree $< \ell$ なる part), $K \ni c \neq 0$

とできる.

$A = K[y_1, \cdots, y_m]/J$ よって γ は injective integral

$\uparrow \gamma$

$A_1 = K[y_1, \cdots, y_{m-1}]/J_1$ ただし $J_1 = J \cap K[y_1, \cdots, y_{m-1}]$

induction の仮定から $y_1, \cdots, y_{m-1}$ の k-lin. combination

$\exists z_1, \cdots, z_r \qquad r \geq 0$

$A_1 \xleftarrow{\delta} K[\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_r]$ が injective integral

$z_i \longleftarrow \bar{z}_i$

よって $z_1, \cdots, z_r$ と $r\delta$ が条件をみたす. Q.E.D.

<u>系 8.6.1</u> $(K = k \subset \bar{k})$ $\quad Y \hookrightarrow k^m$ algebraic set とする

$Y = V(J) \quad J \neq 1$

$\Rightarrow \exists r \geq 0 \quad f : Y \to k^r$ surjective な polynomial map

(実際には f は integral な θ に対応している)

(ただし k^0 は 1 点をあらわす)

<u>系 8.6.2</u> $(K = k = \bar{k}) \quad J \neq 1 \Leftrightarrow Y \neq \phi$

Noether Normalization theorem の応用例

$\theta : A \to B$ injective $\begin{cases} A : \text{integral domain} = k[X]/I & I : \text{prime} \\ B : \text{integral domain} = k[Y]/J & J \end{cases}$

$f : X \leftarrow Y$

$k = \bar{k}$

$\Rightarrow \exists r$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d] \arrow[dr, "\exists g"] & \\ X & X \times k^r \arrow[l, "\text{proj.}"] \end{tikzcd}$$

そして $\exists W \subset X$, algebraic set $\neq X$

$$\begin{tikzcd} Y' = Y - f^{-1}(W) \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, "g'"] & \\ X' = X - W & X' \times k^r \arrow[l, "\mathrm{proj.}"] \end{tikzcd}$$

g'はintegral injective なように対応している.

(証) cf. prop. 8.8 の証明

<u>定理 8.7</u> (Hilbert's Nullstellensatz)

$k = \bar{k}$ $\quad g_1, \cdots, g_m$ 座標関数 of k^m

I_α : ideal $\subset k[g]$ $\quad \alpha = 1, 2$

この時 $\quad v(I_1) = v(I_2) \Leftrightarrow {}^\exists l \gg 0 \quad I_1^l \subset I_2,\ I_2^l \subset I_1$

$\Leftrightarrow \sqrt{I_1} = \sqrt{I_2}$

(証) $\quad X = v(I_1)$ とする

$g \in k[g]$ として $\quad g|X \equiv 0 \Rightarrow {}^\exists l > 0 \quad g^l \in I_1$ を

言えばよい. $\quad g|X \equiv 0$ とする

k^{m+1} の中の algebraic set を, $(g_1, \cdots, g_m, t)$ を座標関数として

$\tilde{I} = I_1 k[g, t] + (g(g)t - 1) k[g, t]$ により定義されるもの

$v(\tilde{I})$ をとる $\quad v(\tilde{I}) \ni (\eta, \tau)$ とすると

$\eta \in X$ より $\quad g(\eta) = 0 \quad \times\ g(\eta)\tau = 1$. これは

不合理 $\quad \therefore v(\tilde{I}) = \phi$

Normalization theorem の系 8.6.2 より $\tilde{I} \ni 1$

よって $\exists h_i \in I_1 \quad (i = 1, \cdots, s)$, ${}^\exists H_i(g, t), G(g, t) \in k[g, t]$

$(i = 1, \cdots, s)$

$$1 = \sum_{i=1}^{s} h_i(\xi)\, H_i(\xi, t) + (g(\xi)t - 1)\, G(\xi, t)$$

$\ell = \max_i \{ \deg_t H_i,\ \deg_t G \}$ とし 両辺に g^ℓ を

かける

$$g^\ell = \sum_{i=1}^{s} h_i(\xi)\, H_i^*(\xi, g(\xi)t - 1) + (g(\xi)t - 1)\, G^*(\xi, g(\xi)t - 1)$$

ただし $H_i^*,\ G^* \in k[\xi, t]$

t は $k[\xi]$ 上の変数だから $t = 1/g$ とおいて

$$g^\ell = \sum_{i=1}^{s} h_i(\xi)\, H_i^*(\xi, 0) \in I_1 \qquad \text{Q.E.D.}$$

<u>系 8.2.1</u> $k = \bar{k}$ の時

$$\left\{ k^n \text{ の中の algebraic sets} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} k[\xi] \text{ の semiprime ideals} \right\}$$

ただし J : semiprime $\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\sqrt{J} = J$

$\Longleftrightarrow$ $J = P_1 \cap \cdots \cap P_s$ P_i = prime

R が noetherian の時

対応 $\rightarrow$ は : $X \longmapsto \mathcal{I}(X)$

対応 $\leftarrow$ は : $v(X) \longleftarrow\!\shortmid I$ で与えられる

<u>系 8.2.2</u> $k = \bar{k}$ の時 系8.2.1の対応の下に

$$\left\{ \text{irreducible algebraic sets} \subset k^n \right\} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \left\{ \text{prime ideals} \subset k[\xi] \right\}$$

(これは $\mathcal{I}(v(I)) = \sqrt{I}$ および 定理5.9

より明らか)

系 8.7.3　　$k = \bar{k}$ の時

$$\{\text{points in } k^n\} \xleftrightarrow{1-1} \{\text{maximal ideals in } k[y]\}$$

証) $\{\text{point in } k^n\} \xleftrightarrow{1-1} \{k\text{-maximal ideals in } k[y]\}$ は明らかだから '$k[y]$ の任意の maximal ideal は k-maximal' を示せばよい.

M : maximal ideal $\subset k[y]$

$\ni Y \in V(M) \neq \phi$　　$M_\eta = (y_1 - \eta_1, \cdots, y_n - \eta_n) \supset M$

M は maximal だから　$M = M_\eta$　　Q.E.D.

Proposition 8.8　　$k = \bar{k}$ の時

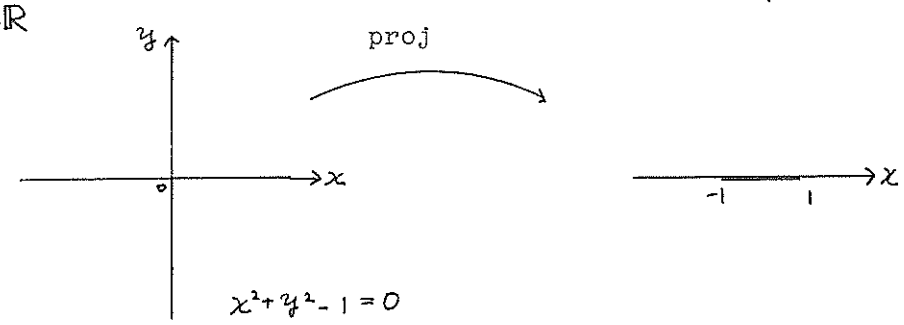
$$\Theta : A = k[x]/I \longrightarrow B = k[y]/J \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{injective} \\ k\text{-algebra hom.} \end{array} \right.$$

$$f : X = V(I) \longleftarrow Y = V(J)$$

$\Rightarrow I_m(f)$ が X の open dense subset を含む

例 8.3　　$k \neq \bar{k}$ ならダメ

$k = \mathbb{R}$



(Zariski topology で open でない)

(証) 1. まず I と J が prime の時に帰着する.

① $\sqrt{J} = P_1 \cap \cdots \cap P_s$ 　　P_i : J の min. prime,

$\theta^{-1}(P_i) = Q_i$ 　　$(i = 1, \cdots, s)$ prime, とおく.

$Y = \bigcup_{i=1}^{s} Y_i$ 　　ただし $Y_i = V(P_i)$ が成立つ.

さらに 実際に $X = \bigcup_{i=1}^{s} X_i$ 　　ただし $X_i = V(Q_i)$

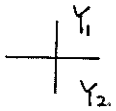
☺ $I_0 = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i$ とすると

$I_1 \supset I$ かつ A の ideal I_0/I は θ によって

$\bigcap_i P_i/J$ (nilpotent ideal) の中にはいる

(∵ θ : inj.) 故に I_0/I は nilpotent ideal. $\therefore \sqrt{I_0} = \sqrt{I}$

(ただし X のこの表現には不必要なものも含みうる

例: 

$Y = Y_1 \cup Y_2$. 横軸への projection によって

$Y_i \to X_i$ となる 

)

② 各 i について f が induce する $f_i : Y_i \to X_i$ について

$\mathrm{Im}(f_i)$ が X_i の open dense subset を含む.

$\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(f)$ は open dense subset を含む.

☺ U_i : X_i の open dense subset なら

$U = \bigcup_{i=1}^{s} (U_i - \bigcup_{j \neq i} X_j)$ open dense subset in X

2. 以後 θ が injection で I, J が prime ideal

と仮定してよい.

$$\begin{array}{ccccc} \text{整域}\ B & \hookrightarrow & B_K & = & K[\xi_1,\cdots,\xi_n]/\mathfrak{p}_K \\ \uparrow & & \uparrow * & & \\ A & \hookrightarrow & K(A\text{の商体}) & & \\ \uparrow & & & & \\ k & & & & \end{array}$$

$*$ に Noether Normalization Theorem を適用する. ($k=\bar{k}$ だから $\#(k)=\infty$

$\exists r \geqq 0$ $\exists z_1,\cdots,z_r$ ($\{\xi_i\}$ の k-lin.combination)

$B_K \hookleftarrow K[z_1,\cdots,z_r]$ で B_K は integral

B_K は ξ_i の剰余類 $\bar{\xi}_i$ で生成される.

$$\bar{\xi}_i^{\,l} + h_i(z)\,\bar{\xi}_i^{\,l-1} + \cdots = 0 \qquad (i=1,\cdots,m)$$

$h_{ij}(z) \in k[z]$ 多項式. 有限個の係数, (i,j) も有限個. これらの係数の分母の公倍式 $h \neq 0$, $h \in A$ をとると $B[\frac{1}{h}] \hookleftarrow A[\frac{1}{h}][z_1,\cdots,z_r]$ は integral である.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "\text{open}"] \arrow[d, "f"'] & Y' \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[r, hook] & X' \arrow[r, "\text{proj}"] & X' \times k^r \end{tikzcd}$$

irreducible

g は λ に対応する

従って g は surjective

ただし $Y' = \{\eta \in Y \mid h(\eta) \neq 0\}$

$X' = \{\xi \in X \mid h(\xi) \neq 0\}$

[註] 5.7 を使うと.

$\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(f) \supset \mathrm{Im}(f') = X'$ open dense subset Q.E.D

[註] 8.1 一般に $k^n \supset X = V(I)$ とし $k[X]/I = A \ni h$,

$k = \bar{k}$, $H \in k[X]$ とする時 $X' = \{\xi \in X \mid h(\xi) \neq 0\}$

には $X' \hookrightarrow k^{n+1}$ として algebraic set の構造がはいる.

(註) k^{n+1} の座標として $x_1,\cdots,x_n,t$ $X' = V(I')$

ただし　$I' = I k[x,t] + (H(x)t-1)\, k[x,t]$

<u>例 8.4</u>　$(x,y,z) \in X = \{(x,y,z) \in k^3 \mid x \ni -y = 0\}$

$$\begin{array}{ccc} \rotatebox{90}{$\in$} & & \downarrow f : \text{projection} \\ (x,y) & \in & k^2 \end{array}$$

$f(X) = \{(x\,y\text{-plane}) - (y\text{-axis})\} \cup \{\text{原点}\}$

Zariski の意味で non-closed, non-open

$k = \mathbb{C}$ でも同様

<u>註 8.2</u>　$k^n \supset X$: algebraic set の constructible subset Y

$\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ "Y が X の locally closed subset の finite union

とすると

" $\theta : A = k[x]/I \longrightarrow B[y]/J$　　$k = \bar{k}$

$f : X \longleftarrow Y$

$\Rightarrow$ $Y \supset {}^{\forall}Z$ constructible set　に対して

$f(Z)$: constructible " (Chevalley)

が Prop. と $\boxed{\text{一般に}}$ (という形の議論) から 容易に

示される. (cf. Matsumura [1] P42. Th. 6)

§9. Universally closed maps.

定義 9.1 $A = k[x]/I \qquad X = V(I) \hookrightarrow k^m$

$B = k[y]/J \qquad Y = V(J) \hookrightarrow k^n$

θ : k-algebra hom. $\qquad A \to B$

$f : Y \to X$ （θで induce されたmap ）とする.

この時 fがuniversally closed map であるとは,

$\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall l \geq 0$ に対して $f \times id : \underset{k^{n+l}}{Y \times k^l} \longrightarrow \underset{k^{m+l}}{X \times k^l}$

が closed map になる.

これに関して次の定理がある.

定理 9.1 $k = \bar{k}$, $A = k[x]/I \quad X = V(I) \hookrightarrow k^m$

$B = k[y]/J \quad Y = V(J) \hookrightarrow k^n$

θ : k-algebra hom. $\qquad A \quad B$

$f : Y \to X$ （θで induce された map ）とする

この時

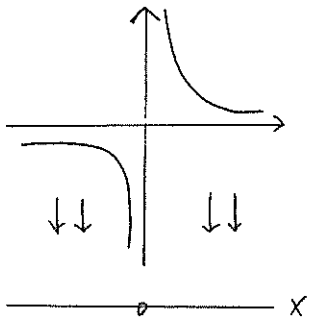
θが integral $\Leftrightarrow$ fが universally closed map.

例 9.1 $Y = \{\xi \in \mathbb{C}^2 \mid \xi_1 \xi_2 = 1\}$ 各 $\xi \in X$ について

$X = \mathbb{C}$ $f^{-1}(\xi)$は有限個の点

$f : (\xi_1, \xi_2) \longmapsto \xi_1$ だが fは closed

でない



t: 変数として

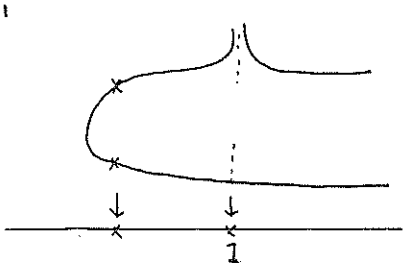
$$\begin{array}{ccc} B & \cong & k[t, \frac{1}{t}] \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \cong & k[t] \end{array}$$

integral でない

例 9.2　f:closed map　でも必ずしも f:universally closed とはいえない　$X = V((z_1-1)z_2=1) \hookrightarrow \mathbb{C}^2$

$$f: X \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(z_1, z_2) \longmapsto z_1^2$$

$$\begin{array}{c} X \\ f\downarrow \\ \mathbb{C} \end{array}$$



f は closed だが universally closed でない

実際
$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{C} & \supset & \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_1 = z_3\} \text{ closed} \\ {\scriptstyle f \times id}\downarrow & & \downarrow \\ X \times \mathbb{C} & \supset & \{(z_1, z_3) \mid z_1 = z_3^2, z_3 \neq 1\} \text{ not closed} \end{array}$$

(定理の ⇒ の証明)

まず f: closed を示す

Y の closed set W をとる.

W は B の中の ideal S によって $W = \{ B/S$ の maximal ideals の全体$\}$ と表わされる．$f(W)$ の任意の点の上で $\theta^{-1}(S)$ の元は 値 0 をとる．

$X \supset V = \{ A/\theta^{-1}(S)$ の k-maximal ideals の全体$\}$ とおくと．これは当然 closed．

そして
$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{f} & Y \\ \cup & & \cup \\ V & \xleftarrow{g} & W \end{array}$$
故に g: surjective を言えばよい．

環の方でみると $\tau : A/\theta^{-1}(S) \to B/S$ は injective integral

proposition 8.2 より $V \xleftarrow{g} W$ は surjective

f が universally closed であること．環の方で見ると

$$\begin{array}{ccc} Y \times k^{\ell} & & B[z_1, \cdots, z_\ell] \\ \downarrow f \times id & & \uparrow \tilde{\theta} \\ X \times k^{\ell} & & A[z_1, \cdots, z_\ell] \end{array}$$

$z_1, \cdots, z_\ell$ は独立変数

k^{ℓ} の座標 $z_1, \cdots, z_\ell$

θ が integral $\Rightarrow$ $\tilde{\theta}$ も integral （系 8.1.1 の(1)）

よって $\tilde{\theta}$: closed

（$\Leftarrow$ の証明）

① $\mathfrak{J}$ が prime のときに帰着できる（従って $\mathfrak{I}$ も prime としてよい） $\sqrt{\mathfrak{J}} = P_1 \cap \cdots \cap P_s$ ここに $\{P_i\}$ は $\mathfrak{J}$ の minimal primes.

$\theta_i : A \to B_i = k[\{z\}]/P_i$

この時 f が universally closed なら $^\forall i$ について

θ_i に associate した map f_i も universally closed

∵それは $\tau_i : B \to B_i$ なる ring hom. が integral であることから、(⇒の証明)を用いて τ_i に ass. した g_i は universally closed. よって $f_i = f \circ \tau_i$ も universally closed.

又, θ_i がすべて integral なら θ も integral.

実際 $^\forall \theta_i$ がすべて integral とすると

$$\begin{tikzcd} \bar{\theta} : A \arrow[rr, "\pi\theta_i = \bar{\theta}"] \arrow[dr, "\theta"'] & & \prod_{i=1}^{s} B_i \\ & B \arrow[ur, "\tau"'] & \end{tikzcd} \ni 1 = e_1 + \cdots + e_s$$

e_i : component B_i の単位元

(natural maps の product)

θ が integral $\Longrightarrow$ B_i int/Ae_i $(Ae_i = \theta_i(A))$,

系8.1.1の(1)から $e_i^2 - e_i = 0 \Rightarrow Ae_i$ int/$\bar{\theta}(A)$,

これから、系8.1.1の(2)を使って、B_i int./$\bar{\theta}(A) \Rightarrow B$ int./$\bar{\theta}(A)$

$\therefore$ $\bar{\theta}$ integral

そこで $B \ni {}^\forall w$ $\exists a_1, \cdots, a_e \in A$

$$\tau(w)^e + \bar{\theta}(a_1) \cdot \tau(w)^{e-1} + \cdots + \bar{\theta}(a_e) = 0$$

$$\therefore\ w + \theta(a_1) w^{e-1} + \cdots + \theta(a_e) \in \tau^{-1}(0)$$

しかも $\tau^{-1}(0)$ は nilpotent ideal

よって $\exists m > 0$ $(w^e + \theta(a_1) w^{e-1} + \cdots + \theta(a_e))^m = 0$

これは w int./$\theta(A)$ を示し.

従って θ が integral.

② 以後 I, J は prime ideal, θ は injective とする

$B \ni {}^{\forall}\gamma \neq 0$ が A 上 integral だと言えばよい.

$\gamma = \bar{h}$ $\quad h \in k[\xi]$ とし

$k^n \times k$ の座標関数を ξ, t とする

$Y \times k$ の closed subset として $F: h(\xi)t - 1 = 0 \subset Y \times k$

を考える. まず F は irreducible で F に対応する

ring は $\cong B[\frac{1}{\gamma}]$

(∵ lemma 8.3, および 系 8.7.2 より明らか)

$$\varphi : k[x,t] \xrightarrow{\theta \times id} k[\xi, t] \xrightarrow{nat.} k[\xi,t]/(\sigma, ht-1) \xrightarrow{\sim} B[\tfrac{1}{\gamma}]$$

とおくと

$$\begin{array}{ccc} k[x,t]/\varphi^{-1}(0) & \longrightarrow & B[\frac{1}{\gamma}] \\ \cong & & \\ A[\frac{1}{\gamma}] & & \end{array}$$ は injective

よって Prop. 8.8 より $(f \times id)(F)$ は $v(\varphi^{-1}(0))$ の open dense subset を含み しかも 仮定より closed.

($g = f \times id$ とおく) $\quad \therefore g(F) = v(\varphi^{-1}(0))$

$$\begin{array}{ccccc} Y \times k & \longleftarrow & F & \longleftrightarrow & \text{ring } B[\frac{1}{\gamma}] \\ g\downarrow & & \downarrow g, & & \uparrow \\ X \times k & \hookleftarrow & \underset{\text{closed}}{E} = g(F) & \longleftrightarrow & \text{ring } A[\frac{1}{\gamma}] \end{array}$$

ここに↑は"B の商体 ⊇ A の商体"による natural な inclusion map

又 $g(F) \cap \{t=0\} = \phi$ (∵ $\ni (\xi, 0)$ とすると $\xi = f(\eta), \eta \in Y$ $(\eta_0) \in F$ $\therefore h(\eta) \cdot 0 - 1 = 0$ 不合理)

$\therefore v(\varphi^{-1}(0)) \sim \{t=0\} = \phi$

よって $A[\frac{1}{\gamma}]$ に Nullstellensatz を適用して

(☺ $k = \bar{k}$)

$A[\frac{1}{\gamma}]$ において $(\frac{1}{\gamma}) = A[\frac{1}{\gamma}]$

i.e. $\frac{1}{\gamma} A[\frac{1}{\gamma}] \ni 1$

即ち $\exists a_i \in A$ $\frac{a_1}{\gamma} + \cdots + \frac{a_\ell}{\gamma^\ell} = 1$

$\gamma^\ell - a_1\gamma^{\ell-1} - a_2\gamma^{\ell-2} - \cdots - a_\ell = 0$

γ integral $/A$ Q.E.D.

〔註〕9.1 定理9.1の条件のもとで

θ : integral $\Rightarrow {}^\forall \xi \in X$, $f^{-1}(\xi)$が有限個の点からなる.

(証) Yの点は $\eta_1, \cdots, \eta_m$ の値できまる.

$B \ni \bar{\eta}_i$ $\bar{\eta}_i^\ell + a_1^{(i)}(\bar{x})\,\bar{\eta}_i^{\ell-1} + \cdots + a_\ell^{(i)}(\bar{x}) = 0$

$A \ni \bar{x}_i$ $\bar{x}$ の値がきまれば $\bar{\eta}_i$は有限個の値しか

とり得ない. Q.E.D.

〔註〕9.2 $k = \mathbb{C}$ (complex number)の時は

k^nに metric topology を入れて考えれば 定理9.1の

"universally" は "${}^\forall \xi \in X$ に対して

$f^{-1}(\xi)$は 有限個の点からなる" という条件におきかえる

ことができる.

この section では以下 $k = \mathbb{C}$ として話を進める.

$\mathbb{C}^n$の中に $d(\xi, \xi') = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i - \xi_i'|^2}$ によって距離を入れると

この metric topology は "product" の性質を有する

(Zariski topology との違い)

即ち　$X \subset \mathbb{C}^m$, $Y \subset \mathbb{C}^n$ にinduced topology を入れると.

$(Y \times X$, product topology $)$

$= (Y \times X$, $Y \times X \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+m}$ によるinduced topology $)$

<u>定理 9.2</u>　定理 9.1 の条件に $k = \mathbb{C}$ を付加えた時

θ が integral $\Rightarrow$ $\begin{cases} (1) f \text{ が closed map. (metric topology)} \\ \text{かつ}(2)\ {}^\forall \xi \in X \text{ について } f^{-1}(\xi) \text{ が} \\ \text{有限個の点から成る} \end{cases}$

<u>(註) 9.2</u>　$Y \xrightarrow{f} X$ はtopological space 間の

連続写像とする.

Z を topological space とし

$Y \times Z$, $X \times Z$ に product topology を入れる

仮定: ${}^\forall \xi \in X$ について $f^{-1}(\xi)$ が有限個の点からなる.

この時

f: closed map $\Rightarrow$ $f \times id$ も closed map

(証)　$Y \times Z \supset F$ を任意のclosed set とする時.

$g(F)$: closed を言えばよい.

${}^\forall w = x \times z \in X \times Z - g(F)$ をとり.

$f^{-1}(x) = \{ y_1, \cdots, y_s \}$ とすると

${}^\forall i$ について　$y_i \times z \notin F$

F は product topology による closed set

$\exists \begin{cases} y_i \text{ の open n.b.d. } U_i \\ z \text{ の open n.b.d. } V_i \end{cases}$ s.t. $(U_i \times V_i) \cap F = \phi$

$V = \bigcap_{i=1}^{s} V_i$ とおけば $z \in V$ $f^{-1}(x) \times z \subset U \times V$ でかつ

$U = \bigcup_{i=1}^{s} U_i$ $f^{-1}(x) \subset U$.

$U \times V \cap F = \phi$

$F \subset Y \times Z - U \times V = (Y - U) \times Z \cup Y \times (Z - V)$

$\therefore g(F) \subset f(Y-U) \times Z \cup f(Y) \times (Z - V) = H \not\ni x \times z$

f : closed map より $f(Y-V) \times Z$, $f(Y) \times (Z-V)$ は closed set

$\therefore$ $X \times Z - H$ は open で $\ni x \times z$

しかも $((X \times Z) - H) \cap g(F) = \phi$

$\therefore$ $g(F)$ は closed Q.E.D.

[註] 9.3 metric topology (fibre finite の 条件) では

closed map $\Rightarrow$ universally closed map.

例えば、例 9.2 の f は metric topology では

closed map でない.

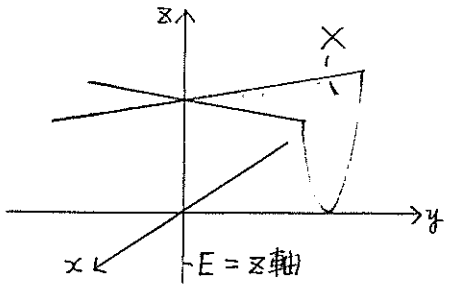
Proposition 9.3 X : algebraic set $\subset \mathbb{C}^n$

U : X の Zariski-open-dense subset

$\Rightarrow$ U : X の metric-open-dense subset

(continuity of algebraic roots)

例 9.3　　$k=\mathbb{R}$ だと Prop. 9.3 は成立しない



X:　$x^2 - zy^2 = 0$

$X - E$: Zariski-open-dense in X

metric-open-dense でない

lemma 9.4　Zariski-closed $\Rightarrow$ metric closed

(多項式は continuous functions)

lemma 9.5　　$\pi : X \longrightarrow Z$,　　$X \subset \mathbb{C}^n$, $Z \in \mathbb{C}^r$,

それぞれ affine algebraic sets

π が integral dependence

$\Rightarrow \pi^{-1}(^\forall \text{bounded} \subset Z)$ は bounded in X

(bounded とは metric topology で言う)

証) $\mathbb{C}^r$ の座標を $x_1, \cdots, x_n$,　$\mathbb{C}^r$ の座標を $u_1, \cdots, u_r$ とする

π は "integral"　　$(x) \to (u)$

$$x_i^{\ell} + h_{1i}(u) \cdot x_i^{\ell-1} + \cdots + h_{\ell i}(u) = 0 \qquad \cdots (1)$$

ただし $h_{ji}(u)$: polynomials of u

$V = (\text{bounded set} \subset Z) \subset \{u \mid {}^\forall i \, |u_i| < N\}$ とすると

$^\exists N_1 \quad {}^\forall u \in V \quad {}^\forall i, j \quad |h_{ij}(u)| < N_1$

$\Rightarrow {}^\exists N_2 > 0 \quad {}^\forall (x) \in \pi^{-1}(V) \quad {}^\forall i \quad |x_i| < N_2$ (∵ (1))

$\therefore \pi^{-1}(V)$: bounded in X

lemma 9.6 (continuity of algebraic roots)

$f(t, x_1, \cdots, x_n)$ は $(n+1)$ − 変数の多項式：

$f = t^{\ell} + f_1(x) t^{\ell-1} + \cdots + f_{\ell}(x) \quad (x \in \mathbb{C}^n)$ だとする.

