*RIMS Kôkyûroku Bessatsu*
**B45** (2014), 113–130

# Resolvent Estimates in Amalgam Spaces and Asymptotic Expansions for Schrödinger Equations

By

Artbazar Galtbayar* and Kenji Yajima**

### Abstract

We consider Schrödinger equations $i\partial_t u = (-\Delta + V)u$ in $\mathbb{R}^3$ with a real potential $V$ such that, for an integer $k \geq 0$, $\langle x \rangle^k V(x)$ belongs to an amalgam space $\ell^p(L^q)$ for some $1 \leq p < 3/2 < q \leq \infty$, where $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$. Let $H = -\Delta + V$ and let $P_{ac}$ be the projector onto the absolutely continuous subspace of $L^2(\mathbb{R}^3)$ for $H$. Assuming that zero is not an eigenvalue nor a resonance of $H$, we show that solutions $u(t) = \exp(-itH)P_{ac}\varphi$ admit asymptotic expansions as $t \to \infty$ of the form

$$\Big\| \langle x \rangle^{-k-\varepsilon} \Big( u(t) - \sum_{j=0}^{[k/2]} t^{-\frac{3}{2}-j} P_j \varphi \Big) \Big\|_\infty \leq C|t|^{-\frac{k+3+\varepsilon}{2}} \|\langle x \rangle^{k+\varepsilon}\varphi\|_1$$

for $0 < \varepsilon < 3(1/p - 2/3)$, where $P_0, \dots, P_{[k/2]}$ are operators of finite rank and $[k/2]$ is the integral part of $k/2$. The proof is based upon estimates of boundary values on the reals of the resolvent $(-\Delta - \lambda^2)^{-1}$ as an operator-valued function between certain weighted amalgam spaces.

## § 1. Introduction

ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^3)$ におけるシュレーディンガー方程式に対する初期値問題

$$i\partial_t u = (-\Delta + V(x))u, \quad u(0) = \varphi. \tag{1.1}$$

の解の $t \to \pm\infty$ における漸近挙動を考える。$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ と書く。この論文ではポテンシャル $V$ は実数値で少なくとも次の条件を満たすと仮定する：$1 \leq p < 3/2 < q \leq \infty$ を

Received January 4, 2012. Revised October 3, 2012.
2000 Mathematics Subject Classification(s):
Supported by JSPS grant in aid for scientific research No. 22340029.
*School of Mathematics and Computer Science, National University of Mongolia.
**Department of Mathematics, Gakushuin University, 1-5-1 Mejiro, Toshima-ku, Tokyo 171-8588, Japan.

満たすある $p, q$ に対して

$$V \in \ell^p(L^q) = \{u \colon \|u\|_{\ell^p(L^q)} \equiv \Big(\sum_{j\in\mathbf{Z}^3} \|\chi_{Q_j} u\|_q^p\Big)^{1/p} < \infty\}, \tag{1.2}$$

ただし $Q_j$ は $j \in \mathbf{Z}^3$ を中心とする単位立方体, $\chi_{Q_j}$ はその特性関数, $\|\cdot\|_s = \|\cdot\|_{L^s}$ はルベーグ空間 $L^s(\mathbb{R}^3)$ のノルムである。$\ell^r(L^s)$ はアマルガム空間と呼ばれ, 局所的には $L^s$ 的, 大域的には $L^r$ 的な振る舞いをする関数の空間で, 特異性と無限遠方での減衰を区別するが、なお $\mathbf{Z}^3$-平行移動不変なノルムをもつ使いやすい空間である.

**$H$ のスペクトル** $\ell^r(L^s)$ は Banach 空間で包含関係

$$\ell^{r_1}(L^{s_1}) \subset \ell^{r_2}(L^{s_2}), \quad r_1 \le r_2,\ s_1 \ge s_2$$

を満たす。従って, (1.2) の仮定の下で

$$V \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3), \tag{1.3}$$

とくに $V$ は

$$\lim_{r\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{|x-y|<r} \frac{|V(y)|}{|x-y|} dy = 0 \tag{1.4}$$

を満たす, いわゆる加藤型ポテンシャルである。これから次が成立する：

(1) $H = -\Delta + V$ は定義域を

$$D(H) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^3) \colon Vu \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^3), -\Delta u + Vu \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$$

と決めると $\mathcal{H}$ の自己共役作用素である ([31])。従って, (1.1) の初期条件 $u(0) = \varphi \in \mathcal{H}$ を満たす $\mathcal{H}$ での解は一意的で $u(t) = e^{-itH}\varphi$ で与えられる。

$H_0 = -\Delta,\ D(H_0) = H^2(\mathbb{R}^3)$ と定義する。$H,\ H_0$ のレゾルベントをそれぞれ $R(z) = (H-z)^{-1}$, $R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$ と書く。

$R(z) - R_0(z)$ は $\mathcal{H}$ のコンパクト作用素, 従って, ワイルの安定性定理（[31]) によって $H$ の本質的スペクトル $\sigma_{ess}(H) = [0,\infty)$, $\sigma(H) \cap (-\infty, 0)$ は $H$ の離散スペクトルである。一般に $V \in L^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$ の時, 特に (1.3) の時, $H = -\Delta + V$ に対して正の固有値は存在しない ([18], [26] の拡張も参照)。従って, $[0,\infty)$ は $H$ の連続スペクトルである。一方, $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \ge 3$ における $H = -\Delta + V$ の負の固有値の数 $N(V)$ は Cwickel-Lieb-Rosenbjum の定理によって

$$N(V) \le