$f(t, 0) = 0$ の一根を $\alpha \in \mathbb{C}$ とすると

$^{\forall}\varepsilon > 0, \ ^{\exists}\delta > 0$ もし $|z| < \delta$ ならば $(z \in \mathbb{C}^n)$

$f(t, z) = 0$ の根 β で $|\alpha - \beta| < \varepsilon$ なるものがある.

(証) t を $t - \alpha$ でおきかえて $\alpha = 0$ としてもよい.

この時 $f_{\alpha}(0) = 0$

よって $^{\exists}\delta > 0$ s.t. $^{\forall}|z| < \delta \Rightarrow |f_{\ell}(z)| < \varepsilon^{\ell}$

$f(t, z) = 0$ の根を $\beta_1, \cdots, \beta_{\ell}$ とおくと

$f_{\ell}(z) = \pm \beta_1 \cdots \beta_{\ell}$

$|f_{\ell}(z)| = |\beta_1| \cdots |\beta_{\ell}| < \varepsilon^{\ell}$

$\therefore \ ^{\exists} i \quad |\beta_i| < \varepsilon$

(Prop. 9.3 の証明) X は irreducible としてよい

☺ $X = \bigcup_{i=1}^{s} X_i \quad X_i$: irreducible と書ける.

もし $\left\{ \begin{array}{l} U \cap X_i \ : \text{Zariski-open-dense in } X_i \\ \Rightarrow U \cap X_i : \text{metric-open-dense in } X_i \end{array} \right\}$ ならば

$\Rightarrow U = \bigcup_i (U \cap X_i)$ は metric-open-dense in X

X irreducible なら $^{\exists}\pi : X \to \mathbb{C}^r$ s.t.

π は $\begin{cases} \text{integral dependence} \\ \text{surjective} \end{cases}$ (Noether Normalization Th. より)

○ $\pi(U)$ が $\mathbb{C}^r$ の Zariski-open-dense subset を含む

$$\begin{array}{ccl} X & \longleftrightarrow & \text{ring } \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]/I = A \quad I: \text{prime} \\ \downarrow & & \uparrow \\ \mathbb{C}^r & \longleftrightarrow & \text{ring } \mathbb{C}[u_1,\cdots,u_r] = B \quad u_1,\cdots,u_r \text{ 独立変数} \end{array}$$

$A \ni h(x) \neq 0$ s.t. $h|X-U \equiv 0$

h int. $/B$ $\quad h^l + a_1 h^{l-1} + \cdots + a_l = 0 \quad \begin{matrix} a_i \in B \\ a_l \neq 0 \end{matrix}$

$\therefore \quad a_l(u) \neq 0, \quad a_l | \mathbb{C}^r - \pi(U) \equiv 0$

$\therefore \quad \pi(U) \supset V = \{ \zeta \in \mathbb{C}^r \mid a_l(\zeta) \neq 0 \}$ Zariski-open dense

○ V は $\mathbb{C}^r$ の中で metric-open-dense

○ $\forall \zeta \in X$ について $\overline{U}^{(\text{metric})} \ni \zeta$ をいえばよい

$\zeta = \pi(\zeta)$ とおく

$\pi^{-1}(\zeta) = \{ \zeta, \eta_1, \cdots, \eta_s \}$ (互いに相異なる)

$\exists f \in A, \quad f(\zeta) \neq f(\eta_j)$ for all j

$$\begin{array}{ccl} X & & \\ \downarrow \text{int} & & \\ X_0 & \hookrightarrow & \mathbb{C}^{r+1} \\ \downarrow \text{int} & & \\ \mathbb{C}^r & & \end{array} \qquad X_0 = \{ (\pi(\zeta), f(\zeta)) \mid \zeta \in X \}$$

lemma 9.6 により X_0 の点列で U の image 中にあり

$\begin{cases} X \text{ 上での } f \text{ の limit} & \text{が } f(\zeta) \\ \mathbb{C}^r \text{ への proj. の limit} & \text{が } \zeta \end{cases}$ となるものがある.

その点列を image とする X の中の点列をとると

lemma 2. より その subseq.. で convergent なもの ξ^α がある.

$$\pi(\lim \xi^\alpha) = \lim_\alpha \pi(\xi^\alpha) = \xi$$

$$f(\lim \xi^\alpha) = \lim f(\xi^\alpha) = f(\xi)$$

$\Rightarrow \lim \xi^\alpha = \xi$

$\overline{U}^{(\text{metric})} \ni \xi$ Q.E.D

(定理 9.2 の証明) $\Rightarrow$ は明らか.

$\Leftarrow$ を示すには ((1), (2)) $\Rightarrow$ "f が Zariski topology で universally closed" を示せばよい.

ところが $\forall \ell \geq 0$ に対して $f \times id : Y \times k^\ell \to X \times k^\ell$ は

[註] 9.2 により metric topology で closed map.

よって $Y \times k^\ell \supset Z$: $\forall$ Zariski closed set とおくと

$W = \nu((\theta \times id)^{-1}(\mathcal{J}(Z)))$ とおけば

Prop. 8.8 により $W \supset (f \times id)(Z)$ は W の open dense subset

を含む よって Prop. 9.3 により $\overline{f \times id}^{(\text{metric})} = W$

しかるに $(f \times id)(Z)$ は metric closed

$\therefore (f \times id)(Z) = W$ Zariski closed

$\therefore f$ は (Zariski topology で universally closed. Q.E.D.

§10. Projective spaces II

§1 におけるように V を k 上の $(n+1)$-次元の vector space

$\pi : V^* = V - \{0\} \to \mathbb{P}^n$ を canonical map とする.

V の座標系 $(z_0, \cdots, z_r)$ を $\mathbb{P}^n$ の homogeneous coordinate system とする.

この時 $k[z_0, \cdots, z_n]$ を $\mathbb{P}^n$ の homogeneous coordinate ring という.

定義 10.1 ideal $H \subset k[z]$ が homogeneous

$\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ H が homogeneous polynomials で生成されている.

$\Leftrightarrow$ 「$f \in H \Rightarrow f$ の各 homogeneous part $\in H$」

(下の $\Rightarrow$) $H = (h_1, \cdots, h_r)$ h_i: homogeneous polynomial of degree d_i とし

$H \ni f = \sum_{i=0}^{d} f_i$ (f_i: degree i の homogeneous polynomial)

とすると $\sum_{i=0}^{d} f_i = \sum_{j=1}^{r} h_j g_j$ $\quad g_j = \sum_{k=1}^{e_j} g_{jk}$

(g_{jk}: homogeneous polynomial of degree k)

degree i の part を比較して $f_i = \sum h_j g_{jk}$

ただし、和は $d_j - k = i$ なる (j, k) にわたる)

$\therefore$ $f_i \in H$

(下の $\Leftarrow$)　Hの生成元を $h_1, \cdots, h_r$ とし

h_i を homogeneous part h_{ij} にわけると

$H = (h_{ij}, \forall i, \forall j)$　　Q.E.D.

<u>定義 10.2</u>　$\mathbb{P}^n$ の subset A が algebraic (closed)

$\underset{def.}{\Leftrightarrow}$ $k[z] \supset {}^{\exists}H$ homogeneous ideal

$A = \mathcal{P}(H)$ $\left(\underset{def.}{=} \{ \xi \in \mathbb{P}^n \mid f(\xi) = 0 \quad {}^{\forall}f \in H, \text{homogeneous} \} \right)$

〔註 <u>10.1</u>〕　H_1, H_2 を homogeneous ideals とする時

定義より 容易に $H_1 \cdot H_2$, $H_1 + H_2$, $H_1 \cap H_2$ も homogeneous ideals

そして定理 9.1 と同様にして

$$\mathcal{P}(H_1) \cup \mathcal{P}(H_2) = \mathcal{P}(H_1 \cap H_2) = \mathcal{P}(H_1 \cdot H_2)$$

$$\mathcal{P}(H_1) \cap \mathcal{P}(H_2) = \mathcal{P}(H_1 + H_2)$$

〔註 <u>10.2</u>〕　$\mathbb{P}^n$ の任意の有限部分集合は algebraic

(証)　$\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{P}^n$

$M_\xi = (\xi_i z_j - \xi_j z_i,\ 0 \leq i, j \leq n)$ $k[z]$ とおけば

$\{\xi\} = \mathcal{P}(M_\xi)$

よって $\xi_1, \cdots, \xi_s \in \mathbb{P}^n$ に対して

$$\{\xi_1, \cdots, \xi_s\} = \mathcal{P}\left(\bigcap_{i=1}^{s} M_{\xi_i}\right)$$

(註) 10.3 kが有限体の時

$\mathbb{P}^n_k$の任意のsubsetがalgebraic

Proposition 10.1 $\mathbb{P}^n$のXについて

Xがalgebraic $\Leftrightarrow$ $\pi^{-1}(X)\cup\{0\}$ ($\overline{\text{def.}}\ C(X)$)が

$V\cong k^{n+1}$の中でalgebraic.

(註) ($\Rightarrow$) $X=\mathcal{P}(H)$ H: homogeneous ideal に対して

$\pi^{-1}(X)\cup\{0\}=\mathcal{V}(H)$

($\Leftarrow$) kが有限体なら、k^{n+1}についても、$\mathbb{P}^n_k$についても、

その任意のsubsetはalgebraicだから明らか.

従って $\#(k)=\infty$と仮定してよい.

$C(X)$がalgebraic set と仮定すると

$H=\{f\in k[z]\mid f|_{C(X)}\equiv 0\}$ ($\mathcal{V}(H)=C(X)$となる最大のideal)

とおけば、Hがhomogeneous ideal

なぜなら $C(X)$は"$\forall\eta\in C(X)$ $\forall\lambda\in k$に対して$\lambda\cdot\eta\in C(X)$"

という性質をみたす.

$f=\sum f_i\in H$ f_i: homogeneous polynomial of degree i

とすると "..." より $\forall\eta\in C(X)$に対して

$\sum f_i(\eta)\cdot\lambda^i=0$ $\forall\lambda\in k$

$\#(k)=\infty$だから $\forall i$について $f_i(\eta)=0$ $\therefore f_i|_{C(X)}\equiv 0$

$\therefore f_i\in H$ $\therefore H$はhomogeneous $\therefore X=\mathcal{P}(H)$ Q.E.D.

Proposition 10.2 $\quad \mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$

ただし $U_i = \{ \mathfrak{z} \in \mathbb{P}^n \mid \mathfrak{z}_i \neq 0 \}$

$\cong k^n$ (座標系は $\frac{z_0}{z_i}, \cdots, \widehat{\frac{z_i}{z_i}}, \cdots, \frac{z_n}{z_i}$)

① 1つの i を与えて. $U_i \cong k^n$ の中の algebraic subset

X_i をとると $\quad \mathbb{P}^n$ の algebraic set X があって

$X_i = X \cap U_i$

② $X \subset \mathbb{P}^n$ について

X: algebraic in $\mathbb{P}^n \Leftrightarrow {}^\forall i$ について $X \cap U_i$ が $k^n (\cong U_i)$

の中の algebraic set

(証) ① $i=0$ としてよく. $X_0 = \mathcal{V}(J_0)$ とする

J_0 ideal $\subset k[\frac{z_1}{z_0}, \cdots, \frac{z_n}{z_0}]$

$H_0 = \{ h \in k[z]$ homogeneous $\mid h = 0$ or $h \neq 0$ で $\frac{h}{z_0^{\deg h}} \in J_0 \}$

$k[z]$ は homogeneous ideal

従って $\quad \mathcal{P}(H_0) \cap U_0 = X_0$ を示せばよい

そこで ${}^\forall \mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_0 : \mathfrak{z}_1 : \cdots : \mathfrak{z}_n) \in U_0$ (即ち $\mathfrak{z}_0 \neq 0$) をとると

$\mathfrak{z} \in \mathcal{P}(H_0) \Leftrightarrow {}^\forall h \neq 0$ homogeneous $\in k[z]$ s.t. $\frac{h}{z_0^{\deg h}} \in J_0$

について $\quad h(\mathfrak{z}) = 0$

$\mathfrak{z}_1 \neq 0$ だから $\Leftrightarrow {}^\forall h \neq 0$ homogeneous $\in k[z]$ s.t $\frac{h}{z_0^{\deg h}} \in J_0$

について $\quad \left(\frac{h}{z_0^{\deg h}}\right)\left(\frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_0}, \cdots, \frac{\mathfrak{z}_n}{\mathfrak{z}_0}\right) = 0$

$k[\frac{z_1}{z_0}, \cdots, \frac{z_n}{z_0}] \ni {}^\forall f \ (\neq 0)$ は $h = z_0^{\deg f} \cdot f$ によって

$f = \frac{h}{z_0^{\deg h}}$ と表わされるから.

$\Leftrightarrow$ $^\forall f \in J_0$ について $f\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \cdots, \frac{\xi_n}{\xi_0}\right) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\xi \in X_0 = v(J_0)$

② ($\Rightarrow$) $X = \wp(H)$ とすると

$J_i = \left\{ \frac{h}{z_0^{\deg h}} \,\middle|\, H \ni h \neq 0 \text{ homogeneous} \right\}$ $h[z]$ とおけば

$X_i = v(J_i)$

($\Leftarrow$) $X \cap U_i = v(J_i)$ とし

この J_i に対して①のように H_i を定義する.

$H = \sum_{i=0}^{n} z_i H_i$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\wp(H) &= \bigcap_{i=0}^{n} \wp(z_i H_i) \\
&= \bigcap_{i=0}^{n} \left(\wp(H_i) \cup \wp(z_i) \right) \\
&= \bigcap_{i=0}^{n} \left(\wp(H_i) \cup (\mathbb{P}^n - U_i) \right) \\
&= \bigcap_{i=0}^{n} \left((\wp(H_i) \cap U_i) \cup (\mathbb{P}^n - U_i) \right) \\
&= \bigcap_{i=0}^{n} \left((X \cap U_i) \cup (\mathbb{P}^n - U_i) \right) \\
&= \bigcap_{i=0}^{n} \left(X \cup (\mathbb{P}^n - U_i) \right) \\
&= X \cup \left(\bigcap_{i=0}^{n} (\mathbb{P}^n - U_i) \right) \\
&= X
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

<u>定義 10.3</u> V を vector space とすると.

$V \supset Y$ が algebraic cone

$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $Y = v(H)$ H ; homogeneous ideal

定義 10.3 の系　$\{\mathbb{P}^n$ の中の algebraic sets $\} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \{V$ の中の algebraic cones$\}$ なる一対一対応がある.

[註] 10.4　$\rightarrow$ の対応　$Y = \mathcal{V}(H) \overset{\alpha}{\longmapsto} \pi(Y - (0)) = \mathcal{P}(H)$

$\leftarrow$ の対応　$X = \mathcal{P}(H) \overset{\beta}{\longmapsto} \pi^{-1}(X) \cup \{0\} = \mathcal{V}(H)$

定理 10.3　(Hilbert's Nullstellensatz)　$k = \bar{k}$ の時

$k[z] \supset H_1, H_2$: homogeneous ideals　に対して

$\mathcal{P}(H_1) = \mathcal{P}(H_2) \Leftrightarrow \exists l > 0 \ (z_1, \cdots, z_n)^l H_1^l \subset H_2,$

$(z_0, \cdots, z_n)^l H_2^l \subset H_1$

[註] 10.5　$(z_0, \cdots, z_n)$ の部分は省けない

$H_1 = (1)$,　$H_2 = (z_0, \cdots, z_n)$ とおくと $\mathcal{P}(H_1) = \mathcal{P}(H_2) = \phi$

(証)　H: homogeneous ideal $\subset k[z]$, h: homogeneous polynomial $\in k[z]$ として　$h|_{\mathcal{P}(H)} \equiv 0 \Rightarrow \exists l \ (z_1, \cdots, z_n)^l h^l \in H$

を示せばよい.

$\forall i$ について　Prop. 10.2 の ② の (⇒) の証明のように

J_i を定義すると　$f \neq 0$ としてよいから

$$\frac{h}{z_i^{\deg h}}\Big|_{\mathcal{V}(J_i)} \equiv 0$$

affine の場合の Nullstellensatz (定理 8.7) より

$$\frac{h}{z_i^{\deg h}} \in \sqrt{J_i}$$

$\therefore \exists m_i > 0 \quad z_i^{m_i} h^{m_i} \in H$　(J_i の定義から明らか)

$l = \sum_{i=0}^{n} (m_i - 1) + 1$ とおけば　$(z_0, \cdots, z_n)^l h^l \in H$

Q. E. D.

定理 10.4　k：体　$k[z] = k[z_0, \cdots, z_n]$

H: homogeneous ideal in $k[z]$ とすると

$H = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$　shortest primary decomposition

$\mathfrak{p}_i$: ass.prime of $\mathfrak{q}_i$

$\forall i$　$\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$　homogeneous　なる分解が存在する.

(定理5.1 参照)

例 10.1　"どのような shortest primary decomposition

についても　$\mathfrak{q}_i$ が homogeneous　になる"

のではない.

$k[z_0, z_1]$ において

$$H = z_0(z_0, z_1) = (z_0^2, z_0 z_1)$$

$$= (z_0) \cap (z_0^2, z_1)$$

$$= (z_0) \cap (z_0^2, z_0 z_1, z_0 + z_1^N)$$

$$1 < N \in \mathbb{N}$$

$(z_0^2, z_0 z_1, z_0 + z_1^N)$ は non-homogeneous

(証) ① $(z_0) \cap (z_0^2, z_1) \subset (z_0^2, z_0 z_1)$

② $(z_0) \cap (z_0^2, z_0 z_1, z_0 + z_1^N) \subset (z_0^2, z_0 z_1)$

を示せば　$I = (z_0^2, z_0 z_1, z_0 + z_1^N)$, (z_0^2, z_1) が

(z_0, z_1) - primary であることは

$z_1^{2N} = (z_0 + z_1^N)^2 - z_0^2 - 2 \cdot z_0 z_1 \cdot z_1^{2N-1} \in I$ より

lemma 5.2 を用いればよい.

②は　$h = z_0^2 h_1 + z_0 z_1 h_2 + (z_0 + z_1^N) h_3 \in (z_0)$

$h_i \in k[z_0, z_1]$ とすると

$z_1^N h_3 \in (z_0)$　　$\therefore h_3 \in (z_0) : (z_1^N) = (z_0)$

$\therefore h_3 = z_0 h_4$ とおくと　$(h_4 \in k[z_0, z_1])$

$h = z_0^2 (h_1 + h_4) + z_0 z_1 (h_2 + z_1^{N-1} h_3) \in H$

①も同様　　Q.E.D.

正確に言うと

<u>定理10.4</u>　① $\forall i$　P_i : homogeneous

② minimal prime に対する $\mathfrak{q}_i$ は homogeneous.

③ すべての $\mathfrak{q}_i$ が homogeneous であるような分解がとれる.

（これにより、projective space の中の algebraic set の irreducible variety への分解が保証される.
定理5.10 参照）

（③の証明）定理5.1の(1)の証明を修正すれば、そのまま③の証明になる。詳しくいうと、"ideal" を "homogeneous ideal" に、"element" を "homogeneous element" に変えればよい.

ただし "homogeneous ideal J が indecomposable"

というのは "$J = J_1 \cap J_2$, J_1, J_2 は homogeneous $\Rightarrow$ $J = J_1$ or $J = J_2$" と定義する.

この時 次の2点に注意すれば、③の証明になっている

ことがわかる.

[註] 10.6 homogeneous ideals H_1, H_2 について

$H_1 \cap H_2,\ H_1 + H_2,\ H_1 \cdot H_2,\ H_1 : H_2,\ \sqrt{H_1}$ がすべて homogeneous.

[註] 10.7 $k[\underline{x}] \supset J$ homogeneous ideal が primary でないならば $\exists f, g$ homogeneous elements. s.t.

$fg \in J,\ g \notin J,\ {}^\forall n \in \mathbb{N}\ f^n \notin J$

(即ち "${}^\forall f, g$ homogeneous elements について $fg \in J$, $g \notin J$ なら ${}^\exists n \in \mathbb{N}\ f^n \in J$" が成立すれば. J は primary ideal.)

(註) "…" を仮定して J が primary であることを示す.

$f = \sum_{i=0}^{d} f_i,\ g = \sum_{i=a}^{b} g_i + \tilde{g}$ (f_i, g_i は deg i の homogeneous polynomial $g_a \notin J,\ g_b \notin J,\ \tilde{g} \in J$) とおいて. $(b-a)$ についての induction で示す.

$b-a=0$ なら fg を homogeneous part にわけることによって $g_a \notin J$, ${}^\forall i\ f_i g_a \in J$ よって仮定より $f_i \in \sqrt{J}$ $\therefore f \in \sqrt{J}$

$b-a>0$ とする ${}^\exists i\ f_i g \notin J$ としてよい. なぜなら ${}^\forall i\ f_i g = 0$ なら $b-a=0$ の場合と同様に ${}^\forall i$ について $f_i \in \sqrt{J}$ が言えるから.

さて、$f_i g \notin J$ となる i のうちで最大のものを i_0 とおき、$g' = f_{i_0} g$ とおくと $fg' \in J$, $g' \notin J$ しかも、

$f\cdot g$ の (i_1+b) 次の homogeneous part を調べて．

$f_i \circ g_b \in J$．よって g' を g と同様に $g' = \sum_{i=a'}^{b'} g_i' + g''$

とおくと $b-a > b'-a'$ 故に induction の仮定より

$f \in \sqrt{J}$ Q.E.D.

(①,②の証明) ①は $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ と [註] 10.6 より明らか．

②は③および定理5.1の3)より明らか

Q.E.D.

例 10.2 (intersection theory)

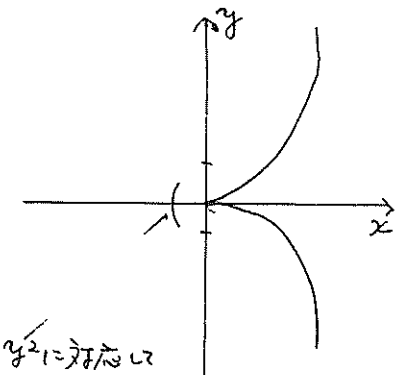
$X : y^2 - x^3 = 0 \ /\mathbb{C}$

$Y : \ x = 0$

原点 $= X \cap Y = v((y^2-x^3, x))$

$= v((x, y^2)\mathbb{C}[x,y])$

intersection number = 2



$Y' : y = 0$ とすると

原点 $= X \cap Y' = v((y^2-x^3, y))$

$= v((y, x^3)\mathbb{C}[x,y])$

y^2 に対応して長さ2の infinitesimal (jet)

intersection number $= 3$

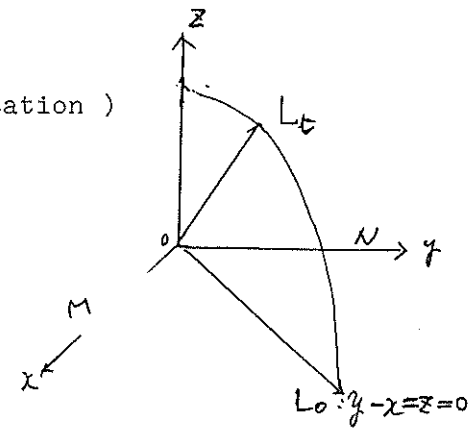
例 10.3 (deformation or specialization)

3次元 (x, y, z)

$L_t : y - x = z - ty = 0$

$t=0$ のとき $L_0 : y - x = z = 0$

x-axis : $M \ (y = z = 0)$



y-axis : N $(z=x=0)$

次のような X を任意に考える.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^3\times\mathbb{C} & X \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "\pi"] \\ \mathbb{C}\ni t & \end{tikzcd}$$

projection

$\forall t\,(\neq 0)$ について $\pi^{-1}(t)=(M\cup N\cup L_t)\times t$

これをみたす X は $\{t\neq 0\}$ で最小のものとして unique に定まる.

すなわち $\pi^{-1}(0)$ を最小にする X によってきまる ideal

$\mathbb{C}[x,y,z,t]\supset H$ をとるとき $t=0$ とおいてできる H_0 は

$H_0=(H+(t))/(t)\hookrightarrow\mathbb{C}[x,y,z]$ である.

$V(H_0)=M\cup N\cup L_0$

しかし. H_0 は $M\cup N\cup L_0$ の ideal ではない.

実際 $H=(z,y)\cap(x,z)\cap(y-x,\ z-ty)$ in $\mathbb{C}[x,y,z,t]$

$=(z(x-y),\ z(z-ty),\ x(z-ty),\ xy(x-y),\ y(z-tx))$ (*)

$t=0$ として

$H_0=(xz,\ yz,\ z^2,\ xy(x-y))\,\mathbb{C}[x,y,z]$

$=(x,z)\cap(z,y)\cap(z,x-y)\cap(x,y,z^2)$

(**) primary decomposition

(右辺の (x,z) 等が順に N, M, L_0, imbedded component に対応する)

(*) の証明 $h\in H\Rightarrow h=f\cdot(y-x)+g(z-ty)\subset(z,y)\cap(x,z)$

$h\in(z,y)\Leftrightarrow f\cdot x\in(z,y)\Leftrightarrow f\in(z,y):(x)=(z,y)$

$\Leftrightarrow \quad f = f_1 z + f_2 y \qquad {}^{\exists} f_1, f_2 \in \mathbb{C}[x, y, z, t]$

$h \in (x, z) \Leftrightarrow \quad f_2 y (y - x) - g t y \in (x, z)$

$\Leftrightarrow \quad f_2 y - g t \in (x, z) \quad (\because \ (x, z) : (y) = (x, z))$

$g t \in (x, y, z)$ だから $\quad g \in (x, y, z) : (t) = (x, y, z)$

$g = g_1 x + g_2 y + g_3 z$ とおくと

$\Leftrightarrow \quad y (f_2 - g_2 t) \in (x, z)$

$\Leftrightarrow \quad f_2 - g_2 t \in (x, z) \quad (\because (x, z) : (y) = (x, z))$

$\Leftrightarrow \quad f_2 = g_2 t + f_3 x + f_4 z \quad {}^{\exists} f_3, f_4 \in \mathbb{C}[x, y, z, t]$

$\therefore \ h \in H \ \Leftrightarrow \ h = f_1 z (y - x) + f_3 x y (y - x) + f_4 y z (y - x)$

$+ \ g_1 x (z - t y) + g_2 y (z - t x) + g_3 z (z - t y)$

$\exists \ f_1, f_3, f_4, g_1, g_2, g_3$

$\therefore \ H = (z(x-y), z(z - ty), x(z - ty), xy(x-y), y(z - tx))$

(**) の証明 $\qquad h \in (x, z) \cap (z, y) \cap (z, x - y) \cap (x, y, z^2)$

$\Leftrightarrow \ h = ax + by + cz^2 \in (x, z) \cap (z, y) \cap (z, x - y)$

$h \in (x, z) \Longleftrightarrow b y \in (z, x) \Leftrightarrow b \in (z, x) : (y) = (z, x)$

$h \in (z, y) \Longleftrightarrow a x \in (z, y) \Leftrightarrow a \in (z, y) : (x) = (z, y)$

従って 改めて $\quad h = axz + bxy + cyz + dz^2 \in (z, x - y)$

$\Longleftrightarrow h \in (x, z) \cap (z, y) \cap (z, x - y) \cap (x, y, z^2)$

$h \in (z, x - y) \Longleftrightarrow b x y \in (z, x - y) \Leftrightarrow b \in (z, x - y) : (xy)$

$= (z, x - y)$

$\therefore \ (x, z) \cap (z, y) \cap (z, x - y) \cap (x, y, z^2) = (xz, yz, z^2, xy(x - y))$

Q.E.D.

例 10.4 (tangent cones)

$0 \in X \hookrightarrow \mathbb{C}^N \qquad (z_1, \cdots, z_N)$: coordinate system

$\exists U$: n.b.d. of 0 s.t. $X \cap U$ は 0 に contractible

正確には、tangent cone なるものを導入して、それで $X \cap U$ を近似することになる。

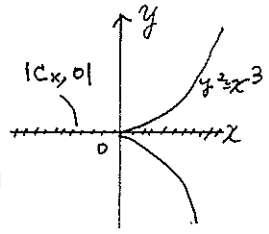
定義 10.4. (tangent cones)

set-theoretic definition : $|C_{X,0}| = \bigcup \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} (L_{\overrightarrow{0x}})$

ただし $L_{\overrightarrow{0x}}$ は原点を含む x 方向への半直線を表わし、

limit $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}$ は適当な部分列での limit とする。

(Cf. 右の図で逆方向の半直線も入る)



ideal-theoretic definition : $|C_{X,0}| = V(H)$

ただし、H は次のように定義される homogeneous ideal である。

$f(z)$ を $f|_X \equiv 0$ なる polynomial とする。

$f \neq 0$ なら $f = \sum_{i \geq 0} f_{d+i}$ f_{d+i} は degree $(d+i)$ の homogeneous polynomial, $f_d \neq 0$ と表わせる。この時 f_d を f の leading form という。(0 の leading form は 0 とする)

すると、$H = \{ f \text{ の leading form} \mid f \in I(X) \} \subset \mathbb{C}[z]$

Chapter 2

§1. Sheaves と cohomology

この section についての詳しい事は Godement [1] を参照。

X を topological space とした時。

top(X) を 'X の open sets と、その inclusions が作る category' と定義する。正確に言うと、

$$\mathfrak{ob}[\mathrm{top}(X)] = \{X \text{ の open sets}\}$$

$\mathfrak{ob}[\mathrm{top}(X)] \ni U_1, U_2$ に対して

$$\mathrm{Hom}(U_1, U_2) = \begin{cases} \text{if } U_1 \not\subset U_2 & \phi \\ \text{if } U_1 \subset U_2 & U_1 \hookrightarrow U_2 \text{ なる inclusion map.} \end{cases}$$

そして、morphisms の結合は普通の意味の map の結合とする。

top (X)の base とは、$\mathfrak{ob}[\mathrm{top}(X)]$ の subset Φ で、次の条件をみたすものである。 条件：$^\forall x \in X$, $^\forall$open set $U \ni x$ に対して、$^\exists V$ open set $\in \Phi$ s.t. $x \in V \subset U$ 。

X 上の presheaf とは、top(X) の 1 つの base Φ から、ある category $\mathcal{C}$ への contravariant functor の事である。

$\mathcal{C}$ としては、次のようなものを考える。sets, groups, rings, modules の category。ただし、modules の category $\mathcal{M}$ とは、objects としては (A, M) (A は ring, M は A-module) の pair を考え、morphism : $(A, M) \longrightarrow (A', M')$ とは (θ, α) の pair の事とする。

ここに、 θ は $A \longrightarrow A'$ なる ring homomorphism.

α は $M \longrightarrow M'$ への group homomorphism で

$$\begin{tikzcd} A \times M \arrow[r, "\theta\times\alpha"'] \arrow[d, "\text{スカラー倍}"'] & A' \times M' \arrow[d, "\text{スカラー倍}"] \\ M \arrow[r, "\alpha"'] & M' \end{tikzcd}$$

なる diagram を可換にするものとする,

$\mathfrak{F}$ が presheaf on base Φ of top(X)であることを言い換えると、次のようになる。

1) $\Phi \ni {}^{\forall}U \longmapsto \mathfrak{F}(U) \in ob(\mathcal{C})$

2) $\Phi \ni U, V \quad U \hookrightarrow V$ (inclusion) に対して

$\mathrm{res}_U^V : \mathfrak{F}(V) \longrightarrow \mathfrak{F}(U)$ $\mathcal{C}$ の morphism

3) (functor の条件) $U \subset V \subset W \quad U, V, W \in \Phi$ に対して

$\mathrm{res}_U^V \circ \mathrm{res}_V^W = \mathrm{res}_U^W$

$\mathrm{res}_U^U = \mathrm{id}_{\mathfrak{F}(U)}$

[註] 1.1 $\mathcal{C}$ が、上に述べた category のように、inductive limit をもつ category ならば、Φ 上の presheaf $\mathfrak{F}$ に対して X の各点、x での stalk $\mathfrak{F}_x$ が次の様に定義できる。

$$\mathfrak{F}_x \overset{\text{def.}}{=\!=} \lim_{x \in U \in \Phi} \mathfrak{F}(U)$$

定義 1.1 $\mathfrak{F}$ presheaf on Φ が sheaf であるとは、次の2条件が成立することである。

(1) $\Phi = \mathrm{top}(X)$

(2) ${}^{\forall}U$: open, $U = \bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha$ V_α : open に対して

$$\mathfrak{F}(U) \xhookrightarrow[k]{} \prod_{\gamma\in I}\mathfrak{F}(V_\gamma) \underset{j}{\overset{i}{\rightrightarrows}} \prod_{(\alpha,\beta)\in I\times I}\mathfrak{F}(V_\alpha\cap V_\beta) \quad (*)$$

ただし、i は $\prod_{\gamma\in I}\mathfrak{F}(V_\gamma)$ の各α-成分を $\prod_{(\alpha,\beta)}\mathfrak{F}(V_\alpha\cap V_\beta)$ の (α,β)-成分（β は任意、）に

$\mathrm{res}^{V_\alpha}_{V_\alpha\cap V_\beta} : \mathfrak{F}(V_\alpha) \longrightarrow \mathfrak{F}(V_\alpha\cap V_\beta)$ によって写す map.

j は $\prod_{\gamma\in I}\mathfrak{F}(V_\gamma)$ の各β-成分を $\prod_{(\alpha,\beta)}\mathfrak{F}(V_\alpha\cap V_\beta)$ の $({}^{\forall}\alpha,\beta)$-成分に

$\mathrm{res}^{V_\beta}_{V_\alpha\cap V_\beta} : \mathfrak{F}(V_\beta) \longrightarrow \mathfrak{F}(V_\alpha\cap V_\beta)$ によって写す map.

k はそのγ-成分が $\mathrm{res}^{U}_{V_\gamma} : \mathfrak{F}(U) \longrightarrow \mathfrak{F}(V_\gamma)$ なる map. である，

条件： この sequence が exact.

［註］1.2 diagram(*)が exact とは、次の2条件が成立することである。

1) k : injective

2) $\xi \in \prod_{\gamma}\mathfrak{F}(V_\gamma)$ について

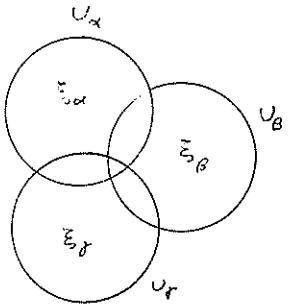
$$i(\xi) = j(\xi) \Longleftrightarrow {}^{\exists}\eta \in \mathfrak{F}(U) \qquad k(\eta) = \xi$$

［註］1.3 $\mathcal{C}$ が set の category の時には、1), 2) は次のように言いかえられる。

① identity condition : $U = \bigcup_{\alpha} V_\alpha$ U, V_α open とし、$\mathfrak{F}(U)$ の2元 ξ,ξ' が ${}^{\forall}\alpha$ について $\mathrm{res}^{U}_{V_\alpha}(\xi) = \mathrm{res}^{U}_{V_\alpha}(\xi')$

ならば　$\xi = \xi'$.

② gluability condition :



$U = \bigcup_\alpha V_\alpha$　　U, V_α open sets

に対して　$\mathcal{F}(V_\alpha) \ni \xi_\alpha$　が

条件「$\forall \alpha, \beta$ に対して、

$\mathrm{res}^{V_\alpha}_{V_\alpha \cap V_\beta}(\xi_\alpha) = \mathrm{res}^{V_\beta}_{V_\alpha \cap V_\beta}(\xi_\beta)$」

を満たせば

$\Longrightarrow \exists \xi \in \mathcal{F}(U)$ s.t. $\forall \alpha$ について $\xi_\alpha = \mathrm{res}^{U}_{V_\alpha}(\xi)$

rough に言って、①は、$\mathcal{F}(U)$の元が、localな data によって決定されることを意味し、

②は、$\mathcal{F}(U)$の元であるということが localな性質で特徴づけられている。

ということにほかならない。

<u>例 1.1</u>　X を topological space とし、$K = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$とし、K°_X を次のような presheaf とする。

$$\Phi \ni U \longmapsto K = K^\circ_X(U)$$

$$\mathrm{res}^{U}_{V} = id_K$$

この K°_X は（一般には sheaf ではなく）presheaf である。例えば、$X = \mathbb{R}$ に普通の topologyを入れると、K°_X は sheafでない。K°_X は identity condition は満足するが、gluability conditionは満足しない。

$K \ni a, b$ $(a \neq b)$ をとると $K_x^0((0,1)) \ni a$, $K_x^0((2,3)) \ni b$ は $(0,1) \cup (2,3)$ 上に拡張できない。（即ち、function が constant であるというのは local な性質でない！）

<u>例 1.2</u>　$X = \mathbb{C}^m$ の上で $\mathcal{F}$ を次のような presheaf とする。

$$\text{open set } U \text{ について } \mathcal{F}(U) = \begin{cases} U\text{上の } \mathbb{C}\text{-valued function} \\ \text{又は } U\text{上の continuous } \mathbb{C}\text{-valued functions.} \\ \text{又は } U\text{上の } C^\infty\ \mathbb{C}\text{-valued functions.} \\ \text{又は } U\text{上の holomorphic functions.} \end{cases}$$

res = functions の restriction とすると

実際 $\mathcal{F}$ は sheaf になる。（function が continuous, C^∞ holomorphic などというのは local な性質！）

<u>例 1.3</u>　$^\forall\mathcal{F}$ presheaf on Φ に対して、$\mathcal{F}$ の discontinuity sheaf $[\mathcal{F}]$ (sheaf of discontinuity sections)を次のように定義する。

open set U に対して $[\mathcal{F}](U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$ とし、

open sets $U \supset V$ に対して res^U_V を $\prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$ から $\prod_{x \in V} \mathcal{F}_x$ への natural な projection と定義すると、$[\mathcal{F}]$ は sheaf になる。（連続性を全く考慮していないから貼りあわせるのに何の障害もない！）

<u>定義 1.2</u>　$\Phi = \mathrm{top}(X)$ の場合、presheaves $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ に対して

morphism $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ とは、$^\forall U$ open に対して、$\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ なる $\mathcal{C}$ の map を与え、それらが

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha(U)"] \arrow[d, "res^U_V"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "res^U_V"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha(V)"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

左の diagram を可換にするようなもののことである。

[註] 1.4　このように定義した morphisms によって {X 上の presheaves} は category をなし、$\mathcal{C}$ が abelian category（例えば、abelian groups の category）の時 {X 上の presheaves} も abelian category になる。

$\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ に対して

$$[\mathrm{Ker}(\alpha)](U) = \mathrm{Ker}[\alpha(U)],$$

$$[\mathrm{Coker}(\alpha)](U) = \mathrm{Coker}[\alpha(U)]$$ とおき、

res は $U \supset V$ について、下の diagram が可換になるように定める。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}[\alpha(U)] \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d, "res"] & \mathcal{G}(U) \arrow[r] \arrow[d, "res"] & \mathrm{Coker}[\alpha(U)] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}[\alpha(V)] \arrow[r] & \mathcal{F}(V) \arrow[r] & \mathcal{G}(V) \arrow[r] & \mathrm{Coker}[\alpha(V)] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

これにより $\mathrm{Ker}(\alpha)$, $\mathrm{Coker}(\alpha)$ は sheaves になる。

また、sequence $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ が presheaf-exact であるとは、$^\forall U$ open set について

$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha(U)} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta(U)} \mathcal{H}(U)$ が exact になることが必要十分になる。（cf. Godement p16～p18）

〔註〕1.5 (1) もし $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ が共に sheaf ならば $\mathrm{Ker}(\alpha)$ も sheaf になる。

(2) たとえ $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ が共に sheaf であっても $\mathrm{Coker}(\alpha)$ は sheaf になるとはかぎらない。

（(1)の証明） exercise.

例 1.4 $\mathbb{R} \supset X = [0, 1]$ に普通の topology を入れる。X 上の sheaf $\mathbb{Z}_X$ を次のように定義する。$\mathbb{Z}$ にあらかじめ discrete topology を入れておき、$X \supset U$ open set に対して

$$\mathbb{Z}_X(U) = \left\{ \begin{array}{l} s : U \to \mathbb{Z} \text{ なる continuous functions} \\ \text{即ち } \forall x \in U \text{ について } \exists\, V \text{ open } x \in V \subset U \\ \text{s.t. } s|_V \text{ は constant} \end{array} \right\}$$

res は functions の restriction と定義すると、$\mathbb{Z}_X$ は実際に sheaf になる。

同様に $\mathbb{Z}_{(0,1)}$ を次のように定義する。

open set U について

$$\mathbb{Z}_{(0,1)}(U) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Z}_X(U) \text{ の元 } s \text{ で、もし } 0 \in U \text{ なら} \\ s(0) = 0,\ \text{もし } 1 \in U \text{ なら } s(1) = 0. \\ \text{なる条件を満足するもの} \end{array} \right\}$$

res は functions の restriction と定義して sheaf $\mathbb{Z}_{(0,1)}$

を得る。

canonical な inclusion map $\alpha : \mathbb{Z}_{(0,1)} \longrightarrow \mathbb{Z}_X$ について

$\mathrm{coker}(\alpha)$ は sheaf でない。

$$0 \to \mathbb{Z}_{(0,1)} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_X \xrightarrow{\beta} \mathrm{coker}(\alpha) \to 0$$

$U_1 = [0, \frac{2}{3})$, $U_2 = (\frac{1}{3}, 1]$ とすると $U_1 \cup U_2 = X$

$[\mathrm{coker}(\alpha)](U_1) \ni \beta(U_1)(S_1)$ ここに S_1 は $\forall x \in U_1$

について $S_1(x) = 0$ なる map.

$[\mathrm{coker}(\alpha)](U_2) \ni \beta(U_2)(S_2)$ ここに S_2 は $\forall x \in U_2$

について $S_2(x) = 1$ なる map.

すると $\mathrm{res}^{U_1}_{V_1 \cap V_2}(\beta(U_1)(S_1)) = \mathrm{res}^{U_2}_{U_1 \cap U_2}(\beta(U_2)(S_2))$

しかるに $\beta(U_1)(S_1)$, $\beta(U_2)(S_2)$ の system は X 上の section には拡張できない。（$\beta(X)$ の元 t については $t(0) = t(1)$ だから。）

<u>gluability condition が成立しない</u>から $\mathrm{coker}(\alpha)$ は sheaf でない。

<u>例 1.5</u> $X = \mathbb{C}^2 - (0)$ に Zariski topology を入れる。

ring の sheaf $\mathcal{O}_X$ を次のように定義する。open set U について

$$\mathcal{O}_X(U) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}^2 \text{上の rational function で } U \text{ の どの} \\ \text{点も pole になっていないもの.} \end{array} \right\}$$

res は functions の restriction として sheaf $\mathcal{O}_X$ を得る。

$\mathbb{C}^2$の座標系を (z_1, z_2) とする時

$$0 \longrightarrow (z_1)\mathcal{O}_X \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\beta} \mathrm{Coker}(\alpha) \longrightarrow 0$$

について $\mathrm{coker}(\alpha)$ は sheaf でない。gluability condition が成立しない。

つまり、$U_1 = X - \{z_1 = 0\}$, $U_2 = X - \{z_2 = 0\}$ とおく時、

$$[\mathrm{coker}(\alpha)](U_2) \ni \beta(U_2)\left(\frac{1}{z_2}\right) \qquad [\mathrm{coker}(\alpha)](U_1) = (0) \ni 0$$

について、gluability condition が成立するなら、

$\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}[z_1, z_2] \ni {}^{\exists}f(z_1, z_2)$ s.t. $\mathrm{res}^X_{U_2}(\beta(f)) = \beta(U_2)\left(\frac{1}{z_2}\right)$

とならなければならない。

つまり ring $\mathcal{O}_X(U_2) = \mathbb{C}[z_1, z_2, \frac{1}{z_2}]$ の中で

$f - \frac{1}{z_2} \in (z_1)$ しかし、これは不可能 Q.E.D.

sheaf - exact を定義する前にまず "sheafification" を定義する。

<u>定義 1.3</u> (sheafification)

Φ 上の presheaf $\mathcal{F}$ に対して、$\mathcal{F}$ の sheafification とは X 上の sheaf $\tilde{\mathcal{F}}$ と presheaf の map $\lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}|\Phi$ の pair で、次の universal mapping property を満たすものである。

universal mapping property : ${}^{\forall}$sheaf $\mathcal{G}$ on X と presheaf の map $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}|\Phi$ について ${}^{\exists}{}_1$ sheaf の

map $f : \tilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{G}$ s.t. $\mu = f|_{\Phi} \circ \lambda$

$\mathcal{F}$ を set valued の presheaf とする時、canonical sheafification が次のように定義される。$\mathcal{F}$ をpresheaf on Φ とし、$\varphi : \mathcal{F} \to [\mathcal{F}]|_{\Phi}$ を $\Phi \ni {}^{\forall}U \ni x$ に対して canonicalな map $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$ によってきまる map $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi(U)} \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x = [\mathcal{F}](U)$ とする。この時、$[\mathcal{F}]$ の subsheaf $\tilde{\mathcal{F}}$ を次のように定義する。${}^{\forall}U$ open set について

$$\tilde{\mathcal{F}}(U) = \left\{ \xi \in [\mathcal{F}](U) \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^{\forall}x \in U \text{ に対して } x \in {}^{\exists}V \in \Phi, \\ {}^{\exists}\eta \in \mathcal{F}(V) \text{ s.t. } res_V^U(\xi) = \varphi(V)(\eta) \end{array} \right\}$$

res は $[\mathcal{F}]$ の res によって定義する。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr] \arrow[dr, "\lambda"'] & & {[\mathcal{F}]|_{\Phi}} \\ & \tilde{\mathcal{F}}|_{\Phi} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

すると、$\tilde{\mathcal{F}}$ は実際 sheaf になり、右の diagram によって定義される λ によって $(\tilde{\mathcal{F}}, \lambda)$ が $\mathcal{F}$ の sheafification になる。(c.f. Godement [1] p110〜p112)

〔註〕 1.6 $\tilde{\mathcal{F}}$ の作り方から容易にわかるように、${}^{\forall}x \in X$ について $\mathcal{F}_x \xrightarrow[\approx]{\lambda_x} \tilde{\mathcal{F}}_x$ である。

定義 1.4 (sheaf-exact sequence)

$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ を abelian groups の sheaves として $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ なる sequence が sheaf-exact であるとは、次の2条件が成立することである。

(1) $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ が presheaf-exact

(2) $\mathcal{H}$ が $\mathrm{coker}(\alpha)$ の sheafification と natural に isomorphic

即ち、

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{coker}(\alpha) \arrow[r] & 0 \\ & & \mathcal{H} & (\mathrm{coker}(\alpha)\text{ の sheafification}) \arrow[l, "\approx"'] & \end{tikzcd}$$

なる diagram が可換。

[註] <u>1.7</u> $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ を sheaves とする時 sequence $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ が与えられている時、これが sheaf-exact であるためには、$^\forall x \in X$ について、$0 \to \mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x \to 0$ が exact であることが必要十分

(証) (必要性) 定義 1.4 の条件 (1), (2) の inductive limit として $X \ni {}^\forall x$ について

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F}_x \arrow[r, "\alpha_x"] & \mathcal{G}_x \arrow[r] \arrow[d, "\beta_x"'] & {[\mathrm{coker}(\alpha)]_x} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & & \mathcal{H}_x & (\mathrm{coker}(\alpha)\text{ の sheafification})_x \arrow[l, "\approx"'] & \end{tikzcd}$$

この行が exact

[註] 1.6 より $0 \to \mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x \to 0$ は exact

(十分性) $^\forall U$ open set に対して $0 \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha(U)} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta(U)} \mathcal{H}(U)$ が exact であることを示す。

① $\alpha(U)$ が injective であること。$\mathcal{F}(U) \ni {}^\forall \xi$ につ

いて、$\alpha(U)(\xi)=0$ とすると、$0\to\mathcal{F}_x\xrightarrow{\alpha_x}\mathcal{G}_x$ が exactであるから $^\forall x\in U$ について $\xi_x=0$

$\therefore$ $x\overset{\exists}{\in}V_x$ open $\subset U$ s.t. $res^U_{V_x}(\xi)=0$, $\bigcup_x V_x=U$

従って identity condition より $\xi=0$

② $\beta(U)\cdot\alpha(U)$ がnull map であること。$\mathcal{F}(U)\ni{}^\forall\xi$ について $[\beta(U)\circ\alpha(U)(\xi)]_x=\beta_x\cdot\alpha_x\xi_x=0$.

よって、①と同様にして $\beta(U)\cdot\alpha(U)(\xi)=0$

③ $\mathrm{Ker}\,\beta(U)\subset\mathrm{Im}\,\alpha(U)$ であること。$\mathrm{Ker}\,\beta(U)\ni\xi$ について $\mathrm{Ker}\,\beta_x\ni\xi_x$ $(^\forall x\in U)$ $0\to\mathcal{F}_x\xrightarrow{\alpha_x}\mathcal{G}_x\xrightarrow{\beta_x}\mathcal{H}_x$ が exact だから $x\overset{\exists}{\in}V_x$ open $\subset U$,

$\mathcal{F}_x(V_x)\ni{}^\exists\eta_{V_x}$ s.t. $\xi_x=\alpha_x((\eta_{V_x})_x)=[\alpha(V_x)(\eta_{V_x})]_x$

よって $x\in{}^\exists W_x$ open $\subset V_x$

$res^U_{W_x}\xi=res^{V_x}_{W_x}[\alpha(V_x)(\eta_{V_x})]=\alpha(W_x)(res^{V_x}_{W_x}\eta_{V_x})$

$res^{V_x}_{W_x}\eta_{V_x}$ を η_{W_x} とおくと、$res^U_{W_x}\xi=\alpha(W_x)(\eta_{W_x})$ (*)

まず、$\exists\eta\in\mathcal{F}(U)$ s.t. $res^U_{W_x}\eta=\eta_{W_x}$ を示すためには、gluability condition により、$W_x\cap W_{x'}\neq\phi$ なる x,x' については $res^{W_x}_{W_x\cap W_{x'}}(\eta_{W_x})=res^{W_{x'}}_{W_x\cap W_{x'}}(\eta_{W_{x'}})$ を示せばよいが、それには①と同様にして $W_x\cap W_{x'}$ 内の任意の x'' について $(\eta_{W_x})_{x''}=(\eta_{W_{x'}})_{x''}$ を言えばよい、それは (*) および $0\to\mathcal{F}_{x''}\to\mathcal{G}_{x''}$ が exact であることより明らか、

この η について $\alpha(U)(\eta)=\xi$ を示せばよいが $\forall x$ について $res^{U}_{W_x}(\alpha(U)(\eta)) = \alpha(W_x)(res^{U}_{W_x}(\eta)) = \alpha(W_x)(\eta_{W_x})$ $= res^{U}_{W_x}\xi$ よって identity condition より $\alpha(U)(\eta)=\xi$

定義1.4の条件 (2) の check.

まず.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \mathrm{coker}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & & \mathcal{H} & (\mathrm{coker}(\alpha)\text{の sheafification}) \arrow[l, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

なる diagram の inductive limit より. $\forall x \in X$ について

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F}_x \arrow[r, "\alpha_x"] & \mathcal{G}_x \arrow[r] \arrow[d, "\beta_x"'] & [\mathrm{coker}(\alpha)]_x \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\ & & \mathcal{H}_x & (\mathrm{coker}(\alpha)\text{の sheafification})_x \arrow[l, "\gamma_x"'] & \end{tikzcd}$$

なる diagram で $0 \to \mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x \to 0$ が exact. このことより.

$$(\mathrm{coker}(\alpha)\text{の sheafification})_x \xrightarrow[\simeq]{\gamma_x} \mathcal{H}_x$$

よって. 次の事を示せばよい。"$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}$ なる sheavesの map について $\forall x \in X$ について $\mathcal{F}_x \xrightarrow[\approx]{\alpha_x} \mathcal{G}_x$ なら $\mathcal{F} \xrightarrow[\sim]{\alpha} \mathcal{G}$"

これは $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \to 0 \to 0$ について (十分性) の ①, ②, ③ を適用して $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \to 0$ が presheaf exact. よって $\mathcal{F} \xrightarrow[\sim]{\alpha} \mathcal{G}$ Q.E.D.

以下 この section では sheaf-係数の cohomology を定義するので

あるが、そのために、abelian groups の sheaf について 'canonical resolution'を定義する。

<u>定義 1.5</u> (resolution, canonical resolution)

X を top. space, $\mathcal{F}$ を X 上の abelian groups の sheaf とする時、$\mathcal{F}$ の resolution とは、$0 \to \mathcal{F} \to R^0 \to R^1 \to \cdots\cdots$ なる sheaf-exact sequence のことである。

また、$\mathcal{F}$ の 'canonical resolution'とは、$\mathcal{F}$ の resolution

(*) $\quad 0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{L}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{L}^1 \to \cdots \xrightarrow{d^n} \mathcal{L}^{n+1} \to \cdots\cdots$

で、次のように inductive に定義されるものである。

まず、$\mathcal{L}^0 = [\mathcal{F}]$ (discontinuity sheaf)

ε は natural な map

次に $\mathcal{L}^1 = [\mathrm{coker}(\varepsilon)]$

d^0 は

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[dr] & \mathcal{L}^1 \\ & \mathrm{coker}(\varepsilon) \arrow[u, "nat."'] \end{tikzcd}$$

によって定義する。

- - - - -

$$\mathcal{L}^n = [\mathrm{coker}(d^{n-2})]$$

d^{n-1} は

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[dr] & \mathcal{L}^n \\ & \mathrm{coker}(d^{n-2}) \arrow[u, "nat."'] \end{tikzcd}$$

によって定義する。

- - - - -

すると (*) が sheaf-exact sequence になることは明らかである。

cohomology $H^i(X,\mathcal{F})$ は presheaf-exactと sheaf-exact の gap を測るものとして次のように定義される。

<u>定義 1.6</u> $H^i(X,\mathcal{F}) \underset{\text{def}}{=} \dfrac{\mathrm{Ker}\,(d^i(X))}{\mathrm{Im}\,(d^{i-1}(X))}$ （ただし $d^{-1}(X) \underset{\text{def.}}{=} 0$）

[註] <u>1.8</u> $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}$ なる sheavesのmap が与えられた時、

$\forall i \geq 0$ について

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{L}^{i-1}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{L}^{i}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{L}^{i+1}(\mathcal{F}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{L}^{i-1}(\alpha)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{L}^{i}(\alpha)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{L}^{i+1}(\alpha)} \\ \mathcal{L}^{i-1}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathcal{L}^{i}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathcal{L}^{i+1}(\mathcal{G}) \end{array}$$

（ただし $\mathcal{L}^{-1}(\alpha) = \alpha$）

なる diagram の global sections をとって

$$\begin{array}{ccccc} [\mathcal{L}^{i-1}(\mathcal{F})](X) & \longrightarrow & [\mathcal{L}^{i}(\mathcal{F})](X) & \longrightarrow & [\mathcal{L}^{i+1}(\mathcal{F})](X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [\mathcal{L}^{i-1}(\mathcal{G})](X) & \longrightarrow & [\mathcal{L}^{i}(\mathcal{G})](X) & \longrightarrow & [\mathcal{L}^{i+1}(\mathcal{G})](X) \end{array}$$

各行についての homology groups をとって

$H^i(X,\mathcal{F}) \xrightarrow[H^i(X,\alpha)]{} H^i(X,\mathcal{G})$ なる map $H^i(X,\alpha)$

を定義すると、これによって $H^i(X,*)$ が X 上の abelian groups の sheavesのなす category から abelian group の category への functorを定めることが容易にわかる。

[註] <u>1.9</u> $\mathcal{F}$ を X 上の sheaf とする時、natural な map

$H^0(X,\mathcal{F}) \xleftarrow[\varphi(\mathcal{F})]{\approx} \mathcal{F}(X)$ がある。

ここで、"natural" とは次の意味である。sheaves の map $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}$ について

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X) \arrow[r, "\varphi(\mathcal{F})", "\approx"'] \arrow[d, "\alpha(X)"'] & H^0(X,\mathcal{F}) \arrow[d, "H^0(X,\alpha)"] \\ \mathcal{G}(X) \arrow[r, "\varphi(\mathcal{G})", "\approx"'] & H^0(X,\mathcal{G}) \end{tikzcd}$$

なる diagram が可換になる。

(証) ' sheaf-exact sequence $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ に対しては $0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X)$ も exact (証明は exercise)'

を $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{L}^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{d^0(\mathcal{F})} \mathcal{L}^1(\mathcal{F})$ に適用すれば

$0 \to \mathcal{F}(X) \to [\mathcal{L}^0(\mathcal{F})](X) \to [\mathcal{L}^1(\mathcal{F})](X)$ が exact,

故に前半を得る。

naturality については、次の commutative diagram の global section

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{L}^0(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{L}^0(\alpha)"'] & \mathcal{L}^1(\mathcal{F}) \arrow[d, "\mathcal{L}^1(\alpha)"'] \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{L}^0(\mathcal{G}) \arrow[r] & \mathcal{L}^1(\mathcal{G}) \end{tikzcd}$$

をとれば直ちに得られる。

Q.E.D.

cohomology $H^i(X,\mathcal{F})$ の性質を調べるために、言葉を導入する。

<u>定義 1.7</u> X 上の sheaf $\mathcal{F}$ が flasque であるとは

$X \supset {}^{\forall}U$ open set について $res^X_U : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$

が surjective であることとする。

Proposition 1.1

(1) $^\forall\mathcal{F}$ sheaf on X, $^\forall i \in \mathbb{N}$ について $\mathcal{L}^i$ は flasque sheaf.

(2) 一般に sheaf $\mathcal{F}$ が flasque なら

$^\forall i > 0$ について $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ (この性質をもつ sheaf を cohomologically trivial な sheaf という)

(3) 一般に sheaf $\mathcal{F}$ について

$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon'} M^0 \xrightarrow{\delta^0} M^1 \xrightarrow{\delta'} \cdots$ なる sheaf-exact sequence が、条件: $^\forall i > 0$, $^\forall j \geq 0$ について

$H^i(X, M^j) = (0)$ をみたす時

$$H^i(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\delta^i(X)) / \mathrm{Im}(\delta^{i-1}(X))$$

(ただし $\delta^{-1} \underset{\mathrm{def.}}{=} 0$)

((1)の証) 明らか。

lemma 1.2 sheaf exact sequence $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ について $\mathcal{F}$ が flasque なら $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ は presheaf-exact

(証) $\mathcal{F}$ を open set U に制限して $\mathcal{F}|_U$ を考える時 $\mathcal{F}$ が flasque ならば、$\mathcal{F}|_U$ も flasque

従って $U = X$ の時を考えるだけで十分である。

一般に $0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha(X)} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta(X)} \mathcal{H}(X)$ が exact であることは明らか。

従って $\beta(X)$ が surjective であることを示せばよい。

$\mathcal{H}(X) \ni {}^{\forall}\xi$ をとり、それについて、次のような pairs の全体 $\mathfrak{U}$ を考える。

(U, η_U) : U は open set で $\eta_U \in \mathcal{G}(U)$ かつ $\beta(U)(\eta_U) = \xi|_U$ (註: $\xi|_U \underset{\text{def.}}{=} \mathrm{res}^X_U \xi$)

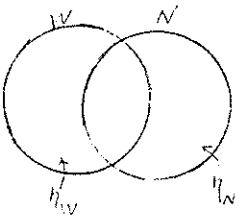
$\mathfrak{U}$ に順序関係を次の様に導入すると $\mathfrak{U}$ は inductive set になる。

$(U, \eta_U) \succ (V, \eta_V) \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} U \supset V$ かつ $\eta_U|_V = \eta_V$

Zorn's lemma によって $\mathfrak{U}$ の極大元 (W, η_W) をとる。

$W = X$ を示せば十分である。

もし、$X \neq W$ なら $\exists x \in X - W$、従って sheaf-exact の定義から $\exists N$ open set $\ni x$, $\exists \eta_N \in \mathcal{G}(N)$ s.t. $(N, \eta_N) \in \mathfrak{U}$



従って $\beta((\eta_N - \eta_W)|_{W \cap N}) = \xi - \xi = 0$

従って sheaf-exact の定義から

$\exists \zeta_{W \cap N} \in \mathcal{F}(W \cap N)$ s.t. $\alpha(\zeta_{W \cap N}) = (\eta_N - \eta_W)|_{W \cap N}$

$\mathcal{F}$ は flasque だから $\exists \zeta \in \mathcal{F}(X)$ $\zeta_{W \cap N} = \zeta|_{W \cap N}$

η_N を $\eta'_N = \eta_N - \alpha(\zeta|_N)$ でとりかえると、

$$\eta'_N|_{W \cap N} = \eta_W|_{W \cap N}$$

従って sheaf の gluability condition によって

$\exists (W \cup N, \eta_{W \cup N}) \succ (W, \eta_W)$

これは不合理　　∴ $W = X$　　Q.E.D.

<u>lemma 1.3</u>　$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ を sheaf exact sequence とし $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ が flasque とする。

この時 $\mathcal{H}$ は flasque

(証)　U を open set とする時 $\mathcal{G}$ は flasque だから

$\mathcal{G}(X) \xrightarrow{res} \mathcal{G}(U) \to 0$ exact 又、lemma 1.2 により

$\mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U) \to 0$ exact

故に右の diagram より

$\mathcal{H}(X) \xrightarrow{res} \mathcal{H}(U)$ は onto

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(X) \arrow[r] \arrow[d, "onto"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{H}(X) \arrow[d] \\ \mathcal{G}(U) \arrow[r, "onto"'] & \mathcal{H}(U) \end{tikzcd}$$

Q.E.D.

((2)の証明)　canonical resolution を short-exact sequence に分解する。

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{L}^0 \to \mathrm{coker}(\varepsilon) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{coker}(\varepsilon) \to \mathcal{L}^1 \to \mathrm{coker}(d^0) \to 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 \to \mathrm{coker}(d^{n-2}) \to \mathcal{L}^n \to \mathrm{coker}(d^{n-1}) \to 0$$

lemma 1.3 をくりかえし用いて $\mathrm{coker}(\varepsilon)$, $\mathrm{coker}(d^i)$ はすべて flasque. 従って lemma 1.2より

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{L}^0(X) \to (\mathrm{coker}(\varepsilon))(X) \to 0$$

$$0 \to (\mathrm{coker}(\varepsilon))(X) \to \mathcal{L}^1(X) \to (\mathrm{coker}(d^0))(X) \to 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$0 \to (\mathrm{coker}\,(d^{n-2}))(X) \longrightarrow \mathcal{L}^n(X) \longrightarrow (\mathrm{coker}\,(d^{n-1}))(X) \to 0$$

なる short exact sequences は すべて exact.

これから $0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\varepsilon(X)} \mathcal{L}^0(X) \xrightarrow{d^0(X)} \mathcal{L}^1(X) \xrightarrow{d^1(X)} \mathcal{L}^2(X) \to \cdots$

は exact

従って $\forall i > 0$ について $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ Q.E.D.

<u>Proposition 1.4</u> 一般に sheaf-exact sequence

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$$ が与えられた時.

これに対して. 次のような natural な abelian groups の exact sequence がある。

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{G}) \to H^0(X, \mathcal{H}) \\ &\xrightarrow{\partial^0} H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{G}) \to H^1(X, \mathcal{H}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\xrightarrow{\partial^{i-1}} H^i(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{H^i(X,\alpha)} H^i(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{H^i(X,\beta)} H^i(X, \mathcal{H}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

(∂^i は connecting homomorphism とよばれる)

〔註〕 <u>1.10</u> ここで 'natural' とは 次の意味である.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{F} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{G} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{H} & \to & 0 \\ & & \downarrow\lambda & & \downarrow\mu & & \downarrow\nu & & \\ 0 & \to & \mathcal{F}' & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{G}' & \xrightarrow{\beta'} & \mathcal{H}' & \to & 0 \end{array}$$

なる sheaves の maps の diagram が与えられた時

各 $i\ (\geq 0)$ について次の diagram が可換,

$$\begin{array}{ccc} H^i(X,\mathcal{H}) & \xrightarrow{\partial^i} & H^{i+1}(X,\mathcal{F}) \\ H^i(X,\nu)\downarrow & & H^i(X,\lambda)\downarrow \\ H^i(X,\mathcal{H}') & \xrightarrow{\partial^i} & H^{i+1}(X,\mathcal{F}') \end{array}$$

[註] <u>1.11</u> sheaf-exact sequence $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ について

$\forall i$ について $0 \to \mathcal{L}^i(\mathcal{F}) \xrightarrow{\mathcal{L}^i(\alpha)} \mathcal{L}^i(\mathcal{G}) \xrightarrow{\mathcal{L}^i(\beta)} \mathcal{L}^i(\mathcal{H}) \to 0$

は exact (即ち、canonical resolution を作る操作は exact functor)

(証) $\mathcal{L}^0$ については $\mathcal{L}^0(\mathcal{F})(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$ (Uはopen set) より明らか。

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{G} & \to & \mathcal{H} & \to & 0 \quad \text{exact} \\ & & \downarrow \varepsilon_{\mathcal{F}} & & \downarrow \varepsilon_{\mathcal{G}} & & \downarrow \varepsilon_{\mathcal{H}} & & \\ 0 & \to & \mathcal{L}^0(\mathcal{F}) & \to & \mathcal{L}^0(\mathcal{G}) & \to & \mathcal{L}^0(\mathcal{H}) & \to & 0 \quad \text{exact} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathrm{coker}(\varepsilon_{\mathcal{F}}) & \to & \mathrm{coker}(e_{\mathcal{G}}) & \to & \mathrm{coker}(e_{\mathcal{H}}) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \text{exact} & & \text{exact} & & \text{exact} & & \end{array}$$

上の diagram で 第3行目が sheaf-exactであることを示すには Xの各点、xにおける stalk を調べればよいが stalk は abelian group.

従って 3×3-lemma より 第3行目は sheaf-exact.

$\mathcal{L}^i(\mathcal{F}) = \mathcal{L}^{i-1}(\mathrm{coker}\ \varepsilon_{\mathcal{F}})$ $(i \geq 1)$ を用いれば

induction により　　Q.E.D.

<u>3×3-lemma</u> : abelian groups の diagram (右図) において、列はすべて exact であるとすれば、第1行、第2行が共に exact、もしくは第2行、第3行が共に exact なら、残る一行も exact

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[d] & L' \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K'' \arrow[r] \arrow[d] & L'' \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

exact　exact　exact

(証)　exercise

(Proposition 1.4 の証明)　[註] 1.9 と lemma 1.2 により

$L^i(*) = (\mathcal{L}^i(*))(X)$ とおけば

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L^0(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & L^0(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & L^0(\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L^1(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & L^1(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & L^1(\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

なる diagram において 行はすべて exact そこで

$\mathrm{coker}(L^{i-1}(*) \longrightarrow L^i(*)) = C^i(*)$ (ただし $L^{-1}(*) \underset{\mathrm{def.}}{=} 0$) とおけば

$\mathrm{Ker}(L^i(*) \longrightarrow L^{i+1}(*) = K^i(*)$

$L^i(*)$ と $L^{i+1}(*)$ に関する部分より、次の diagram を得る。（cf. [註] 1.12）

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & H^i(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(\mathcal{H}) \arrow[d] & \\
 & C^i(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & C^i(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & C^i(\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^{i+1}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & K^{i+1}(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & K^{i+1}(\mathcal{H}) \arrow[d] & \\
 & H^{i+1}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{i+1}(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{i+1}(\mathcal{H}) \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

（横の）行はすべて exact.

（ただし $H^i(*) = H^i(X, *)$）

縦の ▨ の部分について Snake lemma（cf. [註] 1.12）を適用すれば、

$$H^i(\mathcal{F}) \longrightarrow H^i(\mathcal{G}) \longrightarrow H^i(\mathcal{H}) \xrightarrow{\partial^i} H^{i+1}(\mathcal{F}) \longrightarrow H^{i+1}\mathcal{G} \longrightarrow H^{i+1}(\mathcal{H})$$

は exact. 又、$H^0(X, \mathcal{F}) \hookrightarrow H^0(X, \mathcal{G})$ については sheaf-exact の定義より 次の diagram の第1行は exact.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{G}(X) \arrow[d, "\wr"] \\
 & H^0(X, \mathcal{F}) \arrow[r] & H^0(X, \mathcal{G})
\end{tikzcd}$$

縦の列が isom. であること、及び diagram が可換なことは [註] 1.8 による。

従って　$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G})$

naturality については [註] 1.12 の Snake lemma の項参照　　Q.E.D.

[註] <u>1.12</u>　次のような abelian groups の diagram において

行がすべてexactであるとする。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "\gamma"'] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \end{tikzcd}$$

もし $A' \to B'$ がinjective なら

$\mathrm{Ker}(\alpha) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\beta) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\gamma)$ は exact.

更に $A \to B$ も injective なら

$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\beta) \to \mathrm{Ker}(\gamma)$ も exact.

もし $B \longrightarrow C$ がsurjective なら

$\mathrm{coker}(\alpha) \longrightarrow \mathrm{coker}(\beta) \longrightarrow \mathrm{coker}(\gamma)$ は exact.

更に $B' \longrightarrow C'$ も surjective ならば

$\mathrm{coker}(\alpha) \longrightarrow \mathrm{coker}(\beta) \longrightarrow \mathrm{coker}(\gamma) \longrightarrow 0$ も exact.

(証明は exercise)

<u>Snake lemma:</u> 次のような 縦も横もexactな diagram が与えられているとする。

$$\begin{tikzcd} & & \mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(\gamma) \arrow[d, "i"] & & \\ & A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 & \text{(exact)} \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\lambda'"'] \arrow[d, "j"'] & B' \arrow[r, "\mu'"'] \arrow[d] & C' & & \text{(exact)} \\ & \mathrm{coker}(\alpha) \arrow[r] & \mathrm{coker}(\beta) & & & \end{tikzcd}$$

この時 $\mathrm{Ker}(\alpha) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\partial} \mathrm{coker}(\alpha) \longrightarrow \mathrm{coker}(\beta)$

は exact.

ただし ∂ は次のように定義される：

$\mathrm{Ker}(\gamma) \ni c$ について μ が onto だから

$\exists\, b \in B$ s.t. $\mu b = ic$

すると $\mu'(\beta b) = \gamma(\mu b) = \gamma i c = 0$ ($\because c \in \mathrm{Ker}(\gamma)$)

よって $0 \to A' \to B' \to C'$ がexact であるから

$\exists_1\, a' \in A'$ s.t. $\lambda' a' = \beta b$ この a' について

$\partial c = j a'$ と定義すると ∂c は b のとり方に

よらないことが容易に示される。

（要するに $\partial = j \circ \lambda'^{-1} \circ \beta \circ \mu^{-1} \circ i$）

(証明は exercise)

特に［註］1.10 の diagram が与えられたとすると

$$
\begin{tikzcd}
 & H^i(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[drr] & H^i(\mathcal{H}) \arrow[d, "i_R"] \arrow[drr, dashed] & & & \\
 & C^i(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[drr, dashed] & C^i(\mathcal{G}) \arrow[r, "\mu_R"] \arrow[d, "\beta_R"'] \arrow[drr] & C^i(\mathcal{H}) \arrow[d] \arrow[drr] & H^i(\mathcal{G}') \arrow[r] \arrow[d] & H^i(\mathcal{H}') \arrow[d, "i_S"] \\
 & & & C^i(\mathcal{F}') \arrow[r] \arrow[d] & C^i(\mathcal{G}') \arrow[r, "\mu_S"'] \arrow[d, "\beta_S"] & C^i(\mathcal{H}') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^{i+1}(\mathcal{F}) \arrow[r, "\lambda'_R"] \arrow[d, "j_R"'] \arrow[drr] & K^{i+1}(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & K^{i+1}(\mathcal{H}) \arrow[drr] & 0 \arrow[r] & K^{i+1}(\mathcal{F}') \arrow[r, "\lambda'_S"'] \arrow[d, "j_S"'] & K^{i+1}(\mathcal{G}') \arrow[r] \arrow[d] & K^{i+1}(\mathcal{H}') \\
 & H^{i+1}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[drr] & H^{i+1}(\mathcal{G}) \arrow[drr] & & & H^{i+1}(\mathcal{F}') \arrow[r] & H^{i+1}(\mathcal{G}') & \\
 & & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

R　　Pr　　S

なる commutative diagram が得られる。

∂ の naturality は次のようにして得られる。

$H^i(\mathcal{H}) \ni c$ について ∂c と定義するために

$C^i(\mathcal{G}) \ni b$, $K^{i+1}(\mathcal{F}) \ni a'$ s.t. $i_R c = \mu_R b$, $B_R b = \lambda_R a'$

$$\begin{tikzcd}
 & & c \arrow[d] & & \\
 & i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "Pr"] & i_R c = \mu_R b & & Pr\,c \arrow[d] \\
a' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \mu_R b = \lambda_R a' \arrow[dr, "Pr"] & Pr\,b \arrow[r] \arrow[d] & i_R(Pr\,c) = \mu_S(Pr\,b) & \\
\partial_R a' = j_S a' \arrow[dr, "Pr"] & Pr\,a' \arrow[r] \arrow[d] & \mu_S(Pr\,b) = \lambda_S(Pr\,a') & & \\
 & \partial_S(Pr\,c) = j_S(Pr\,a') & & &
\end{tikzcd}$$

よって、上図より明らかに

$$Pr \circ \partial_R = \partial_S \circ Pr$$

これが ∂ の naturality にほかならない　　Q.E.D.

ここで、やっと Proposition 1.1 の (3) の証明にもどることができる。

((3) の証明)　$K^i = Ker(\delta^i)$ と定義すると、

$0 \to \mathcal{F} \to M^0 \xrightarrow{\alpha} K^1 \to 0$ が sheaf-exact であるから Prop. 1.4 より $\forall i > 0$ について

$0 = H^i(X, M^0) \to H^i(X, K^1) \to H^{i+1}(X, \mathcal{F}) \to H^{i+1}(M^1) = 0$

が exact

$$\therefore \quad H^i(X, K^1) \cong H^{i+1}(X, \mathcal{F}) \qquad (*)$$

更に、

$$\begin{tikzcd}
H^0(X,M^0) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^0(X,K^1) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & H^1(X,M^0) \arrow[d, equal] \\
M^0(X) \arrow[r, "\alpha(X)"] & K^1(X) & & 0
\end{tikzcd} \qquad (**)$$

が exact

ここで、右の diagram は可換で、行は sheaf-exact

$$\begin{tikzcd}
 & M^0 \arrow[d] \arrow[dr, "\alpha"] & & \\
0 \arrow[r] & K^1 \arrow[r] & M^1 \arrow[r, "\delta^1"] & M^2
\end{tikzcd}$$

よって〔註〕1.9 と Prop. 1.4 より 右の diagram が可換、かつ 行は exact

$$\begin{tikzcd}
 & M^0(X) \arrow[d, "\alpha(X)"'] \arrow[dr, "\delta^0(X)"] & & \\
0 \arrow[r] & K^1(X) \arrow[r] & M^1(X) \arrow[r, "\delta^1(X)"] & M^2(X)
\end{tikzcd}$$

$$\therefore \quad \mathrm{Coker}\,(\alpha(X)) \cong \mathrm{Ker}\,\delta^1(X) / \mathrm{Im}\,\delta^0(X)$$

よって (**) より

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong \frac{\mathrm{Ker}\,\delta^1(X)}{\mathrm{Im}\,\delta^0(X)}$$

よって (3) は $i=1$ の場合については示された。

また、$\forall j > 0$ について $0 \to K^j \to M^j \to K^{j+1} \to 0$ が sheaf-exact だから ($\forall j > 0$)

Prop. 1.4 より $\forall i > 0$ について (*) と同様に

$$H^i(X, K^{j+1}) \cong H^{i+1}(X, K^j) \qquad (***)$$

(*) と (***) より

$$H^{i+1}(X, \mathcal{F}) \cong H^1(X, K^i) \qquad \forall i > 0 \qquad (****)$$

そこで　すでに証明した　$i=1$　の場合を

$0 \longrightarrow K^i \longrightarrow M^i \xrightarrow{\delta^i} M^{i+1} \xrightarrow{\delta^{i+1}} \cdots$　なる exact sequence に適用して

$$H^1(X, K^i) \cong \frac{\mathrm{Ker}(\delta^{i+1}(X))}{\mathrm{Im}(\delta^i(X))}$$

これと　(＊＊＊＊)　より

$$H^{i+1}(X, \mathcal{F}) \cong \frac{\mathrm{Ker}(\delta^{i+1}(X))}{\mathrm{Im}(\delta^i(X))} \quad (\forall i > 0)$$

Q.E.D.

§2. Schemes

§1 で定義した cohomology について X が $\mathbb{C}^n$ の algebraic set の場合に、cohomology への operation を考える。

$\mathbb{C}^n$ の座標系を $z_1,\cdots,z_n$ とし

$\mathbb{C}^n \supset X = \{x \in \mathbb{C}^n \mid f_1(x) = \cdots = f_m(x) = 0\}$ を algebraic set とする。（ただし $f_i(z) \in \mathbb{C}[z_1,\cdots,z_n]$）すると f_i は polynomial だから $\mathbb{C} \supset k$ なる subfield で Q 上有限生成なものをとり $\forall_i \quad f_i \in k[z_1,\cdots,z_n]$ としてよい。

この時 $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/k) = \{\mathbb{C}$ の automorphism σ で $\sigma|_k = \mathrm{id}\}$ の任意の元 σ は $\mathbb{C}^n$ の automorphism $\tilde{\sigma}$ を induce し、$\tilde{\sigma}$ は $X \xrightarrow{\approx} X$ なる automorhpism を induce する。即ち $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/k)$ は X の automorphism group を induce する。S をその商空間 $X/\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/k)$ とおくと、次の事実がある。

1) X の 'cohomology theory' は S の上の 'cohomology theory' で induce される。

2) $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/k)$ は 'cohomology' に operate する。

そのために S を考察する必要が生ずるのだが、scheme の言葉を用いれば

$S = S(k[z]/(f_1,\cdots,f_n)) = \{\mathrm{Spec}(k[z]/(f_1,\cdots,f_n))$ の base spece$\}$ となる。

そこでまず、scheme の一般論から始める。(詳細は Grothendieck[1]

参照)

<u>定義 2.1</u>　(ringed space)　k を ring とする時

topological space $|X|$ と、その上の sheaf(k-algebra の sheaf) $\mathcal{O}_X$ との pair $(|X|, \mathcal{O}_X) = X$ を k-ringed space という。

特に $k = \mathbb{Z}$ の時を単に、ringed space という。

又、local ringed space X とは、ringed space であり、$\forall x \in |X|$ について $(\mathcal{O}_X)_x$ が local ring であるものをいう。その maximal ideal $\mathfrak{M}_{X,x}$ とかく。

<u>定義 2.2</u>　X, X' を ringed spaces とする時

map $\psi : X \longrightarrow X'$ とは、$f : |X| \longrightarrow |X'|$ なる continuous map と、(k-algebra の) sheaves の f-homomorphism $\mathcal{O}_X \xleftarrow{\theta} \mathcal{O}_{X'}$ の pair (ψ, θ) の事である。

ただし、f-homomorphism とは、$|X| \supset {}^\forall U'$ open set に対して $\theta_{U'} : \mathcal{O}_{X'}(U') \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(U'))$ なる k-algebra homomorphism で $|X'| \supset U' \supset V'$ open sets に対して

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X'}(U') \arrow[r, "\theta_{U'}"] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U')) \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\
\mathcal{O}_{X'}(V') \arrow[r, "\theta_{V'}"] & \mathcal{O}_X(f^{-1}(V'))
\end{tikzcd}$$

が可換になることである。

又、X, X' を local ringed spaces とする時、local ringed space の map $\psi : X \longrightarrow X'$ とは ringed space の map であって

$\forall x \in X$ について $\theta_{U'}$ から induce される map. $\theta_{X',f(x)} \xrightarrow{\theta_X^{\#}} \theta_{X,x}$ が local homomorphism 、即ち $\theta_X^{\#}(\mathfrak{m}_{X',f(x)}) \subset \mathfrak{m}_{X,x}$ なることである。

A を commutative ring $\ni 1$ とし $S(A)$ なる topological space を次のように定義する。

set としては $S(A) = \{A$ の中の prime ideals $\}$

(簡単のため $S(A) \ni x$ に対応する prime ideal を $\mathfrak{p}_x$ とかく。)

Topology は Zariski topology を入れる。

即ち、" $S(A) \supset U$ が open であるとは、A の ideal I があって $U = \{x \in S(A) \mid \mathfrak{p}_x \not\ni I\}$ $(\underset{\text{def.}}{=} U_I)$ と定義する。

この時 Spec(A) は local ringed space で $(S(A), \theta)$ なるものである。

ただし、θ は次のようにして作る。

[註] 2.1 $S(A)$ の Top. T は一つの自然な base をもつ。

$$T^{\circ} = \{U \in T \mid \exists f \in A \text{ s.t. } U = U_{fA} (= U_f)\}$$

実際、T° が base であることは $U_I = \bigcup_{f \in I} U_f$ より明らか。

[註] 2.2 $\Delta (\subset A)$ を multiplicatively closed set (即ち、$\Delta \ni a, b \Rightarrow \Delta \ni ab$) とした時、$\Delta$ による quotient ring A_Δ

を次のように定義する。

$A_\Delta = \{ \frac{a}{b} \mid a \in A,\ b \in \Delta \}$

ただし、$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \exists d \in \Delta$ s.t. $d(ab' - a'b) = 0$ とする。ring structure は natural にいれる。

[註] 2.3　A の2つの元 f, g について $U_f = U_g \Leftrightarrow \exists \ell > 0$ s.t. $f^\ell \in gA$, $g^\ell \in fA$.

(証) $\Leftarrow$ は明らか.

$\Rightarrow$ については、$B = A/gA$ なる ring を考えることにより、"$B \ni f$ について $U_f = \phi$ (即ち、fA は全ての prime ideal に含まれる) ならば、f は nilpotent" を示せばよい。

もし、f が nilpotent でないとすると $\Delta = \{1, f, f^2, \cdots, f^n, \cdots\}$ は mult. set で $\Delta \not\ni 0$ だから $B_\Delta \neq 0$

B_Δ の prime ideal $\mathfrak{p}$ をとり natural な ring hom. $B \to B_\Delta$ により $\mathfrak{p}$ をひきもどした $\mathfrak{p}'$ については、$\mathfrak{p}' \not\ni f$. よって $U_f \neq \phi$　Q.E.D.

さて、$A \ni f$ について $\Delta = \{1, f, f^2, \cdots\}$ による A_Δ を A_f と略記すると [註] 2.3 より $U_f = U_g \Rightarrow A_f = A_g$

又、$U_f \subset U_g \Rightarrow U_f = U_f \cap U_g = U_{fg}$ より $A_f = A_{fg} = (A_g)_f$

従って、T° 上の presheaf として $\mathcal{O}^\circ(U_f) = A_f$

$U_f \subset U_g$ に対して res は次の diagram によって定義する。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^\circ(U_g) = A_g \arrow[d, "\mathrm{res}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Can.\,map}"] & \\ \mathcal{O}^\circ(U_f) = A_{fg} & (A_g)_f \end{tikzcd}$$

$\mathcal{O}^\circ$ が presheaf になることは明らかであろう。

そして $\mathcal{O} = \mathcal{O}^\circ$ の sheafification.

[註] 2.4　$S(A) \ni x$ に対応する A の prime ideal を $\mathfrak{p}$ とすると $\mathcal{O}_x = A_{\mathfrak{p}}$

ただし、$A_{\mathfrak{p}}$ とは A の、mult. set. $S = A - \mathfrak{p}$ による quotient ring の事である。

定義 2.3　X が scheme であるとは、X が local ringed space $(|X|, \mathcal{O}_X)$ であって 次の性質をもつことである。

$\forall x \in |X|$ に対して、$\exists U$ open $\ni x$, $\exists A$ commutative ring $\ni 1$ s.t. $X|_U = (U, \mathcal{O}_X|_U) \cong \mathrm{Spec}(A)$

[註] 2.5　k を algebraically closed field とし、

$A = k[y_1, \cdots y_n]/J$ (J は ideal) とおくと、

Chap. 1, 系 8.7.2 により

$$S(A) \xleftrightarrow{1-1} A \text{ の prime ideals}$$

$$\xleftrightarrow{1-1} V(J) \text{ の中の irreducible algebraic set}$$

又 $S(A) \ni {}^{\forall}x$ について

x が $S(A)$ の点として closed ($\{\overline{x}\} = \{x\}$) $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{p}_x$ が maximal ideal (これは $\{\overline{x}\} = \{x' \in S(A) \mid \mathfrak{p}_{x'} \supset \mathfrak{p}_x\}$ より明らか。)

$\mathfrak{p}_x$ が定義する algebraic set V について

$$\{\overline{x}\} = \left\{ \begin{array}{l} V \text{に含まれる. irreducible algebraic set} \\ \text{全部に対応する } S(A) \text{ の点を集めたもの} \end{array} \right\}$$

(これも $\{\overline{x}\} = \{x' \in S(A) \mid \mathfrak{p}'_x \supset \mathfrak{p}_x\}$ より明らか。)

更に. Chap. 1, 系 8.7.3 により $\{v(J) \text{ の点}_s\} \xleftrightarrow{1-1} \{S(A) \text{ の closed points}\}$

$$\boxed{v(J) \xhookrightarrow{i} S(A)}$$

この injection i によって、$v(J)$ の Zariski-topology は $S(A)$ の topology により induce されたものになっている。

注] 2.6 $A = k[y_1, \cdots y_n]/J$ とする。

(ただし. k は任意の体. 例えば $\mathbb{Q}$ 上有限生成の体)

ここで $\tilde{k} \supset k$ $\tilde{k}$: algebraically closed trans. deg $_k\tilde{k} \geq n$ なる体 $\tilde{k}$ (例えば $\tilde{k} = \mathbb{C}$) をとり、$\tilde{J} = J\tilde{k}[y]$ とおくと. この $\tilde{J}$ により $\tilde{k}^n$ の中の alg. set : $v(\tilde{J})$ が定義される。

さて、次の map λ が存在する。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(\tilde{J}) & \xrightarrow{\lambda} & S(A) \\ \xi & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} M_\xi \subset \tilde{k}[y]/\tilde{J} \text{ を inclusion map } A \hookrightarrow \\ \tilde{k}[y]/\tilde{J} \text{ により引きもどした prime} \\ \text{ideal } \mathfrak{p} = M_\xi \cap A \text{ に対応する点、} \end{array}\right\} \end{array}$$

即ち、$\mathfrak{p} = \{f \in k[y] \mid f(\xi) = 0\}$

この λ について次の事実が成立する。

(1) λ は surjective

(2) $\xi, \xi' \in \mathcal{V}(\tilde{J})$ について

$$\lambda(\xi) = \lambda(\xi') \Longleftrightarrow {}^\exists\sigma \in \mathrm{Aut}(\tilde{k}/k) \text{ s.t. } \sigma(\xi) = \xi'$$

(証) (1) $S(A) \ni x$ について $A/\mathfrak{p}_x$ は整域でその商体 K は k 上高々 n 次元、よって $K \xhookrightarrow{j} \tilde{k}$ なる (k-algebra)hom. が存在する。

そこで、$\tilde{k} \ni j(y_i) = \xi_i$ とおくと $x = \lambda(\xi)$

ただし、$\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$

これは $k[\xi] \cong k[y]/\mathfrak{p}_x$ より明らか。

(2) $k[\xi] \cong k[y]/\lambda(\xi)$ より

$$\lambda(\xi) = \lambda(\xi') \Longleftrightarrow {}^\exists\theta : k[\xi] \xrightarrow{\sim} k[\xi'] \text{ k-algebra hom.}$$

$$\text{s.t. } \xi_i \longmapsto \xi_i'$$

$$\Longleftrightarrow {}^\exists\theta : k(\xi) \longrightarrow k(\xi') \text{ k-algebra hom.}$$

$$\text{s.t. } \xi_i \longmapsto \xi_i'$$

$\tilde{k}$ は alg. closed だから最後の条件は

$\exists \sigma \in \mathrm{Aut}(\tilde{k}/k)$ s.t. $\sigma(\xi) = \xi'$ と同値　Q.E.D.

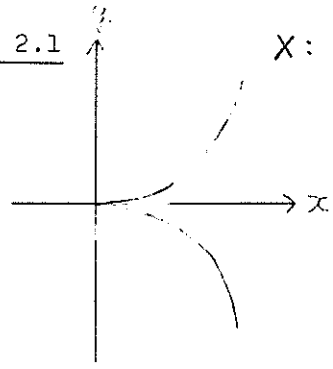
従ってこの λ により

$$\boxed{S(A) = v(\tilde{J})/\mathrm{gal}(\tilde{k}/k)}$$

実際 topological sapce としても

$$\boxed{\begin{array}{l}\cdot\ S(A) \text{ の topology は } v(\tilde{J}) \text{ の Zariski topology} \\ \text{の quotient topology}\end{array}}$$

例 2.1



$X : y^2 - x^3 = 0$　　$k = \mathbb{C}$

$X = \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x^3))$ とおくと

y 軸 $= \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[x,y]/(x))$

$X \cap y$ 軸 $= \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x^3, x))$

$\cong \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[y]/y^2)$

$\mathbb{C}[y]/y^2$ は $\mathbb{C}$-vector space として 2-dimensional

$\Longrightarrow$ intersection number を与えている。

例 2.2　$\mathbb{P}^n_k$ の斉次座標を $z_0, \ldots, z_n$ とすると

scheme としての $\mathbb{P}^n_k$ は

$\bigcup_{i=0}^{n} \mathrm{Spec}\,(k[\frac{z_0}{z_i}, \cdots, \frac{z_n}{z_i}])$ である。

ここに $A_i = k[\frac{z_0}{z_i}, \cdots, \frac{z_n}{z_i}]$ とおくと

$A_i[(\frac{z_j}{z_i})^{-1}] = A_j[(\frac{z_i}{z_j})^{-1}]$ によって

$\mathrm{Spec}(A_i)|_{U_{\frac{z_j}{z_i}}} \cong \mathrm{Spec}(A_j)|_{U_{\frac{z_i}{z_j}}}$

この同型によって $\bigcup_{i=0}^{n}$ のはりつけ方が決っている。

§3. Cohomology と Čech cohomology

§1 で sheaf-係数の cohomology を canonical resolution を用いて定義したが，injective sheaf を用いて定義することもできる．そこで，一般に abelian category $\mathcal{C}$ (abelian group の category，或いは abelian group の sheaf の category) において，projective 或いは injective なる言葉を導入する．

<u>定義3.1</u>　$A \in ob\,\mathcal{C}$ が *projective* であるとは

$\forall$ diagram in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\beta"] & \\ R \arrow[r, "\gamma"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

で，行が exact なものについては，$A \xrightarrow{\alpha} R$ なる map α が存在して $\beta = \gamma \circ \alpha$ とできるもののことである。

<u>定義3.2</u> (dual な形)　$A \in ob\,\mathcal{C}$ が *injective* であるとは．

$\forall$ diagram in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\beta"'] & R \\ & A & \end{tikzcd}$$

で

行が exact なものについては，$R \xrightarrow{\alpha} A$ なる map が存在して $\beta = \alpha \circ \gamma$ とできるもののことである。

[註] <u>3.1</u>　$\mathcal{F}$ がある top. space X の上の abelian group の sheaf とする．

$\mathcal{F}$ が injective ならば $\mathcal{F}$ は flasque

(証)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "id"'] & {[\mathcal{F}]} \\ & \mathcal{F} & \end{tikzcd}$$

(exact)　左の diagram に injective の定義を適用して $\exists \beta : [\mathcal{F}] \to \mathcal{F}$ s.t. $id_{\mathcal{F}} = \beta \circ \alpha$

$\forall$open set U に対して、右の可換な diagram を考えると、$id_{\mathcal{F}(U)}=\beta(U)\circ\alpha(U)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[rr, "\alpha(X)"] \arrow[dr, "id"] \arrow[dd, "res_{\mathcal{F}}"'] & & {[\mathcal{F}](X)} \arrow[dl, "\beta(x)"'] \arrow[dd, "res_{[\mathcal{F}]}"] \\
& \mathcal{F}(x) \arrow[dd, "res_{\mathcal{F}}"] & \\
\mathcal{F}(U) \arrow[rr, "\alpha(U)"] \arrow[dr, "id"'] & & {[\mathcal{F}](U)} \arrow[dl, "\beta(U)"] \\
& \mathcal{F}(U) &
\end{tikzcd}$$

よって、$\beta(U)$ は onto

$[\mathcal{F}]$ は flasque だから $res_{[\mathcal{F}]}$ は onto

従って $res_{\mathcal{F}}\circ\beta(X)=\beta(U)\circ res_{[\mathcal{F}]}$ も onto

従って $res_{\mathcal{F}}$ は onto, よって $\mathcal{F}$ は flasque. Q.E.D.

[註] 3.1 の系. $\mathcal{F}$ が injective なら, $\forall i>0$ について $H^i(X,\mathcal{F})=0$

(これは [註] 3.1 と Proposition 1.1 より明らか)

定義 3.3 一般に与えられた sheaf $\mathcal{H}$ について, その injective resolution とは, 次のような sheaf-exact sequence の事である.

$$0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \longrightarrow \cdots$$

$\forall \alpha \geq 0$ について I^α が injective

[註] 3.2 $\mathcal{C}$=(abelian group の sheaf の category) とする時, この $\mathcal{C}$ は"sufficiently many injectives"をもつ. 即ち、$\forall K \in ob\,\mathcal{C}$ に対して $\exists \mathcal{I} \in ob\,\mathcal{C}$ injective

s.t. $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha} \mathcal{I}$ が exact.

（ただし，与えられた K に対して $(\alpha, \mathcal{J})$ は unique でない．）従って，$^\forall \mathcal{H} \in \mathrm{ob}\, C$ に対して injective resolution が存在する．

（証）"sufficiently many injectives" をもてば，injective resolution は次のようにしてできる．$^\forall \mathcal{H} \in \mathrm{ob}\, C$ について $0 \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{J}^0$ (exact) なる injective な $\mathcal{J}^0$ をとり，coker(ε) について，$0 \longrightarrow \mathrm{coker}(\varepsilon) \xrightarrow{d'^0} \mathcal{J}'$ (exact) なる injective な $\mathcal{J}'$ をとり，以下同じことをくり返す．map $\mathcal{J}^i \longrightarrow \mathrm{coker}(d'^{i-1}) \longrightarrow \mathcal{J}^{i+1}$ を d^i とかく（ただし，$d^{-1} = \varepsilon$ とおく）．すると，$0 \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{J}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{J}' \xrightarrow{d^1} \cdots$ は injective resolution.

（ C が "sufficiently many injectives" をもつことの証明）

(1) まず $\mathcal{D}$ =(abelian group の category) が "sufficiently many injectives" をもつことを示す．（詳細については，Northcott [1] p.71 参照）．

A を abelian group とする時 $\hat{A} \underset{\mathrm{def.}}{=} \mathrm{Hom}\,(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ と定義すると，次の事がわかる．

(a) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は injective な abelian group．従って $^\forall$free abelian group L について，$\hat{L}$ は injective.

(b) $A \longrightarrow \hat{\hat{A}}$ なる canonical な map は injection.

そこで，free abelian group L を $L \xrightarrow{\beta} \hat{A} \longrightarrow 0$ が exact であるようにとる．従って $0 \longrightarrow \hat{\hat{A}} \xrightarrow{\hat{\beta}} \hat{L}$ は exact.

(b) により $0 \longrightarrow A \longrightarrow \hat{L}$ は exact であり，(a) より $\hat{L}$ は injective.

(2) $\mathcal{H}$ を abelian group の sheaf とする時，(1) により，各 stalk $\mathcal{H}_x$ を含む injective abelian group I(x) が存在する．そこで，$\mathcal{I}$ なる sheaf を次のようにして作る．

$\forall$open set U に対して $\mathcal{I}(U) \underset{\text{def.}}{=} \prod_{x \in U} I(x)$

$U \supset V$ (open sets) に対して res_V^U は $\prod_{x \in U} I(x)$ から $\prod_{x \in V} I(x)$ への natural な projection. 従って $\mathcal{H} \dashrightarrow [\mathcal{H}] \longrightarrow \mathcal{I}$ によって $0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{I}$ は exact. $\mathcal{I}$ が injective であることは，その作り方から，$\forall \mathcal{F}$ sheaf について，

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{I}) = \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_n, I(x))$$

である事．そして，$\forall x \in X$ について I(x) が injective であることよりわかる．

[註] 3.3 $\forall \mathcal{H}$ abelian group の sheaf について，その任意の injective resolution $0 \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{I}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{I}^2 \xrightarrow{d^2} \cdots$ をとり

$$H^i(X, \mathcal{H}) = \frac{\mathrm{Ker}(d^i(X))}{\mathrm{Im}(d^{i-1}(X))} \qquad (\text{ただし } d^{-1}=0 \text{ とする})$$

により cohomologyを定義しても，[註]3.1の系によりそれはwell definedで §1で定義したものと一致する．しかし，それはcanonical resolutionの言葉を借りなくても，次のpropositionから示される．

<u>Proposition 3.1</u>　sheaf $\mathcal{F}$とその$^{\forall}$resolution，即ち $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{R}^0 \xrightarrow{\varepsilon^0} \mathcal{R}^1 \xrightarrow{\varepsilon^1} \mathcal{R}^2 \longrightarrow \cdots$ なるsheaf-exact sequenceと，sheaf $\mathcal{G}$とその$^{\forall}$injective resolution $0 \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\tau} \mathcal{J}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{J}^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$．そして，$\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$なるmapが与えられた時，次のdiagramを可換にするようなmaps $\alpha_0, \alpha_1, \cdots$が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{R}^0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^0"'] & \mathcal{R}^1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{J}^0 \arrow[r] & \mathcal{J}^1 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

しかも他のこのようなmaps. $\alpha'_0, \alpha'_1, \cdots$ をとる時，$^{\forall}i \geqq 0$ について $\beta_i : \mathcal{R}^i \longrightarrow \mathcal{J}^{i+1}$ （$\mathcal{J}^{-1} = \mathcal{G}$ とする）なるmaps が存在して

$^{\forall}i \geqq 0$ について $\alpha_i - \alpha'_i = d^{i-1} \circ \beta_i + \beta_{i+1} \circ \varepsilon^i$ （ただし $d^{-1} = 0$ とする）

とできる．（証明は簡単．わからない人はNorthcott [1] P.78 参照）

(このようなβ'_sが存在する時 $\{\alpha\}$と$\{\alpha'\}$とは homotopic である
という. Cf. Northcott [1] p.62.)

従って, $\forall i \geqq 0$ について, α^i によって induce される map

$$\frac{\mathrm{Ker}(\mathcal{E}^i(X))}{\mathrm{Im}(\mathcal{E}^{i-1}(X))} \longrightarrow \frac{\mathrm{Ker}(d^i(X))}{\mathrm{Im}(d^{i-1}(X))} \quad (\text{ただし } \mathcal{E}^{-1}=d^{-1}=0)$$

は, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ のとり方に無関係に定まる.

再び [註]3.3 に話をもどそう. $\mathcal{H}$の2つの injective relolutions を $0 \to \mathcal{H} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{J}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{J}^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$, $0 \to \mathcal{H} \xrightarrow{\tau} J^0 \xrightarrow{\mathcal{E}^0} J^1 \xrightarrow{\mathcal{E}^1} \cdots$ とする. Proposition 3.1 より, 次の diagrams を可換にする map $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \beta_0, \beta_1, \cdots$ がある

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{J}^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\alpha^0"'] & \mathcal{J}^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "\alpha^1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[r, "\tau"] & J^0 \arrow[r, "\mathcal{E}^0"] & J^1 \arrow[r, "\mathcal{E}^1"] & \cdots
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & J^0 \arrow[r, "\mathcal{E}^0"] \arrow[d, "\beta^0"'] & J^1 \arrow[r, "\mathcal{E}^1"] \arrow[d, "\beta^1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[r, "\sigma"'] & \mathcal{J}^0 \arrow[r, "d^0"'] & \mathcal{J}^1 \arrow[r, "d^1"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

これらによって $\forall i \geqq 0$ について

$$\overline{\alpha^i}: \frac{\mathrm{Ker}(d^i(X))}{\mathrm{Im}(d^{i-1}(X))} \longrightarrow \frac{\mathrm{Ker}(\mathcal{E}^i(X))}{\mathrm{Im}(\mathcal{E}^{i-1}(X))}, \quad \overline{\beta^i}: \frac{\mathrm{Ker}(\mathcal{E}^i(X))}{\mathrm{Im}(\mathcal{E}^{i-1}(X))} \longrightarrow \frac{\mathrm{Ker}(d^i(X))}{\mathrm{Im}(d^{i-1}(X))}$$

($d^{-1}, \mathcal{E}^{-1} = 0$ とする.)

が induce されるが、 $\overline{\alpha^i}\circ\overline{\beta^i} = \overline{\alpha^i\circ\beta^i} = id$, $\overline{\beta^i}\circ\overline{\alpha^i} = \overline{\beta^i\circ\alpha^i} = id$ である。例えば前者については次の可換な diagram に Proposition 3.1 を適用すると、$\overline{\alpha^i\circ\beta^i}$ は $\overline{id_{J^i}}$ と一致するから明らか。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{H} & \to & J^0 & \to & J^1 & \to & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^0\circ\beta^0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^1\circ\beta^1} & & \cdots \\ 0 & \to & \mathcal{H} & \to & J^0 & \to & J^1 & \to & \cdots \end{array}$$

従って、injective resolution による定義が well defined であることがわかる。

従って、Proposition 3.1 においては α^i によって

$$\frac{Ker\,(\varepsilon^i(X))}{Im\,(\varepsilon^{i-1}(X))} \longrightarrow H^i(X, \mathcal{G})$$

なる map が induce される。

この section では以下 Čech cohomology を定義する。

X を top. space, $\mathcal{F}$ を abelian group の sheaf とする。

$\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を X の open covering 即ち、$\forall U_\alpha$ open in X で $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = X$ とする時、$C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ $(q\geq 0)$ なる complexを次のように定義する。

$C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ は $\prod_{(\alpha)\in A^{q+1}} \mathcal{F}(U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_q})$ の subgroup であって、$\prod_{(\alpha)\in A^{q+1}} \mathcal{F}(U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_q}) \ni \xi = (\xi_{\alpha_0\cdots\alpha_q})$ について $\xi\in C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \xi$ が alternating

即ち、(1) $i\neq j$ について $\alpha_i = \alpha_j$ となれば

$\xi_{\alpha_0 \cdots \alpha_q} = 0$

(2) $\forall$permutation $\sigma : (0, 1, \cdots, q) \to (\sigma(0), \cdots, \sigma(q))$

について $\xi_{\alpha_{\sigma(0)} \cdots \alpha_{\sigma(q)}} = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \xi_{\alpha_0 \cdots \alpha_q}$

従って

[註] 3.4　A をlinearly orderedになるようにしておけば、

abelian group として

$$C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \cong \prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_q} \mathfrak{F}(U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q})$$

また、complex を定義する。differentiation map ∂^q を、

$$\begin{array}{ccc} C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) & \xrightarrow{\partial^q} & C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \xi = (\xi_{\alpha_0 \cdots \alpha_q}) & \longmapsto & \partial\xi = ((\partial\xi)_{\beta_0 \cdots \beta_{q+1}}) \end{array}$$

$$(\partial\xi)_{\beta_0 \cdots \beta_{q+1}} \underset{\text{def.}}{=\!=} \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \, res(\xi_{\beta_0 \cdots \check{\beta}_i \cdots \beta_{q+1}})$$

によって定義する。

ただし、res は $U_{\beta_0} \cap \cdots \cap U_{\beta_{q+1}} \hookrightarrow U_{\beta_0} \cap \cdots \cap U_{\beta_{i-1}} \cap U_{\beta_{i+1}} \cap \cdots \cap U_{\beta_{q+1}}$ に対応するsheaf のrestriction である。

[註] 3.5　$\partial^{q+1} \cdot \partial^q = 0$ である。

定義 3.4 (Čech cohomology)

$$\check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \underset{\text{def.}}{=\!=} \frac{\mathrm{Ker}(\partial^q)}{\mathrm{Im}(\partial^{q-1})} \quad (\text{ただし } \partial^{-1} = 0)$$

〔註〕 <u>3.6</u>　X の covering として $\mathfrak{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ とし $\#(A)=n+1$ とすると 任意の sheaf $\mathfrak{F}$ に対して

$$\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})=(0) \qquad \forall q>n$$

(これは $C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ の元が alternating という条件から $C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})=0$ となるので明らか。)

<u>lemma 3.2</u>　X の 2 つの open coverings $\mathfrak{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\mathfrak{V}=\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ について $\theta: B\longrightarrow A$ なる set map があって $\forall\beta\in B$ に対して $V_\beta\hookrightarrow U_{\theta(\beta)}$ が成立したとする。この時 X 上の $\forall$ sheaf $\mathfrak{F}$ について

(1)　θ による cohomology の map θ^q $(q\geq 0)$ が自然に定まる

$$\check{H}^q(\theta):\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})\longrightarrow\check{H}^q(\mathfrak{V},\mathfrak{F}) \quad (q=0,1,2\cdots)$$

(2)　この map θ^q は $(\mathfrak{U},\mathfrak{V})$ のみに depend して、θ には independent

(証)　θ が与えられた時 $\check{H}^q(\theta)$ は次のように定義する。まず

$$\begin{array}{ccc} C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) & \xrightarrow{\bar{\theta}} & C^q(\mathfrak{V},\mathfrak{F}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \xi=(\xi_{\alpha_0\cdots\alpha_q}) & \longmapsto & \theta(\xi) \end{array}$$

を

$$\bar{\theta}(\xi)_{\beta_0\cdots\beta_q}=res\,(\xi_{\theta(\beta_0)\cdots\theta(\beta_q)})$$

によって定義する。

ここで res は $V_{\beta_0}\cap\cdots\cap V_{\beta_q}\hookrightarrow U_{\theta(\beta_0)}\cap\cdots\cap U_{\theta(\beta_q)}$ に対応する sheaf の restriction map である。

実際 $\bar{\theta}$ が well defined で、cohomology の map を induce することは

(1) ξ が alternating なら $\bar{\theta}(\xi)$ も alternating

(2) $\bar{\theta}\circ\partial_{\mathfrak{U}}^{q} = \partial_{\mathfrak{V}}^{q}\circ\bar{\theta}$

であることから容易にわかる。

次に θ, θ' を2つ与えられたとしよう。この時 $\forall q\geq 0$ に対して

$$K^{q+1}: \underset{\xi=(\xi_{\alpha_0\cdots\alpha_{q+1}})}{\overset{C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})}{\rotatebox{90}{$\in$}}} \longrightarrow \underset{K(\xi)}{\overset{C^{q}(\mathfrak{V},\mathfrak{F})}{\rotatebox{90}{$\in$}}} \quad \text{を}$$

$$K(\xi)_{\beta_0\cdots\beta_q} = \sum_{i=0}^{q}(-1)^i \, res\,(\xi_{\theta(\beta_0)\cdots\theta(\beta_i)\theta'(\beta_i)\cdots\theta'(\beta_q)})$$

と定義する。

ここで res は $V_{\beta_i}\hookrightarrow U_{\theta(\beta_i)}\cap U_{\theta'(\beta_i)}$ だから $V_{\beta_0}\cap\cdots\cap V_{\beta_q}\hookrightarrow U_{\theta(\beta_0)}\cap\cdots\cap U_{\theta(\beta_i)}\cap U_{\theta'(\beta_i)}\cap\cdots\cap U_{\theta'(\beta_q)}$ に対応する sheaf の restriction map である。

この K が $\bar{\theta}$ と $\bar{\theta}'$ の homotopy になっている。

即ち $\forall q\geq 0$ に対して $\bar{\theta}^q-\bar{\theta}'^q = K^{q+1}\circ\partial_{\mathfrak{U}}^{q}+\partial_{\mathfrak{V}}^{q-1}K^q$ $(K^0=0)$ が成立するから $\bar{\theta}, \bar{\theta}'$ は同じ $\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})\longrightarrow\check{H}^q(\mathfrak{V},\mathfrak{F})$ を与える。 Q.E.D.

<u>系 3.2.1</u>　$\mathfrak{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を X の open covering とする時

もし $\exists\alpha_0\in A$　$U_{\alpha_0}=X$　ならば

$$\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})=(0)\qquad \forall q>0$$

(証)　$\mathfrak{V}=\{X\}$ (index set $B=\{0\}$, $V_0=X$) は X の open covering である。

set maps.　$\theta: A\to B$,　$\tau: B\to A$ を $\forall\alpha\in A$ について $\theta(\alpha)=0$, $\tau(0)=\alpha_0$ によって定めると、θ, τ, $\tau\circ\theta$ はいずれも <u>lemma</u> 3.2 の条件をみたしている。

よって右の可換な diagram が得られ、

$$\begin{tikzcd}
\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \arrow[dr, "\check{H}^q(\tau)"] \arrow[d, "\check{H}^q(\tau\circ\theta)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \\
\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}) & \check{H}^q(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \arrow[l, "\check{H}^q(\theta)"]
\end{tikzcd}$$

更に lemma 3.2 より

$$\check{H}^q(\tau\theta)=\check{H}^q(id_A)=id$$

従って $\check{H}^q(\mathfrak{V},\mathcal{F})\longrightarrow\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ は onto

しかも [註] 3.6 により $\forall q>0$ について $\check{H}^q(\mathfrak{V},\mathcal{F})=0$

$\therefore$　$\forall q>0$ について $\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})=0$　Q.E.D.

<u>定義 3.5</u> (Čech resolution)

$\mathfrak{U}=(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ を X の open covering, $\mathcal{F}$ を X 上の sheaf とする時 X 上の sheaf $\underline{C}^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ を次のように定義する。$X\supset{}^\forall U$ open set について

$$\underline{C}^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})(U) = C^q(\mathfrak{U}|_U, \mathfrak{F}|_U)$$

ただし $\mathfrak{U}|_U = (U_\alpha \cap U)_{\alpha \in A}$ は U の open covering である。

また、$U \supset V$ (open sets) について、res^U_V を次のように定義する。

$\forall (\alpha) \in A$ について $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q} \cap U \hookleftarrow U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q} \cap V$ によって restriction map $\mathfrak{F}(U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q} \cap U) \longrightarrow \mathfrak{F}(U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q} \cap V)$ が定義される。そしてこれから induce される map $\prod_{(\alpha) \in A} \mathfrak{F}(U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q} \cap U) \longrightarrow \prod_{(\alpha) \in A} \mathfrak{F}(U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q} \cap V)$ は alternating element を alternating element に移すから、これによって res^U_V を定義する。

この $\underline{C}^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ は明らかに presheaf だが、実際 sheaf になることがわかる。

また、Čech の differentiation $\underline{d}^q : \underline{C}^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to \underline{C}^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ は $\underline{d}^q(U) = \partial^q : C^q(\mathfrak{U}|_U, \mathfrak{F}|_U) \longrightarrow C^{q+1}(\mathfrak{U}|_U, \mathfrak{F}|_U)$ によって定義すると、これは実際に sheaf の map になる。従って $0 \to \mathfrak{F} \xrightarrow{\varepsilon} \underline{C}^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\underline{d}^0} \underline{C}^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\underline{d}^1} \cdots$ なる sequence が定義される。

これは 系 3.2.2 よりわかるように sheaf-exact sequence であり、これを $\mathfrak{F}$ の Čech resolution と呼ぶ。

系 3.2.2　(1) 上に定義されたsequence は sheaf-exact

(2) $\underline{C}^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})(X) = C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$

sheaf differentiation $\underline{d}^i$ は Čech の diff. ∂^i を induce する。

従って Čech cohomology は Čech resolution による cohomology と言える。

(証)　(2) は明らか。(1) については $\forall x \in X$ について

$$0 \to \mathfrak{F}_x \xrightarrow{\varepsilon_x} \underline{C}^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F})_x \xrightarrow{\underline{d}^0_x} \underline{C}^1(\mathfrak{U},\mathfrak{F})_x \xrightarrow{\underline{d}^1_x} \cdots$$

が exact であることを示せばよい。

ところで U open $\ni x$ を, $\mathfrak{U}|_U$ が U を1つの member にもつように選べば, $\forall V$ open s.t. $x \in V \subset U$ について 系 3.2.1 より $\forall q > 0$ について $\check{H}^q(\mathfrak{U}|_V, \mathfrak{F}|_V) = 0$, 従って $0 \to \mathfrak{F}(V) \xrightarrow{\varepsilon(V)} \underline{C}^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F})(V) \xrightarrow{\underline{d}^0(V)} \cdots$ は exact

この inductive limit より $0 \to \mathfrak{F}_x \xrightarrow{\varepsilon_x} \underline{C}^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F})_x \xrightarrow{\underline{d}^0_x} \cdots$ は exact　　Q.E.D.

系 3.2.3　一般に $\mathfrak{U}$ を open covering of X, $\mathfrak{F}$ を X 上の sheaf とする時

canonical homomorphism $\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \longrightarrow H^q(X,\mathfrak{F})$

が存在する。

ここで'canonical'とは次の2条件が成立することをいう。

(1) sheaf の map $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}$ が与えられた時右の diagram が可換になる。

$$\begin{tikzcd} \check{H}^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\check{H}^q(\mathfrak{U},\alpha)"'] & H^q(X,\mathcal{F}) \arrow[d, "H^q(X,\alpha)"'] \\ \check{H}^q(\mathfrak{U},\mathcal{G}) \arrow[r] & H^q(X,\mathcal{G}) \end{tikzcd}$$

(2) open coverings $\mathfrak{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\mathfrak{V}=\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ について $\mathfrak{V}$ が $\mathfrak{U}$ の細分である。即ち、$\forall\beta$ について $\exists\alpha$, s.t. $U_\alpha \supset V_\beta$ なる時 lemma 3.2 により induce される map $\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^q(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ について右の diagram が可換になる。

$$\begin{tikzcd} \check{H}^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \check{H}^q(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \arrow[r] & H^q(X,\mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

(証) (exercise)

次に $\check{H}^q(X,\mathcal{F})$ を $\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ の inductive limit として定義するのであるが、$\mathfrak{U}$ としては、$\{U_x\}_{x\in X}$ ただし $x\in U_x$ なる type の open covering のみを考えればよい。それは $\forall$ open covering $\mathfrak{U}$ について上の type の covering $\mathfrak{V}$ で、$\check{H}^q(\mathfrak{V},\mathcal{F}) \cong \check{H}^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ となるものが存在するからである。

（$\mathcal{V}=\{V_x\}_{x\in X}$ としては、各点、$x\in X$ に対して $x\in U_x$ なる U_x を1つ選び $V_x=U_x$ とおけば、lemma 3.2 より上の同型が出る。）

そこで、上の type の open coverings $\mathfrak{U}=\{U_x\}_{x\in X}$, $\mathcal{V}=\{V_x\}_{x\in X}$ について $\mathfrak{U}<\mathcal{V}$ を $\forall x\in X$ について $V_x\subset U_x$ であることと定義すると、lemma 3.2 の $\theta=id_x$ として $\rho^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{V}}:\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})\longrightarrow\check{H}^q(\mathcal{V},\mathcal{F})$ なる map が定まり、$(\mathfrak{U},\rho^{\mathfrak{U}}_{\mathcal{V}})$ が inductive system をなすことは明らか。この inductive limit を $\check{H}^q(X,\mathcal{F})$ と定義するのである。即ち、

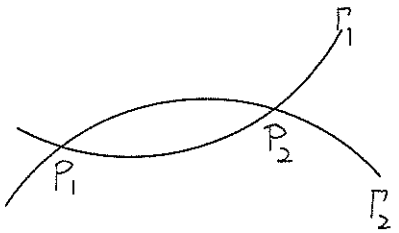
<u>定義 3.6</u>　$\check{H}^q(X,\mathcal{F})\underset{\text{def.}}{=}\varinjlim_{\mathfrak{U}}\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$

〔註〕<u>3.7</u>　一般に $\mathfrak{U}$ なる open covering について 系 3.2.3 の canonical maps によって右の diagram が可換になるような γ_q の存在がわかる。

$$\begin{tikzcd} & \check{H}^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \arrow[dl, "\text{limit}"'] \arrow[dr] & \\ \check{H}^q(X,\mathcal{F}) \arrow[rr, "\gamma_q"] & & H^q(X,\mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

<u>例 3.1</u>　しかし、この γ_q は必ずしも同型にはならない。$X=\mathbb{C}^2$ に Zariski topology をいれ、X の中に2つの irreducible complex curves Γ_1,Γ_2 を $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\{P_1,P_2\}$

(P_1, P_2 は $\mathbb{C}^2$ の異なる2点、) となるようにとる。



そして $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ に Zariski topology を入れ、X 上の sheaf K を次のように定義する。

U open set について
$$K(U) = \begin{cases} 0 & \text{if } U \cap \Gamma \neq \phi \\ \mathbb{Z} & \text{if } U \cap \Gamma = \phi \end{cases}$$

$U \supset V$ (open sets) について、$K(U) = 0$ なら null map、$K(U) = K(V) = \mathbb{Z}$ なら identity で res^U_V を定義すると、実際 K は sheaf になる。

この K について
$$\begin{array}{ccc} \check{H}^2(X, K) & \xrightarrow[can.]{\gamma_2} & H^2(X, K) \\ \wr\| & & \wr\| \\ 0 & & \mathbb{Z} \end{array}$$
が示される。

(cf. Grothendieck [2] p. 177)

〔註〕 <u>3.8</u> しかし、例えば X が separated scheme (cf. Grothendieck [1] p 277) の時は、quasi-coherent sheaf $\mathcal{F}$ については、$\check{H}^q \xrightarrow{\approx} H^q$ ($\forall q \geq 0$) が言える。separated scheme X については、"$X \supset U_1, U_2$ なる affine open sets, 即ち $i = 1, 2$ について $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ が affine scheme の時、$U_1 \cap U_2$ も affine open set である" という性質があるので、後で示される次の2つの lemma

を認めれば明らかである。（lamma 3.4で Φ として X の affine open sets の全体をとればよい）

<u>lemma 3.3</u> (lemma 4.2)

$X = \mathrm{Spec}(A)$ とした時，X 上の任意の quasi-coherent sheaf $\mathcal{F}$ について次の事実が成立する。

(1) $\check{H}^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ が $\mathcal{F}$ を generate する。

即ち，$\forall x \in X$ に対して $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{nat.} \mathcal{F}_x$ なる map の image が $\mathcal{O}_{X,x}$ - module として，$\mathcal{F}_x$ を genarate する。

(2) $\check{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall q > 0$

(cf. §4)

<u>lemma 3.4</u> (Cartan's lemma)

X を topological space，$\mathcal{F}$ を X 上の abelian group の sheaf 次の3つの条件をみたす X の open subsets の family $\{U_\varphi\}_{\varphi \in \Phi}$ が存在するとする

(1) $\{U_\varphi\}_{\varphi \in \Phi}$ が X の open sets の base になっている。

(2) $\forall \varphi, \forall \varphi' \in \Phi$ について $\exists \psi \in \Phi$ s.t.

$U_\varphi \cap U_{\varphi'} = U_\psi$

(3) $\check{H}^q(U_\varphi, \mathcal{F}|_{U_\varphi}) = 0 \quad \forall q > 0 \quad \forall \varphi \in \Phi$

この時　$\forall q \geq 0$　について

$$\check{H}^q(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\approx} H^q(X, \mathcal{F})$$

(cf. §7)

§4. Coherent sheaves と Quasi-coherent sheaves.

X を ringed space とする時、X 上の abelian group の sheaf $\mathcal{F}$ が $\mathcal{O}_X$-module であるというのは、$^\forall U$ open set について $\mathcal{F}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$-module で、$\mathcal{O}_X(U)\times\mathcal{F}(U) \xrightarrow{m(U)} \mathcal{F}_X(U)$ をその scalar multiplication を定義する map とする時 $^\forall U \supset {}^\forall V$(open sets) について、右の diagram が可換になる事である。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(U)\times\mathcal{F}(U) \arrow[r, "m(U)"] \arrow[d, "\mathrm{res}_V^U\times\mathrm{res}_V^U"] & \mathcal{F}_X(U) \arrow[d, "\mathrm{res}_V^U"] \\ \mathcal{O}_X(V)\times\mathcal{F}(V) \arrow[r, "m(V)"] & \mathcal{F}_X(V) \end{tikzcd}$$

以下では、X を scheme として話をすすめる。

<u>定義 4.1</u>　$\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}$ が quasi-coherent であるとは

$^\forall x\in X$ について $^\exists U$ open $\ni x$

$$\oplus^I\mathcal{O}_X|_U \xrightarrow{\lambda} \oplus^J\mathcal{O}_X|_U \to \mathcal{F}|_U \to 0$$ なる sheaf-exact sequence

が存在することである。

ただし I, J は勝手な集合（有限と限らない）である。

<u>定義 4.2</u>　$\mathcal{O}_X$-module が coherent であるとは、定義 4.1 の exact sequence として、特に I, J が有限集合であるような exact sequence が存在することである。

[註] <u>4.1</u>　(sheaf の directsum の定義)

$(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda\in A}$ を X 上の abelian group の sheaves からなる

family とした時、$\bigoplus_{\lambda\in A}\mathcal{F}_\lambda$ なる sheaf を、次のようにして定義される presheaf $\mathcal{F}^\circ$ の sheafification として定義する。

$$\mathcal{F}^\circ\begin{cases} {}^\forall\text{open set } U \text{ に対し、} \mathcal{F}^\circ(U) = \bigoplus_{\lambda\in A}(\mathcal{F}_\lambda(U)) \\ \text{res は natural に定義する。} \end{cases}$$

従って特に $\forall x\in X$ について

$$(\bigoplus_{\lambda\in A}\mathcal{F}_\lambda)_x = \bigoplus_{\lambda\in A}(\mathcal{F}_\lambda)_x \text{ が成立する。}$$

<u>例 4.1</u>　$X = \mathrm{spec}(A)$ とし、F を任意の A-module とした時、X 上の sheaf $\tilde{F}$ を、次のように定義された T° 上の presheaf F° の sheafification として、定義する。

$$F^\circ\begin{cases} X\supset U_f \text{ なる open set に対して } F^\circ(U_f) = F_f = F\otimes_A A_f \\ U_f\supset U_g \text{ なる open sets に対して natural に決まる} \\ \quad \text{map } \varphi : A_f \to A_g \text{ によって res} : F^\circ(U_f)\to F^\circ(U_g) \\ \quad \text{を } \mathrm{id}\otimes\varphi \text{ と定義する。} \end{cases}$$

この時には $\tilde{F}$ は quasi-coherent になる。

実際 $\oplus^I A \to \oplus^J A \to F \to 0$ を A-modules の exact sequence とする時、

$$\oplus^I\mathcal{O}_X \to \oplus^J\mathcal{O}_X \to \tilde{F} \to 0 \text{ は sheaf-exact sequence になる。}$$

(証)　$\forall x\in X$ について右の diagram の上の行が exact であることを示せばよいが、

$$\begin{array}{ccccccc} (\oplus^I\mathcal{O}_X)_x & \to & (\oplus^J\mathcal{O}_X)_x & \to & \tilde{F}_x & \to & 0 \\ \cong ① & & \cong ② & & \cong ③ & & \\ \oplus^I A_p & \to & \oplus^J A_p & \to & F\otimes A_p & \to & 0 \end{array}$$

x に対応する A の prime ideal を $\mathfrak{p}$ とする時. ①,②の同型は[註] 4.1 及び $(\mathcal{O}_X)_x = A_{\mathfrak{p}}$ より示され. ③の同型は $\tilde{F}$ の定義及び "inductive limit と tensor product の可換性" から得られる。下の行の exactness は "$A_{\mathfrak{p}}$ が A-module として flat である" (c.f. Northcott [1] p.170) 事から明らか。したがって上の行も exact. Q.E.D.

[註] 4.2 $X = \mathrm{Spec}(A)$ は quasi compact 即ち $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ なる open covering がある時 $\exists \lambda_1,\dots,\lambda_s \in \Lambda$ s.t. $X = U_{\lambda_1}\cup\dots\cup U_{\lambda_s}$

(証) $U_\lambda = U_{I_\lambda}$ なる A の ideal I_λ をとると $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_{I_\lambda} = U_I$ である. ただし $I = \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$. $X = U_I$ ということは. I を含む prime ideal がない. 即ち $I = A$ を意味する. 従って $1\in I$ $\therefore \exists \lambda_1,\dots,\lambda_s \in \Lambda$ $1 \in I_{\lambda_1}+\dots+I_{\lambda_s}$ $\therefore A = I_{\lambda_1}+\dots+I_{\lambda_s}$
従って $\bigcup_{i=1}^{s} U_{\lambda_i} = \bigcup_{i=1}^{s} U_{I_{\lambda_i}} = U_A = X$ Q.E.D.

Lemma 4.1 $X = \mathrm{Spec}(A)$ とし. F は A-module とする.

この時 $\forall f\in A$ について. $\tilde{F}(U_f) = F_f = F\otimes A_f$

(証) まず $f = 1$ を仮定してもさしつかえない. それは $(U_f, \mathcal{O}_X|_{U_f}) \cong \mathrm{Spec}(A_f)$ なる同一視の下に. $\tilde{F}|_{U_f} \cong (\widetilde{F_f})$ において U_f-section をとれば $\tilde{F}(U_f) \cong (\widetilde{F_f})(U_1)$. 従って $(\widetilde{F_f})(U_1) = F_f$ を認めれば $\tilde{F}(U_f) = F_f$. まず sheafification

によってできる natural な map $F^{\circ}(X) = F \xrightarrow{\varphi(X)} \tilde{F}(X)$ を考える.

(1) φ が injection であること. $a \in F$ について $\varphi(a) = 0$ とする。即ち $\forall x \in X$ について $a_x = 0$, 従って $\exists U_f \ni x$ s.t. a は $A \to A_f$ なる map によって 0 に移る. 従って $\exists n > 0$ $f^n a = 0$. しかも [註] 4.2 より X は quasi compact だから このような U_f の有限個で X を cover できる。即ち $X = \bigcup_{i=1}^{s} U_{f_i}$ しかも $\exists n$, $\forall i$ について $f_i^n a = 0$. $X = \bigcup_{i=1}^{s} U_{f_i} = \bigcup_{i=1}^{s} U_{f_i^n}$ より [註] 4.2 と同様に $\exists g_1, \ldots, g_s \in A$ $1 = f_1^n g_1 + \ldots + f_s^n g_s$

従って $a = (f_1^n g_1 + \ldots + f_s^n g_s) a = 0$

(2) φ が onto であること. $\tilde{F}(X) \ni \xi$ をとると $\forall x \in X$ について $\exists f \in A$, $\exists a \in F^{\circ}(U_f) = F_f$ s.t. $\xi|_{U_f} = \varphi(U_f)(a)$, ただし $\varphi(U_f)$ は $F^{\circ}(U_f) \to \tilde{F}(U_f)$ なる natural な map. X は quasi compact であることから. このような U_f の有限個で X を cover できる. つまり次のような $f_1, \ldots, f_s \in A$ が存在する。

$$X = \bigcup_{i=1}^{s} U_{f_i}, \quad \exists a_i \in A_{f_i} \quad (i = 1, \ldots, s) \quad \xi|U_{f_i} = \varphi(U_{f_i})(a_i)$$

ここで $N \in \mathbb{N}$ を十分大きくとると $a_i = \dfrac{b_i}{f_i^N}$ なる $b_i \in A$ が存在する. 又 $\forall i, j$ について

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{res}^{U_{f_i}}_{U_{f_if_j}} \varphi(U_{f_i})(a_i) & = & \mathrm{res}^{U_{f_j}}_{U_{f_if_j}} \varphi(U_{f_j})(a_j) \\ \| & & \| \\ \varphi(U_{f_if_j})(\mathrm{res}^{U_{f_i}}_{U_{f_if_j}}(a_i)) & & \varphi(U_{f_if_j})(\mathrm{res}^{U_{f_j}}_{U_{f_if_j}}(a_j)) \end{array}$$

従って(1)により $A_{f_if_j}$ においては $a_i = a_j$. よって上に述べた N を更に十分大きくとって $\forall_{i,j}$ について

$(f_if_j)^N(b_if_j^N - b_jf_i^N) = 0$ in A

つまり $f_i^Nb_if_j^{2N} = f_i^{2N}b_jf_j^N$ ..... $(*)_{ij}$

次に $X = \bigcup_{i=1}^{s} U_{f_i} = \bigcup_{i=1}^{s} U_{f_i^{2N}}$ より $\exists g_1,\dots,g_s \in A$

s.t. $1 = \sum_{i=1}^{s} g_if_i^{2N}$ そこで i をfixして $\sum_j (*)_{ij}\times g_j$ を考えると $f_i^Nb_i = f_i^{2N}\sum_{j=1}^{s} b_jf_j^Ng_j$. $(**)$

$\sum_{j=1}^{s} b_jf_j^Ng_j = a \in A$ とおくと $(**)$ より A_{f_i} のえとして

$a_i = \dfrac{b_i}{f_i^N} = a$ 従って ξ と $\varphi(x)(a)$ は sheaf の identity condition によって一致する

つまり $\xi = (\varphi(x))(a)$ Q.E.D.

これで §3 で述べた lemma 3.3 を証明できる。

<u>lemma 4.2</u> (⊃ lemma 3.3) $X = \mathrm{Spec}(A)$ とした時, X 上の任意の quasi-coherent sheaf $\mathcal{F}$ について次の事実が成立する。

(1) $\check{H}^0(X,\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ が $\mathcal{F}$ を generate する.

即ち, $\forall x \in X$ に対して $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\mathrm{nat}} \mathcal{F}_x$ なる map の image が

$\mathcal{O}_{X,x}$-module として $\mathcal{F}_x$ を generate する。

(2) $\mathcal{F}(X) \ni \xi$, $g \in A$ について $\xi|_{U_g} = 0$ なら $\exists n > 0$

$g^n \xi = 0$ in $\mathcal{F}(X)$

(3) $\check{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0 \qquad \forall q > 0$

(証)(0) X の有限な open covering $\mathcal{U}_0 = \{U_{f_i}\}_{i \in I_0}$ (I_0 は finite set) が存在して $\exists A_{f_i}$-module F_i s.t. $\mathcal{F}|_{U_{f_i}} = \tilde{F}_i$ をできることを示す.

$\mathcal{F}$ が quasi-coherent だから $\forall x \in X$ について $A \ni f$ が存在して $U_f \ni x$ かつ $\oplus^I \mathcal{O}_X|_{U_f} \xrightarrow{\lambda} \oplus^J \mathcal{O}_X|_{U_f} \to \mathcal{F}|_{U_f} \to 0$ なる exact sequence が存在する.

そこで A_f-module F を $\mathrm{coker}[\lambda(U_f)]$ と定義する. 即ち lemma 4.1 より

$$\oplus^I A_f \xrightarrow{\lambda(U_f)} \oplus^J A_f \to F \to 0 \text{ が exact.}$$

従って例 4.1 により $\oplus^I \mathcal{O}_X|_{U_f} \xrightarrow{\widetilde{\lambda(U_f)}} \oplus^J \mathcal{O}_X|_{U_f} \to \tilde{F} \to 0$ が sheaf-exact. ところが $\lambda = \widetilde{\lambda(U_f)}$ なぜなら $\forall U_g \subset U_f$ について. 右の diagram で (*) の所に $\lambda(U_g)$ を入れても. $\widetilde{\lambda(U_f)}(U_g)$ を入れても diagram は可換になる. しかるにそのような A_{fg}-module hom. はただ1つ(何故か? exercise). 従って $\lambda = \widetilde{\lambda(U_f)}$. よって

$$\begin{array}{ccc} \oplus^I A_f & \xrightarrow{\lambda(U_f)} & \oplus^J A_f \\ \text{res}\downarrow & & \downarrow\text{res} \\ (\oplus^I A_f)_g & \xrightarrow{(*)} & (\oplus^J A_f)_g \end{array}$$

$\mathcal{F}|_{U_f} = \tilde{F}$. さてこのような U_j で X を cover すると X が quasi-compact であることから、求める covering の存在がわかる。

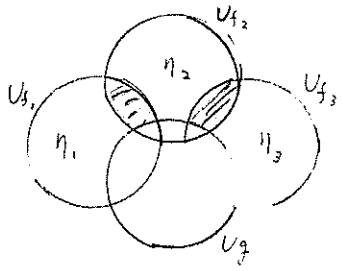
(1) (0) で与えた covering $\mathcal{U}_0$ をとる。さて、(1)を証明するには、次の命題(**)を示せば十分である。

(**): $\forall g \in A$, $\forall \xi \in \mathcal{F}(U_g)$ について $\exists N > 0$ $g^N f = \mathrm{res}(\eta)$

$\exists \eta \in \mathcal{F}(X)$、(証) $\forall i$ について $\mathcal{F}|_{U_{f_i}} = \tilde{F}_i$ だから lemma 4.1により $\mathcal{F}(U_{f_i} \cap U_g) = \mathcal{F}(U_{f_i g}) = [\mathcal{F}(U_{f_i})]_{(f_i g)}$ であることを用いれば

$$\exists n > 0 \quad \exists \eta_i \in \mathcal{F}(U_{f_i}) \quad \text{s.t.} \quad g^n \xi = \mathrm{res}(\eta_i)$$

しかも I_0 は有限集合だから、この n は i に無関係にとれる。このように定めた η_i は、例えば図の四部では互いに一致するとは言えないので次のように修正する。



$\forall i, j$ について

$$g^N \xi|_{U_{f_i f_j g}} = \eta_i|_{U_{f_i f_j g}} = \eta_j|_{U_{f_i f_j g}}$$

しかも lemma 4.1 により $\mathcal{F}(U_{f_i f_j g}) = [\mathcal{F}(U_{f_i f_j})]_g$

従って $\exists \ell > 0$ $g^\ell \eta_i|_{U_{f_i f_j}} = g^\ell \eta_j|_{U_{f_i f_j}}$

I_0 が有限集合だから、この ℓ は i, j に無関係にとれる。

よって sheaf の gluability condition によって $\exists \eta \in \mathcal{F}(X)$ $\forall i, \forall j$ について $\eta|_{U_{f_i f_j}} = g^\ell \eta_i|_{U_{f_i f_j}} = g^{\ell+n} \xi|_{U_{f_i f_j}}$

よって $N = \ell + n$ とおけばよい。 Q.E.D.

(2) (0)で与えたcovering $\mathcal{U}_0$ をとる。$\mathcal{F}|U_{f_i} = \widetilde{F}_i$ だから lemma 4.1 より

$$\mathcal{F}(U_{f_i} \wedge U_g) = \mathcal{F}(U_{f_i g}) = [\mathcal{F}(U_{f_i})]_g$$

よって $\xi|U_{f_i} \wedge U_g = 0$ より $\exists n \quad g^n\xi|U_{f_i} = 0$

I_0 は有限だから n は i に無関係に定められる。

よって sheaf の identity condition より $g^n\xi = 0$ in $\mathcal{F}(X)$

(3) $\check{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall q > 0$ を示すには、任意の open covering $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ で $\mathcal{U}$ は $\mathcal{U}_0$ の細分、I が finite, 各 i について $\exists f_i \in A \quad U_i = U_{f_i}$ となっているような $\mathcal{U}$ に対して、$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall q > 0$ を示せばよい。

(それは、$\forall$open covering $\mathcal{U}$ に対して、上の性質をもつ covering $\mathcal{U}$ で $\mathcal{U}$ の細分になっているものが存在することから明らか。)

すると、$\mathcal{U}$ が $\mathcal{U}_0$ の細分であることにより、$\forall i$ について $\exists F_i \quad A_{f_i}$-module s.t. $\mathcal{F}|U_i \cong \widetilde{F}_i$. さて $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ を示すには、次の命題(***)を示せばよい。

$$(***): \begin{cases} \forall \xi = (\xi_{i_0 \cdots i_q}) \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \quad q \geq 1 \quad \text{について} \\ d\xi = 0 \quad \text{ならば} \quad \exists \zeta \in C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \quad d\zeta = \xi \end{cases}$$

$\forall (i_0, \ldots, i_q) \in I^{q-1}$ に対して $\mathcal{F}|U_{i_0} = \widetilde{F_{i_0}}$ だから lemma 4.1 により

$\exists n > 0, \exists \eta^{i_0}_{i_1\cdots i_q} \in \mathcal{F}(U_{i_1}\wedge\cdots\wedge U_{i_q})$

s.t. $f_{i_0}^n \cdot \xi_{i_0\cdots i_q} = \mathrm{res}(\eta^{i_0}_{i_1\cdots i_q})$

しかも n を十分大きくとれば $\eta^{i_0}_{i_1\cdots i_q}$ は $i_1,\cdots,i_q$ について alternating にとれる. しかも I は有限だから. n は $(i_0,\cdots,i_q)$ に無関係にとれる.

又 $d\xi = 0$ より. $\forall i \in I$, $\forall (i_0,\cdots,i_q) \in I^{q+1}$ について

$(d\xi)_{ii_0\cdots i_q} = 0$ より

$$\xi_{i_0 i_1\cdots i_q} = \sum_{\lambda=0}^{q} (-1)^\lambda \xi_{ii_0\cdots \check{i}_\lambda \cdots i_q} \quad \text{in} \quad U_i \wedge U_{i_1} \wedge \cdots \wedge U_{i_q}$$

よって $f_i^n \xi_{i_0 i_1\cdots i_q} = \sum_{\lambda=0}^{q} (-1)^\lambda \mathrm{res}(\eta^i_{i_0\cdots \check{i}_\lambda \cdots i_q})$ in

$U_i \wedge U_{i_0} \wedge \cdots \wedge U_{i_q}$

従って. I が有限集合. $\mathcal{F}|U_i \cong \tilde{F}_i$ であることにより

上と同様に. i に無関係に $\ell > 0$ をとり

$f_i^{n+\ell} \xi_{i_0 i_1\cdots i_q} = \sum_{\lambda=0}^{q} (-1)^\lambda \mathrm{res}(f_i^\ell \eta^i_{i_0\cdots \check{i}_\lambda \cdots i_q})$ in

$U_{i_0} \wedge \cdots \wedge U_{i_q}$. 結局 $n+\ell$ を改めて n, $f_i^\ell \eta^i_{i_0\cdots \check{i}_\lambda \cdots i_q}$ を改めて $\eta^i_{i_1\cdots \check{i}_\lambda \cdots i_q}$ とおけば

$$f_i^n \cdot \xi_{i_0\cdots i_q} = \sum_{\lambda=0}^{q} (-1)^\lambda \mathrm{res}(\eta^i_{i_0\cdots \check{i}_\lambda \cdots i_q}) \quad \text{in}$$

$$U_{i_0} \wedge \cdots \wedge U_{i_q} \quad \cdots (****)^i_{i_0\cdots i_q}$$

$X = \bigcup_{i\in I} U_{f_i} = \bigcup_{i\in I} U_{f_i^n}$ より [註] 4.2 と同様にして $\forall i \in I$ について $\exists g_i \in A$ s.t. $\sum_{i\in I} f_i^n g_i = 1$. そこで

$\forall (j_0,\cdots,j_{q-1}) \in I^q$ について

$$\zeta_{j_0\cdots j_{q-1}} = \sum_{i\in I} g_i \eta^i_{j_0\cdots j_{q-1}} \in \mathcal{F}(U_{j_0} \wedge \cdots \wedge U_{j_{q-1}})$$

とおけば $\zeta = (\zeta_{j_0 \cdots j_{q-1}}) \in C^{q-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ かつ

$\sum_{i \in I} g_i \times (****)^i_{i_0 \cdots i_q}$ より $d\zeta = \xi$ Q.E.D.

lemma 4.2 によって $X = \mathrm{Spec}(A)$ の場合には quasi-coherent sheaf というのは例 4.1 の type のものしかないことがわかる。

<u>lemma 4.2 の系</u> A-modules の category から $X = \mathrm{Spec}(A)$ 上の quasi-coherent sheaves の category への functor $\sim$ は category の equivalence を与える。即ち quasi-coherent sheaf $\mathcal{F}$ に A-module $\mathcal{F}(X)$ を対応させる functor を Γ とおくと、

(1) $^\forall F$: A-module について canonical な同型 $F \underset{\alpha}{\overset{\approx}{\to}} \Gamma(\tilde{F})$ がある。

(2) $^\forall \mathcal{F}$: quasi-coherent sheaf について canonical な同型 $\widetilde{\Gamma(\mathcal{F})} \underset{\beta}{\overset{\approx}{\to}} \mathcal{F}$ がある。

(証)(1) lemma 4.1 より明らか.

(2) lemma 4.2 の (1) より β は surjective.

β が injective であることを示すには "$^\forall g \in A$ について $\beta(U_g)$ が injective" を示せばよい。まず、右の可換な diagram において $\beta(X)$ が isom. であることは lemma 4.1 より明らか。そこで

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\Gamma(\mathcal{F})}(X) \arrow[r, "\beta(X)", "\approx"'] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & \mathcal{F}(X) \arrow[d, "\mathrm{res}"'] \\ \widetilde{\Gamma(\mathcal{F})}(U_g) \arrow[r, "\beta(U_g)"'] & \mathcal{F}(U_g) \end{tikzcd}$$

$\check{\xi} \in \mathrm{Ker}\ \beta(U_g)$ とすると $^\exists n > 0$ $g^n \xi = \mathrm{res}(\eta)$, $\eta \in \widetilde{\Gamma(\mathcal{F})}(X)$

$\therefore \beta(X)(\eta)|U_g = 0$ lemma 4.2 の (2) により

$\exists m > 0 \quad g^m\beta(X)(\eta) = \beta(X)(g^m\eta) = 0 \quad \therefore g^m\eta = 0$

$\therefore 0 = \mathrm{res}(g^m\eta) = g^{m+n}\xi \quad g^{-1} \in \mathcal{O}_X(U_g)$ より $\xi = 0$

$\therefore \beta(U_g)$ は injective Q.E.D.

§5. Spectral sequences

§3 で述べた、Cartan's lemma の証明等に、よく用いられる spectral sequence を説明する。

<u>定義 5.1</u> double complex とは、$K=\{K^{p,q}, d'^{p,q}, d''^{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ からなるものである。

ただし、$\forall p,q\in\mathbb{Z}$ について $K^{p,q}$ は abelian group であり、group homomorphisms $d'^{p,q}: K^{p,q}\to K^{p+1,q}$, $d''^{p,q}: K^{p,q}\to K^{p,q+1}$ は次の条件を満たしている。 $d'd'=0$, $d''d''=0$,

$$d'd''+d''d'=0.$$

この double complex から次のようにして complex $\{K^n, d^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が定義される。 $K^n=\bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$

total differentiation operator d は differentiation operaters d', d'' により $d=d'+d''$ と定義される。

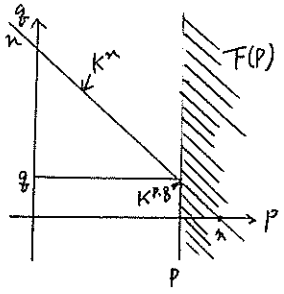
<u>定義 5.2</u> double complex K に対して $\forall n\in\mathbb{Z}$ について K の n-th cohomology を

$$H^n(K)=\frac{\mathrm{Ker}\,(K^n\xrightarrow{d^n}K^{n+1})}{\mathrm{Im}\,(K^{n-1}\xrightarrow{d^{n+1}}K^n)}$$ と定義する。

この cohomology が自然な filtration をもつことを示そう。

まず complex K の filtration を導入する。

$$F(p) = \bigoplus_{\substack{p' \geq p \\ q' \in \mathbb{Z}}} K^{p',q'}$$



すると、$K^n \supset \cdots \supset F(p) \supset F(p+1) \supset \cdots \supset 0$ なる filtration が定まる。

この時 $H^n_{(p)}(K) = \{H^n(K)$ の元で、$K^n \cap F(p)$ の元で代表されるもの$\}$ と定義すると cohomology $H^n(K)$ の filtration

$H^n(K) \supset \cdots \supset H^n_{(p)}(K) \supset H^n_{(p+1)}(K) \supset \cdots \supset 0$ が定まる。

<u>定義 5.3</u>　　$E^{p,q}_\infty = H^{p+q}_{(p)} / H^{p+q}_{(p+1)}$　$(p, q \in \mathbb{Z})$

特に "$K^{p,q} = 0$　$(p < 0$ or $q < 0)$" の場合を考えると、

Spectral sequence とは次のようなものである。

1)　$(0) = H^n_{(n+1)} \subset H^n_{(n)} \subset \cdots \subset H^n_{(0)} = H^n$ によって

H^n を $(E^{n,0}_\infty, E^{n-1,1}_\infty, \cdots, E^{0,n}_\infty)$ と分解する。

2)　各 $E^{p,q}_\infty$ を step by step に approximate する

即ち、各 (p,q) に対して、以下の如く定義される abelian groups の sequence $E^{p,q}_1, E^{p,q}_2, \cdots, E^{p,q}_r, \cdots$ で $E^{p,q}_\infty$ に<u>収束</u>するものを作るのである。

[註] <u>5.1</u>　"$K^{p,q} = 0$, $\forall p < 0$ or $\forall q < 0$" という条件の下では、収束という意味は非常に単純なものになる。即ち、各 (p,q) について（(p,q) に depend して）自然数 N が定まり

$$E^{p,q}_N = E^{p,q}_{N+1} = \cdots = E^{p,q}_\infty.$$

さて、$E^{p,q}_r$ は次のように定義される。(定義には "$\cdots$" の

条件は不要.)

$Z_\infty^{p,q}=\{\xi\in K^{p+q}\cap F(p)\mid d\xi=0\}$, $B_\infty^{p,q}=\{d\eta\mid \eta\in K^{p+q-1},$

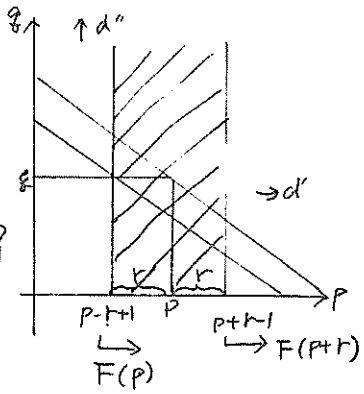
$d\eta\in F(p)\}$ とおくと、定義より

$E_\infty^{p,q}=Z_\infty^{p,q}/B_\infty^{p,q}+Z_\infty^{p+1,q-1}$ であることがわかる.

そこで $F(p-r+1)/F(p+r)$ の中で cohomology を考え、

そのcomplexの中で E_∞ を考え、

それを E_r と呼ぶ



即ち、$Z_r^{p,q}=\{\xi\in K^{p+q}\cap F(p)\mid d\xi\in F(p+r)\}$

$B_r^{p,q}=\{d\eta\mid \xi\in K^{p+q-1}\cap F(p+r+1), d\eta\in F(p)\}$

とした時 $E_r^{p,q}=\dfrac{Z_r^{p,q}}{B_r^{p,q}+Z_{r-1}^{p+1,q-1}}$ $(r=1,2,\cdots)$

註5.2 固定されたpに対して、$(K^{p,\cdot},d'')$ なるcomplex を、abelian groups $\{K^{p,q}\}_{q\in\mathbb{Z}}$ とdifferentiation operator d" によって定義すると、$r=1$ の時 $E_1^{p,q}=H^q(K^{p,\cdot},d'')$

基本定理 5.1

1) 各rについて $\{E_r^{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ には、d によって map

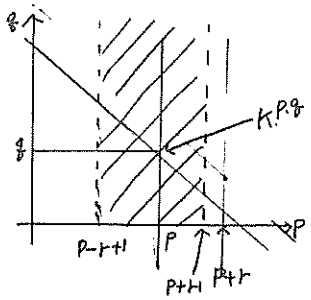
$E_r^{p,q}\xrightarrow{d_r^{p,q}}E_r^{p+r,q-r+1}$ が induce され、$d_r\cdot d_r=0$ が成立する.

2) 各rについて、$E_{r+1}^{p,q}=\dfrac{\mathrm{Ker}(d_r^{p,q})}{\mathrm{Im}(d_r^{p-r,q+r-1})}$

証) 1) $d(Z_r^{p,q}) = B_{r+1}^{p+r,\,q-r+1} \subset Z_r^{p+r,\,q-r+1}$

更に $d(B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,\,q-1}) \subset B_r^{p+r,\,q-r+1}$

よって d は $E_r^{p,q} = \dfrac{Z_r^{p,q}}{B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,\,q-1}} \xrightarrow{d_r^{p,q}} \dfrac{Z_r^{p+r,\,q-r+1}}{B_r^{p+r,\,q-r+1} + Z_{r-1}^{p+r+1,\,q-r}}$



を induce する.

2) $\mathrm{Ker}(d_r^{p,q}) = Z_{r+1}^{p,q}$ moduls $(B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,\,q-1})$

従って $\mathrm{Ker}(d_r^{p,q}) = \dfrac{Z_{r+1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,\,q-1}}{B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,\,q-1}} = \dfrac{Z_{r+1}^{p,q}}{B_r^{p,q} + (Z_{r+1}^{p,q} \cap Z_{r-1}^{p+1,\,q-1})}$

$Z_{r+1}^{p,q} \cap Z_{r-1}^{p+1,\,q-1} = Z_r^{p+1,\,q-1}$ であるから

$\mathrm{Ker}(d_r^{p,q}) = \dfrac{Z_{r+1}^{p,q}}{B_r^{p,q} + Z_r^{p+1,\,q-1}}$

又 $\mathrm{Im}(d_r^{p-r,\,q+r-1}) = d\,Z_r^{p-r,\,q+r-1}$ moduls $(B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,\,q-1})$

$= B_{r+1}^{p,q}$ moduls $(B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,\,q-1})$

よって $\dfrac{\mathrm{Ker}(d_r^{p,q})}{\mathrm{Im}(d_r^{p-r,\,q+r-1})} = \dfrac{Z_{r+1}^{p,q}}{B_{r+1}^{p,q} + Z_r^{p+1,\,q-1}} = E_{r+1}^{p,q}$

(Q.E.D.)

double complex (K'', d', d'') がよえられた時

各 p について $C^p = \mathrm{Ker}(K^{p,0} \xrightarrow{d''} K^{p,1}) = E_1^{p,0}$ と定義すると.

d も d' も 同じ map . $d' : C^p \longrightarrow C^{p+1}$ を induce する.

これによって. $C = (C, d')$ が complex をなす.

注 5.3 上記 C によって $H^p(C)$ をつくると,

$H^p(C) = E_2^{p,0}$ になる. 又、$C^p \hookrightarrow K^{p,0}$ によって natural map.

$H^p(C) \xrightarrow{\alpha^p} H^p(K)$ が定まる. 以後 "$K^{p,q} = 0 \ \forall p<0$ or $\forall q<0$"

とすると $E_\infty^{p,0} \hookrightarrow H^p(K)$ で.

(1) $H^p(C) = E_2^{p,0} \twoheadrightarrow E_3^{p,0} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_\infty^{p,0} \hookrightarrow H^p(K)$ なるsequence

がある.

∵ $r \geqq 2$ の時 $d(E_r^{p,0}) = 0$ から. $E_{r+1}^{p,0}$ は $E_r^{p,0}$ のquotient

group になっている.

(2) $E_1^{0,q} \hookleftarrow E_2^{0,q} \hookleftarrow E_3^{0,q} \hookleftarrow \cdots \hookleftarrow E_\infty^{0,q} \leftarrow H^q(K)$ なる sequence

がある.

∵ $r \geqq 1$ の時 $K^{-r,q+r-1} = 0$ より、$\mathrm{Im}(d_r^{-r,q+r-1}) = 0$. これから

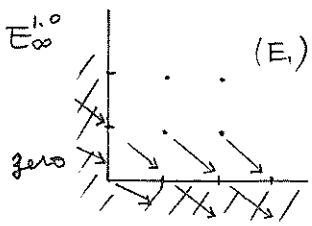
$E_{r+1}^{0,q}$ は $E_r^{0,q}$ の subgroup になっている.

(3) 一般に

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(C) \arrow[r, "\alpha^1"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & H^1(K) \arrow[r, "\text{辺のmap}"] & E_2^{0,1} \arrow[r] \arrow[dr, "d_2^{0,1}"'] & H^2(C) \arrow[r, "\alpha^2"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & H^2(K) \\
& E_2^{1,0} & & & E_2^{2,0} &
\end{tikzcd}$$

なる exact sequence がある

(証) $H^1(C) \cong E_2^{1,0}$. 右図と定理5.1 から $E_2^{1,0} \cong E_\infty^{1,0}$

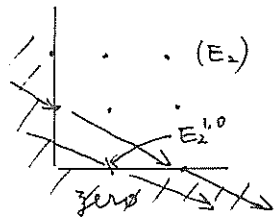


$H^1(K) = H^1_{(0)}(K) \supset H^1_{(1)}(K) \supset H^1_{(2)}(K) = 0$

E_∞ の定義にもどれば

$0 \to E_\infty^{1,0} \to H^1(K) \to E_\infty^{0,1} \to 0$ が exact

右図と定理5.1 から $E_\infty^{0,1} \cong E_3^{0,1}$, $E_\infty^{2,0} \cong E_3^{2,0}$



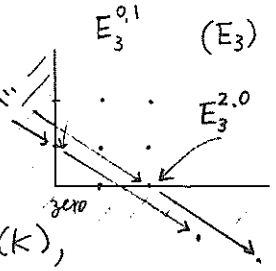
定理5.1 より $0 \to E_3^{0,1} \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \to E_3^{2,0} \to 0$

が exact

又右図及び定理5.1から　$E_3^{2,0} \cong E_\infty^{2,0} \hookrightarrow H^2(K)$

以上をあわせて

$0 \to H^1(C) \to H^1(K) \to E_2^{0,1} \to H^2(C) \to H^2(K)$ が



(4) 従って特に $E_2^{0,1}=0$ ならば $H^1(C) \cong H^1(K)$,

$H^2(C) \hookrightarrow H^2(K)$

[註] <u>5.4</u>　$\{B^{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ と、$\{D^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ なる abelian groups の families について $B^{p,q} \underset{P}{\Longrightarrow} D^n$ というのを次のように定義する。

（ただしこれは、一般的な定義より強い条件が加わっている。詳しくは、Cartan & Eilenberg [1] p.330 参照。）

定義5.1にあげたような double complex K が与えられていて、$K^{p,q}=0$ $\forall p<0$ or $\forall q<0$ が成立するとする。そして、$\forall p, \forall q \in \mathbb{Z}$ について $B^{p,q} \cong E_2^{p,q}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ について $D^n \cong H^n(K)$。

§6. Spectral sequences の application I

まず、functor が与えられた時、その derived functor なるものを定義しよう。

$\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ を abelian categories (この言葉がわからなければ、例えば、abelian groups の category, ある top space 上の abelian group の sheaves の category, etc. と考えればよい。) そして $\mathcal{C} \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{C}'$ を covariant な additive left exact functor とする。

ただし、covariant な additive functor Γ というのは、次のようなものである。

$A \in ob\,\mathcal{C}$ に対して $\Gamma(A) \in ob\,\mathcal{C}'$ を対応させ $A, B \in ob\,\mathcal{C}$, $f \in Hom(A, B)$ に対して $\Gamma(f) \in Hom(\Gamma(A), \Gamma(B))$ を対応させ、それらが次の2条件をみたす。

(1) $A, B, C \in ob\,\mathcal{C}$, $f \in Hom(A, B)$, $g \in Hom(B, C)$ について

$$\Gamma(g \circ f) = \Gamma(g) \circ \Gamma(f) \in Hom(\Gamma(A), \Gamma(C))$$

(2) $A, B \in ob\,\mathcal{C}$, $f, g \in Hom(A, B)$ について

$$\Gamma(f+g) = \Gamma(f) + \Gamma(g) \in Hom(\Gamma(A), \Gamma(B))$$

そして、covariant な additive functor Γ が left exact というのは次のように定義する。

$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ なる $\mathcal{C}$ の exact sequence に対して

$0 \to \Gamma(A) \xrightarrow{\Gamma(\alpha)} \Gamma(B) \xrightarrow{\Gamma(\beta)} \Gamma(C)$ が $\mathcal{C}'$ の exact sequence になる.

ここで次の仮定を設ける.

仮定: $\mathcal{C}$ は "sufficiently many injectives" をもつ (cf. 定義 3.2, [註] 3.2)。

この仮定の下に Γ の i-th right derived functor $R^i\Gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ なる covariant な additive functor を次のように定義する。

$\forall \mathcal{F} \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ に対して、その injective resolution

$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{J}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{J}^2 \xrightarrow{d^2} \cdots$ (cf. [註] 3.2)

をとると、$\Gamma(\mathcal{J}^0) \xrightarrow{\Gamma(d^0)} \Gamma(\mathcal{J}^1) \xrightarrow{\Gamma(d^1)} \Gamma(\mathcal{J}^2) \to \cdots$ なる complex が定まる。これにより

$$R^i\Gamma(\mathcal{F}) = \frac{\mathrm{Ker}(\Gamma(d^i))}{\mathrm{Im}(\Gamma(d^{i-1}))} \quad (\text{ただし } d^{-1}=0) \text{ と定義する。}$$

この定義により、$R^i\Gamma(\mathcal{F})$ が、injective resolution のとり方に無関係に、同型を除いて一意に定まり、かつ covariant な additive functor を定義することは、Prop. 3.1 より容易にわかる。

すると、直ちに、次のような問題がおこる。

問題: $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ を abelian categories とし、$\mathcal{C} \xrightarrow{T} \mathcal{C}'$, $\mathcal{C}' \xrightarrow{S} \mathcal{C}''$ を covariant な additive left exact functors と

する時、$\mathcal{C} \xrightarrow{ST} \mathcal{C}''$ も covariant なadditive left exact functor になるが、この時、R^iT, R^jS, $R^k(ST)$ はどのような関係にあるか？（$\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ は "sufficiently many injectives" をもつとする）

これに対して spectral sequence の言葉を用いて、次のような（部分的）解答が得られる。

<u>定理 6.1</u>　'問題' の仮定に、更に次のような仮定を付け加える。

仮定：$\mathrm{ob}\,\mathcal{C} \ni {}^\forall\mathcal{J}$ injective に対して $T(\mathcal{J}) \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}'$ は

S — cohomologically trivial

即ち ${}^\forall i > 0$ について $R^iS(T(\mathcal{J})) = 0$

結論：この時、${}^\forall\mathcal{F} \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ について

$$R^pS(R^qT(\mathcal{F})) \underset{p}{\Longrightarrow} R^n(ST)(\mathcal{F}) \quad (\text{cf. [註] 5.4}).$$

定理に述べられた spectral sequence を与えるために、2つの lemmas を証明する。

<u>lemma 6.2</u>　$\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ を abelian categories とし、$\mathcal{C} \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{C}'$ を covariant なadditive functor とする時、$0 \to A \to B \to C \to 0$ なる $\mathcal{C}$ の split exact sequence に対して、$0 \to \Gamma(A) \to \Gamma(B) \to \Gamma(C) \to 0$ も $\mathcal{C}'$ の split exact sequence. 従って、特に、exact sequence になる。

ただし、$0 \to A \to B \to C \to 0$ がsplit exact sequence で

あるとは、

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle id} & & \uparrow{\scriptstyle \wr} & & \uparrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \to & A & \to & A\oplus C & \to & C & \to & 0 \end{array}$$

なる可換なdiagram が存在することである。

(証) "$0 \to A \xrightarrow{z_1} B \xrightarrow{p_2} C \to 0$ が split exact sequence である ためには、$\exists p_1 : B \to A$, $\exists z_2 : C \to B$ が存在して、$p_2 z_1 = 0$, $p_1 z_2 = 0$, $p_1 z_1 = id_A$, $p_2 z_2 = id_C$, $z_1 p_1 + z_2 p_2 = id_B$ が成立することが必要十分である。"(証明は簡単、わからない人は cf. Nrothcott [1] p.14 Prop.2).

という状態は covariant なadditve functor で保存される。

Q.E.D.

<u>lemma 6.3</u> $\mathcal{C}$を abelian category とし $0 \to A \to B \to C \to 0$ を $\mathcal{C}$ の exact sequence とする。A の injective resolution $0 \to A \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots$ と C の injective resolution $0 \to C \to J^0 \to J^1 \to J^2 \to \cdots$ が与えられた時 B の injective resolution $0 \to B \to K^0 \to K^1 \to K^2 \to \cdots$ と次のような可換な diagram が存在する。

しかも $\forall p \geq 0$ について

$0 \to I^p \to K^p \to J^p \to 0$ は split exact.

(証明は簡単、わからない人は Cf. Northcott[1]p84 Th.17)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & I^2 & \longrightarrow & K^2 & \longrightarrow & J^2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & K^1 & \longrightarrow & J^1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & K^0 & \longrightarrow & J^0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

split exact

split exact

split exact

exact

exact exact exact

[註] 6.1　記号を簡単にするために lemma 6.3 の状態を、

$I^0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots$ を $\mathbb{I}$, $K^0 \to K^1 \to \cdots$ を $\mathbb{K}$, $\cdots$ と略記

することによって

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{I},$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{I} & \longrightarrow & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{J} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

split exact

exact

exact exact exact

と表わす。

（定理6.1 の証明）

Step. 1　（定理の spectral sequence を与える double complex, の construction）

$\mathcal{A}$ と $\ni \mathcal{F}$ の injective resolution $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{L}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{L}^1$

$\xrightarrow{d^1} \mathcal{L}^2 \xrightarrow{d^2} \cdots$ にTを apply して complex $0 \to T(\mathcal{F}) \xrightarrow{T(\varepsilon)} T(\mathcal{L}^0) \xrightarrow{T(d^0)} T(\mathcal{L}^1) \xrightarrow{T(d^1)} T(\mathcal{L}^2) \longrightarrow \cdots$ を得るが、T が left exact だから $0 \to T(\mathcal{F}) \to T(\mathcal{L}^0) \to T(\mathcal{L}^1)$ の部分は exact.

そこで $i \geqq 1$ に対して

$$\begin{cases} C^i = \mathrm{Ker}\,(T(\mathcal{L}^i) \longrightarrow T(\mathcal{L}^{i+1})) \\ B^i = \mathrm{Im}\,(T(\mathcal{L}^{i-1}) \longrightarrow T(\mathcal{L}^i)) \end{cases}$$ とおくと

次の short exact sequences を得る。

$$\text{(I)} \begin{cases} 0 \to I(\mathcal{F}) \to T(\mathcal{L}^0) \to B^1 \to 0 & \text{exact} \\ \forall i \geqq 1 \quad 0 \to C^i \to T(\mathcal{L}^i) \to B^{i+1} \to 0 & \text{exact} \\ \forall i \geqq 1 \quad 0 \to B^i \to C^i \to \mathcal{R}^i T(\mathcal{F}) \to 0 & \text{exact} \end{cases}$$

そこで $T(\mathcal{F})$, B^i, $\mathcal{R}^i T(\mathcal{F})$ $(i \geqq 1)$ のおのおのの injective resolution を[註] 6.1 の記号を用いて $0 \to T(\mathcal{F}) \to \mathcal{J}[T(\mathcal{F})]$, $0 \to B^i \to \mathcal{J}[B^i]$, $0 \to \mathcal{R}^i T(\mathcal{F}) \to \mathcal{J}[\mathcal{R}^i T(\mathcal{F})]$ と表わすと、lemma 6.3 及び(I)によって $T(\mathcal{L}^i)$ $(\forall i \geqq 0)$, C^i $(i \geqq 1)$ の injective resolutions, $0 \to T(\mathcal{L}^i) \to \mathcal{J}[T(\mathcal{L}^i)]$, $0 \to C^i \to \mathcal{J}[C^i]$ を、次の diagram が存在するようにつくることができる。

$$\text{(II)} \begin{cases} \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{J}[T(\mathcal{F})] & \to & \mathcal{J}[T(\mathcal{L}^0)] & \to & \mathcal{J}[B^1] & \to & 0 \quad \text{split ecact} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & T(\mathcal{F}) & \to & T(\mathcal{L}^0) & \to & B^1 & \to & 0 \quad \text{exact} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \text{exact} & & \text{exact} & & \text{exact} & & \end{array} \end{cases}$$

$$
\text{(II)}\quad \left\{
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \tilde{\mathcal{J}}[C^i] & \to & \tilde{\mathcal{J}}[T(\mathcal{L}^i)] & \to & \tilde{\mathcal{J}}[B^{i+1}] & \to & 0 \quad \text{split exact} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & C^i & \to & T(\mathcal{L}^i) & \to & B^{i+1} & \to & 0 \quad \text{exact} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \text{exact} & & \text{exact} & & \text{exact} & & \\
 & & & & & & & & \\
0 & \to & \tilde{\mathcal{J}}[B^i] & \to & \tilde{\mathcal{J}}[C^i] & \to & \tilde{\mathcal{J}}[\mathcal{R}^iT(\mathcal{F})] & \to & 0 \quad \text{split exact} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & B^i & \to & C^i & \to & \mathcal{R}^iT(\mathcal{F}) & \to & 0 \quad \text{exact} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \text{exact} & & \text{exact} & & \text{exact} & &
\end{array}
\right.
$$

$\tilde{\mathcal{J}}[T(\mathcal{L}^i)]$ を $\bar{L}^{0,i} \to \bar{L}^{1,i} \to \bar{L}^{2,i} \to \cdots$ とおき $\tilde{\mathcal{J}}[T(\mathcal{L}^i)] \to \tilde{\mathcal{J}}[T(\mathcal{L}^{i+1})]$ なる map を $\tilde{\mathcal{J}}[T(\mathcal{L}^i)] \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}[T(B^{i+1})] \to \tilde{\mathcal{J}}[T(C^{i+1})] \to \tilde{\mathcal{J}}[T(\mathcal{L}^{i+1})]$ によって定義すると、それらにより下図のような可換な diagram (III) が得られる。(III) に S を apply することによって diagram (IV) を得る。

$$
\begin{array}{ccccc}
\vdots & \vdots & & & \\
\uparrow & \uparrow & & & \\
\bar{L}^{0,2} & \to & \bar{L}^{1,2} & \to \cdots & \text{exact} \\
\uparrow & \uparrow & & & \\
\bar{L}^{0,1} & \to & \bar{L}^{1,1} & \to \cdots & \text{exact} \\
\uparrow & \uparrow & & & \\
\bar{L}^{0,0} & \to & \bar{L}^{1,0} & \to \cdots & \text{exact}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
\vdots & \vdots & & & \\
\uparrow & \uparrow & & & \\
S(\bar{L}^{0,2}) & \to & S(\bar{L}^{1,2}) & \to \cdots & \\
\uparrow & \uparrow & & & \\
S(\bar{L}^{0,1}) & \to & S(\bar{L}^{1,1}) & \to \cdots & \\
\uparrow & \uparrow & & & \\
S(\bar{L}^{0,0}) & \to & S(\bar{L}^{1,0}) & \to \cdots &
\end{array}
$$

(III) (IV)

(IV) の各行、各列はそれぞれ complex をなすから、横向きの differential map を d'、上向きの differential map を d_0'' とおく時、

double complex K を $K^{p,q} = S(L^{p,q})$

$d' : K^{p,q} \longrightarrow K^{p+1,q}$, $d'' = (-1)^p d_0'' : K^{p,q} \longrightarrow K^{p,q+1}$

によって定義する。(実際、(K, d', d'') はdouble complex になる。)

<u>Step. 2</u> ($E_2^{p,q} = R^p S(R^q T(\mathcal{F}))$ の証明)

$\mathcal{J}[T(\mathcal{F})]$, $\mathcal{J}[B^i]$, $\mathcal{J}[C^i]$, $\mathcal{J}[R^i T(\mathcal{F})]$ の j-th components を $\bar{F}^j$, $\bar{B}^{j,i}$, $\bar{C}^{j,i}$, $\bar{R}^{j,i}$ とおくと、lemma 6.2 及び diagram (II) により

$\forall p \geq 0$, $\forall q \geq 1$ について次の exact sequences を得る。

$$0 \longrightarrow S(\bar{F}^p) \longrightarrow K^{p,0} \longrightarrow S(\bar{B}^{p,1}) \longrightarrow 0 \quad \text{exact}$$

$$0 \longrightarrow S(\bar{C}^{p,q}) \longrightarrow K^{p,q} \longrightarrow S(\bar{B}^{p,q+1}) \longrightarrow 0 \quad \text{exact}$$

$$0 \longrightarrow S(\bar{B}^{p,q}) \longrightarrow S(\bar{C}^{p,q}) \longrightarrow S(\bar{R}^{p,q}) \longrightarrow 0 \quad \text{exact}$$

しかも $\pm d''$ は $K^{p,q} \to S(\bar{B}^{p,q+1}) \to S(\bar{C}^{p,q+1}) \to K^{p,q+1}$ により定義されているから、$\forall p \geq 0$, $\forall q \geq 1$ について

$$\mathrm{Ker}(d''^{p,q}) = S(\bar{C}^{p,q}), \quad \mathrm{Im}(d''^{p,q-1}) = S(\bar{B}^{p,q}), \quad \frac{\mathrm{Ker}(d''^{p,q})}{\mathrm{Im}(d''^{p,q-1})} = S(\bar{R}^{p,q})$$

$^\forall p \geqq 0$, $q=0$ について

$$\mathrm{Ker}(d''^{p,0}) = S(E^p),\quad \mathrm{Im}(d''^{p,-1}) = 0,\quad \frac{\mathrm{Ker}(d''^{p,0})}{\mathrm{Im}(d''^{p,-1})} = S(\bar{E}^p)$$

従って $^\forall p \geqq 0$, $^\forall q \geqq 0$ について

$$E_1^{p,q} = \begin{cases} S(\bar{R}^{p,q}) & \text{if} \quad q>0 \\ S(E^p) & \text{if} \quad q=0 \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & S(\bar{R}^{0,2}) \arrow[r] \arrow[u] & S(\bar{R}^{1,2}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \quad (E_1) \\
0 \arrow[r] & S(\bar{R}^{0,1}) \arrow[r] \arrow[u] & S(\bar{R}^{1,1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
0 \arrow[r] & S(E^0) \arrow[r] \arrow[u] & S(E^1) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$d_1^{p,q}$ は $\mathfrak{J}[T(\mathfrak{F})]$, $\mathfrak{J}[R^iT(\mathfrak{F})]$ の differential map から induce されたものと一致するから、derived functor の定義にもどれば、$^\forall p \geqq 0$, $^\forall q \geqq 0$ について

$E_2^{p,q} = R^pS(R^qT(\mathfrak{F}))$ を得る。

<u>Step. 3</u> （$H^n(K) = R^n(ST)(\mathfrak{F})$ の証明）

double complex K を diagonal のまわりで一回転したものを考える。

即ち、$\hat{K}^{p,q} = K^{q,p}$, $\partial' = d''$, $\partial'' = d'$

これについての spectral sequence を考える。定理6.1

の仮定により

$\forall p \geq 0$ について　$0 \to ST(\mathcal{L}^p) \to S(\mathfrak{J}[T(\mathcal{L}^p)$ は exact.

即ち右図のようなdiagramを得る。

$$\begin{tikzcd}
 & \uparrow & \uparrow & \\
 & \hat{K}^{0,2} \arrow[r] & \hat{K}^{1,2} \arrow[r] & \cdots \\
 & \uparrow & \uparrow & \\
 & \hat{K}^{0,1} \arrow[r] & \hat{K}^{1,1} \arrow[r] & \cdots \\
 & \uparrow & \uparrow & \\
 & \hat{K}^{0,0} \arrow[r] & \hat{K}^{1,0} \arrow[r] & \cdots \\
 & \uparrow & \uparrow & \\
 & ST(\mathcal{L}^0) \arrow[r] & ST(\mathcal{L}^1) \arrow[r] & \cdots \\
 & \uparrow & \uparrow & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$\forall p \geq 0, \forall q \geq 0$ について

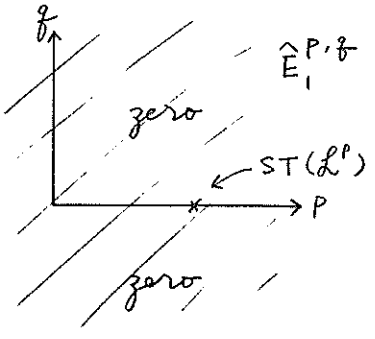
$$\therefore \hat{E}_1^{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad q > 0 \\ ST(\mathcal{L}^p) & \text{if} \quad q = 0 \end{cases}$$

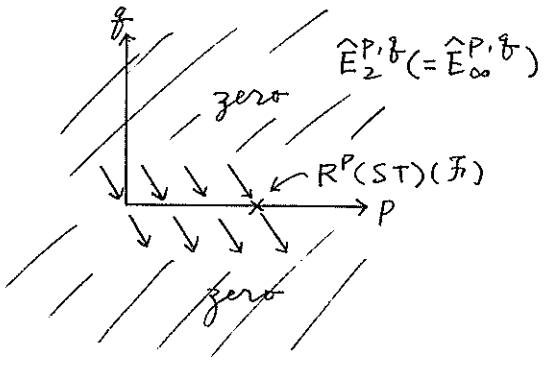
しかも $\pm d_1^{p,0}$ は $\mathcal{L}^p \to \mathcal{L}^{p+1}$ によって定まる

$ST(\mathcal{L}^0) \to ST(\mathcal{L}^{p+1})$ と一致する。

よって基本定理 5.1 より

$$\hat{E}_2^{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad q > 0 \\ R^p(ST)(\mathfrak{F}) & \text{if} \quad q = 0 \end{cases}$$





上図及び基本定理 5.1 により

$$\hat{E}_\infty^{p,q} = \hat{E}_2^{p,q}$$

$\hat{E}_\infty^{p,q}$ の定義にもどれば

$$H^n(\hat{K}) = \hat{E}_\infty^{n,0} = R^n(ST)(\mathcal{F})$$

しかも $H^n(K) = H^n(\hat{K})$ は明らかだから

$$H^n(K) = R^n(ST)(\mathcal{F})$$

Q.E.D.

例をあげる前に、sheaf の direct image を定義しなければならない。

<u>定義 6.1</u> X, Y を top. spaces $f: X \to Y$ を continuous map とする時、X 上の abelian group の sheaf $\mathcal{F}$ に対して $f_*\mathcal{F}$ なる Y 上の sheaf を次のように定義する。

$Y \supset {}^\forall U$ open sets について $(f_*\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$

$Y \supset {}^\forall U \supset {}^\forall V$ open sets について $res: (f_*\mathcal{F})(U) \longrightarrow (f_*\mathcal{F})(V)$ は $f^{-1}(U) \supset f^{-1}(V)$ によって定まる。

$res: \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \longrightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ と定義する。

この $f_*\mathcal{F}$ は実際 sheaf になる事は容易に確められる。

[註] <u>6.2</u> (X 上の ableian group の sheaves の category) から (Y 上の abelian group の sheaves の category) への functor f_* は covariant な additive left exact functor である。

(証明は exercise)

[註] <u>6.3</u> $\mathcal{C}$ を X 上の abelian group の sheaves の category,

$\mathcal{C}'$ を Y 上の abelian group の sheaves の category，

$\mathcal{C}''$ を abelian groups の category とおき、

$\mathcal{C} \xrightarrow{T} \mathcal{C}'$ を $T = f_*$，$\mathcal{C}' \xrightarrow{S} \mathcal{C}''$ を $\forall \mathcal{G} \in ob\,\mathcal{C}'$

に対して $S(\mathcal{G}) = \mathcal{G}(Y)$ によって定義すると、

$\mathcal{C} \xrightarrow{ST} \mathcal{C}''$ は $\forall \mathcal{F} \in ob\,\mathcal{C}$ について $(ST)(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ となる。

[註] 6.4　$ob\,\mathcal{C} \ni \mathcal{I}$ を X 上の injective sheaf とすると、

[註] 3.1 より $\mathcal{I}$ は flasque sheaf.

従って $f^*(\mathcal{I})$ も flasque sheaf（証明は exercise）

従って Proposition 1.1 より、$T(\mathcal{I})$ は s-cohomologically trivial.

従って定理 6.1 より、次の定理 6.2 が得られる。

定理 6.2　X, Y を top spaces、$f: X \longrightarrow Y$ を continuous map とした時

X 上の abelian group の sheaf $\mathcal{F}$ について

$$H^p(Y, R^q f_*(\mathcal{F})) \underset{p}{\Longrightarrow} H^n(X, \mathcal{F})$$

[註] 6.5　$R^q f_*(\mathcal{F})$ は次の様に定義される presheaf

$Y \supset {}^\forall U$ open $\longmapsto H^p(f^{-1}(U), \mathcal{F}|f^{-1}(U))$ の sheafification

である。

(証) $\mathcal{F}$ の injective resolution $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$ をとると

$$R^q f_*(\mathcal{F}) = \frac{Ker[f_*(d^q)]}{Im[f_*(d^{q-1})]} \quad (ただし\ d^{-1} = 0)$$

従って $R^q f_*(\mathcal{F})$ は $Y \supset {}^\forall U \longmapsto \dfrac{\mathrm{Ker}[f_*(d^q)(U)]}{\mathrm{Im}[f_*(d^{q-1})(U)]}$

なる presheaf の sheafification になる。

ところが $\dfrac{\mathrm{Ker}[f_*(d^q)(U)]}{\mathrm{Im}[f_*(d^{q-1})(U)]} = \dfrac{\mathrm{Ker}[d^q(f^{-1}(U))]}{\mathrm{Im}[d^{q-1}(f^{-1}(U))]}$ だから

$$\frac{\mathrm{Ker}[d^q(f^{-1}(U))]}{\mathrm{Im}[d^{q-1}(f^{-1}(U))]} = H^q(f^{-1}(U), \mathcal{F}|f^{-1}(U))$$

Q.E.D.

§7. Spectral sequences の application II

この section では、§3 で述べた Cartan's lemma の証明をする。

定理 7.1 (Cartan's lemma)

X を topological space、$\mathcal{F}$ を X 上の abelian group の sheaf とし、次の3つの条件をみたす X の open subsets の family $\{U_\varphi\}_{\varphi\in\Phi}$ が存在するとする。

(1) $\{U_\varphi\}_{\varphi\in\Phi}$ が X の open sets の base になっている。

(2) $\forall\varphi, \forall\varphi'\in\Phi$ について、$\exists\psi\in\Phi$ s.t. $U_\varphi\cap U_{\varphi'}=U_\psi$

(3) $\forall q>0, \forall\varphi\in\Phi$ について、$\check{H}^q(U_\varphi, \mathcal{F}|U_\varphi)=0$

この時 $\forall q\geq 0$ について

$$\check{H}^q(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\approx} H^q(X,\mathcal{F})$$

[註] 7.1 $q=0$ については無条件に $\check{H}^0(X,\mathcal{F})=H^0(X,\mathcal{F})=\mathcal{F}(X)$

さて定義3.6で述べたように、$\mathfrak{U}=\{U_x\}_{x\in X}$ (U_x open $\ni x$) なる type の open coverings $\mathfrak{U}=\{U_x\}_{x\in X}$, $\mathfrak{V}=\{V_x\}_{x\in X}$ について $\mathfrak{U}<\mathfrak{V}$ を $\forall x\in X$ について $U_x\supset V_x$ と定義する。そして、$\mathcal{F}$ の canonical resolution $0\to\mathcal{F}\xrightarrow{\varepsilon}\mathcal{L}^0\xrightarrow{d^0}\mathcal{L}^1\xrightarrow{d^1}\mathcal{L}^2\xrightarrow{d^2}\cdots$ をとり、$\mathcal{L}^q$ についての Čech の differentiation map $C^p(\mathfrak{U},\mathcal{L}^q)\to C^{p+1}(\mathfrak{U},\mathcal{L}^q)$ (cf. 定義3.4) を $\delta^{p,q}$ とおき、double complex $K(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ を次の様に定義する。

$$K^{p,q}(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = C^p(\mathfrak{U},\mathcal{L}^q)$$

横向きの differentiation ∂' : $\partial'^{p,q} = \delta^{p,q}$

上向きの differentiation ∂'' : $\partial''^{p,q} = (-1)^p d^q$

これらについて $\partial'^2 = 0$, $\partial''^2 = 0$, $\partial'\partial'' + \partial''\partial' = 0$

そこで $\partial = \partial' + \partial''$ とおくと $\partial^2 = 0$

<u>lemma 7.2</u> $K^{\cdot\cdot}(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ の total cohomology について.

$$H^n(X,\mathcal{F}) \cong H^n(K^{\cdot\cdot})$$

(証) $\mathcal{L}^i$ は flasque sheaf だから lemma 7.3 で示す事実 "どんな covering $\mathfrak{U}$ についても $\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathcal{L}^i) = 0$ $\forall q > 0$" を用いる。

そこで double complex L を $L^{p,q} = K^{q,p}$ 2つの differentiations ∂', ∂'' をそのまま用いて定義すると

$\forall q > 0$ について $E_1^{p,q}(L^{\cdot\cdot}) = \dfrac{\mathrm{Ker}(K^{q,p} \to K^{q+1,p})}{\mathrm{Im}(K^{q-1,p} \to K^{q,p})} = \check{H}^q(\mathfrak{U},\mathcal{L}^p) = 0$

$$E_1^{p,0}(L^{\cdot\cdot}) = \mathrm{Ker}(K^{0,p} \to K^{1,p}) = \mathcal{L}^p(X)$$

従って<u>基本定理</u> 5.1 により $\forall p \geq 0$, $\forall q \geq 0$ について

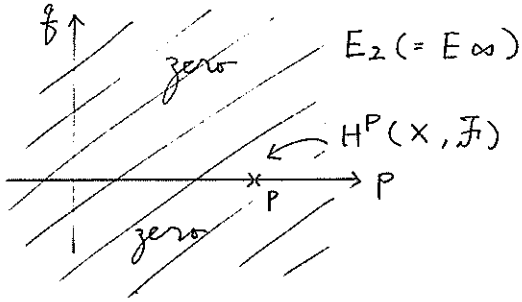
$$E_2^{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{if } q > 0 \\ H^p(X,\mathcal{F}) & \text{if } q = 0 \end{cases}$$

従って<u>基本定理</u> 5.1 により $E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q}$

従って<u>定義</u> 5.2, <u>定義</u> 5.3 の言葉を用いて.

$$H^n(L) = H^n_{(r)}(L) = E_\infty^{n,0} = H^n(X, \mathcal{F})$$

$$\therefore\ H^n(K) = H^n(L) = H^n(X, \mathcal{F})$$



<u>lemma 7.3</u>　$\mathcal{F}$ を flasque sheaf とすると、どんな open covering $\mathcal{U}$ についても

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0 \qquad \forall q > 0$$

(証)　$\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ とし、A に linear order を入れておくと

Čech resolution $\underline{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ は open set U に対して

$$\underline{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = C^q(\mathcal{U}|U, \mathcal{F}|U) \cong \prod_{\alpha_0 < \cdots < \alpha_q} \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q} \cap U)$$

従って $\mathcal{F}$ が flasque であることから、$\underline{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ も flasque であることがわかる。

従って、Čech resolution を $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \underline{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d} \cdots$ とする時

Prop. 1.1により $\forall q > 0$ について

$$0 = H^q(X, \mathcal{F}) = \ker(\underline{d}^q(X)) / \mathrm{Im}(\underline{d}^{q-1}(X)) \quad (d^{-1} = 0)$$

しかるに系3.2.2によれば $\check{H}^q(X, \mathcal{F}) = \dfrac{\ker(\underline{d}^q(X))}{\mathrm{Im}(\underline{d}^{q-1}(X))}$ $(d^{-1} = 0$

$$\therefore\ {}^{\forall}q > 0 \text{ について } \check{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0$$

さて定義3.6の inductive limit と同様にして、

complex $K(X, \mathcal{F})$ を

$$K^{\cdot\cdot}(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} K^{\cdot\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

differentiations: $\partial' = \varinjlim_{\mathfrak{U}} \partial'_{\mathfrak{U}}$, $\partial'' = \varinjlim_{\mathfrak{U}} \partial''_{\mathfrak{U}}$, $\partial = \varinjlim_{\mathfrak{U}} \partial_{\mathfrak{U}}$

と定義する。

K の total cohomology を計算するために、 inductive limit に関する、よく知られた次の lemma を用いる。

<u>lemma 7.4</u> 3つの inductive systems of abelian groups.

$(A_\alpha)_{\alpha\in A}$, $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$, $(C_\alpha)_{\alpha\in A}$

と maps $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$, $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ が

${}^{\forall}\beta > {}^{\forall}\alpha$ について 右の diagram

$$\begin{tikzcd} A_\alpha \arrow[r, "\lambda_\alpha"] \arrow[d] & B_\alpha \arrow[r, "\mu_\alpha"] \arrow[d] & C_\alpha \arrow[d] \\ A_\beta \arrow[r, "\lambda_\beta"] & B_\beta \arrow[r, "\mu_\beta"] & C_\beta \end{tikzcd}$$

が可換になるように与えられているとする。

この時、もし ${}^{\forall}\alpha$ について $A_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} B_\alpha \xrightarrow{\mu_\alpha} C_\alpha$ が exact

ならば $A \xrightarrow{\lambda} B \xrightarrow{\mu} C$ も exact.

ただし $A = \varinjlim_{\alpha} A_\alpha$, $B = \varinjlim_{\alpha} B_\alpha$, $C = \varinjlim_{\alpha} C_\alpha$,

$\lambda = \varinjlim_{\alpha} \lambda_\alpha$, $\mu = \varinjlim_{\alpha} \mu_\alpha$。

(証) 略

[註] <u>7.2</u> projective system についてはこの様な定理はない。

$\mathbb{Z} \ni p$ を素数とする時、$N \ni {}^{\forall}\ell$ について、

$\mathbb{Z} \xrightarrow[\lambda_\ell]{\text{nat.}} \mathbb{Z}/p^\ell\mathbb{Z} \xrightarrow{\mu_\ell} 0$ は exact

として inductive system $(\mathbb{Z})_{\ell\in N}$, $(\mathbb{Z}/p^\ell\mathbb{Z})_{\ell\in N}$ を

$N \ni {}^\forall\ell$ について $\mathbb{Z} \xleftarrow{\text{id}} \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p^\ell\mathbb{Z} \xleftarrow{\text{nat.}} \mathbb{Z}/p^{\ell+1}\mathbb{Z}$ に

よって定義すると

$\varprojlim_\ell \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, $\varprojlim_\ell \mathbb{Z}/p^\ell\mathbb{Z} = \hat{\mathbb{Z}}_p$ (p－進整数環)となり

$\mathbb{Z} \xrightarrow{\lambda} \hat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\mu} 0$ は exact でない。

<u>lemma 7.5</u> $H^q(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^q(K^{\cdot\cdot}(X,\mathcal{F}))$

(証) lemma 7.4 により、inductive limit と H^q(cohomology をとる操作)が可換。従って lemma 7.3 より証明が得られる。 Q.E.D.

<u>lemma 7.6</u> $K^{\cdot\cdot}(X,\mathcal{F})$ について、${}^\forall q>0$ について

$$E_1^{0,q} = 0$$

(証) $K^{0,q}(X,\mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} K^{0,q}(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} C^0(\mathfrak{U},\mathcal{L}^q)$

従って $\mathfrak{U} = \{U_x\}_{x\in X}$ とおくと

$K^{0,q}(X,\mathcal{F}) = \varinjlim_{x\in X} \prod_{x\in X} \mathcal{L}^q(U_x) = \prod_{x\in X} \mathcal{L}^q_x$

従って $E_1^{0,q}$ は complex $\prod_{x\in X}\mathcal{L}^0_x \to \prod_{x\in X}\mathcal{L}^1_x \to \prod_{x\in X}\mathcal{L}^2_x \to \cdots$

の cohomology として計算されるが、$\mathcal{L}^0 \to \mathcal{L}^1 \to \mathcal{L}^2 \to \cdots$

は sheaf-exact であるから ${}^\forall x\in X$ について

$\mathcal{L}^0_x \to \mathcal{L}^1_x \to \mathcal{L}^2_x \to \cdots$ は exact.

従って $\forall q>0$ について $E_1^{0,q}=0$ Q.E.D.

$K^{\cdot\cdot}(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ の spectral sequence について、次の事が容易に計算される。

[註] 7.3 $E_1^{p,q}(\mathfrak{U},\mathcal{F})=\prod_{i_0<\cdots<i_p} H^q(U_{i_0\cap\cdots\cap U_{i_p}},\mathcal{F}|U_{i_0\cap\cdots\cap U_{i_p}})$

特に $E_1^{p,q}(\mathfrak{U},\mathcal{F})=C^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})$、

従って $E_2^{p,0}(\mathfrak{U},\mathcal{F})=\check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})$

従って lemma 7.4 により inductive limit をとると

$$E_2^{p,0}(X,\mathcal{F})=\check{H}^p(X,\mathcal{F})$$

以上の準備の下に Cartan's lemma が証明されるが、その前に、無条件に成立する次の事実を証明しよう。

<u>Proposition 7.7</u> X を top.space、$\mathcal{F}$ を X 上の abelian group の sheaf とする時

$$\check{H}^1(X,\mathcal{F})\xrightarrow[\text{isom.}]{\sim}H^1(X,\mathcal{F}),\quad \check{H}^2(X,\mathcal{F})\xhookrightarrow[\text{inj.}]{}H^2(X,\mathcal{F})$$

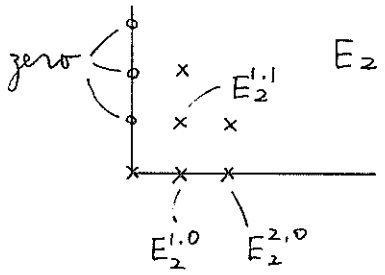
(証) $K^{\cdot\cdot}(X,\mathcal{F})$ の spectral sequence について <u>lemma</u> 7.6 により、$\forall q>0$ について $E_1^{0,q}=0$

よって $\forall q>0$, $\forall r\geqq 1$ について $E_r^{0,q}=0$

従って [註] 5.3 の (3) により

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & E_2^{1,0} & \longrightarrow & H^1(K) & \longrightarrow & E_2^{0,1} & \longrightarrow & E_2^{2,0} & \longrightarrow & H^2(K) \\
 & & \wr\| ① & & \wr\| ② & & \| & & \wr\| ③ & & \wr\| ④ \\
 & & \check{H}^1(X,\mathcal{F}) & & H^1(X,\mathcal{F}) & & 0 & & \check{H}^2(X,\mathcal{F}) & & H^2(X,\mathcal{F})
\end{array}$$

なる sequence が exact. ①, ③ は [註] 7.3 より、②, ④ は lemma 7.5 より明らか。 Q.E.D.



(Cartan's lemma の証明)

$\check{H}^q(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\approx} H^q(X,\mathcal{F})$ を q に関する induction で証明する。

$q=0,1$ については既に示された。

$\bar{q}>1$ をとり、定理が $\forall q<\bar{q}$ については成立すると仮定する。

$\mathfrak{U}=\{U_x\}_{x\in X}$ (U_x open $\ni x$) を $U_x\in\Phi$ であるように任意にとる。

$K^{\bullet\bullet}(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ の spectral sequence に関して [註] 7.3 により

$$E_1^{p,q}(\mathfrak{U},\mathcal{F})=\prod_{i_0<\cdots<i_q} H^q(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q},\mathcal{F}|U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q})$$

$0<\forall q<\bar{q}$ について、定理の条件は、X を $U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q}$, Φ を $\Phi|U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q}$, $\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}|U_{i_0}\cap\cdots\cap i_q$ でおきかえても成立するから induction の仮定により、

$$H^q(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q},\mathcal{F}|U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_q})=\check{H}^q(\ 〃\ )=0$$

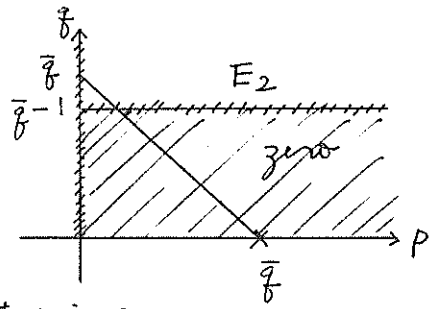
従って　$E_1^{p,q}(\mathcal{U},\mathcal{F})=0$　$^\forall p$,　$0<{}^\forall q<\bar{q}$

lemma 7.4 により inductive limit をとると.

$E_1^{p,q}(X,\mathcal{F})=0$,　$^\forall p$,　$0<{}^\forall q<\bar{q}$

従って　$E_2^{p,q}(X,\mathcal{F})=0$　$^\forall p$,　$0<{}^\forall q<\bar{q}$

lemma 7.6 により、次図のように E_2 について zero になる部分がわかる。



従って基本定理 5.1 により

$$\check{H}^{\bar{q}}(X,\mathcal{F})=E_2^{\bar{q},0}=E_3^{\bar{q},0}=\cdots=E_\infty^{\bar{q},0}$$

又 $a+b=\bar{q}$, $b\neq 0$ なる $^\forall$整数 a,b について

$E_2^{a,b}=0$,　従って $E_\infty^{a,b}=0$

従って定義 5.3 の言葉を用いれば

$$E_\infty^{\bar{q},0}=H^{\bar{q}}_{(\bar{q})}(K(X,\mathcal{F}))=H^{\bar{q}}(K(X,\mathcal{F}))$$

よって lemma 7.5 により

$$\check{H}^{\bar{q}}(X,\mathcal{F})=H^{\bar{q}}(X,\mathcal{F})$$

Q.E.D.

Bibliography

Cartan & Eilenberg	[1]	Homological algebra (Princeton 1956)
R. Godement	[1]	Topologie algébrique et théorie des faisceaux (Hermann, Paris 1964)
A. Grothendieck	[1]	Eléments de Géométrie Algébrique I (Springer 1971)
	[2]	Sur quelques points d'algebre homologique (Tôhoku Math Journal 1957)
H. Matsumura	[1]	Commutative algebra (Benjamin 1970)
D. G. Northcott	[1]	An introduction to homological algebra (Cambridge 1966)

発行者　数理解析レクチャー・ノート刊行会
連絡先　〒606 京都市左京区北白川追分町
京大数理解析研究所
210号室　気付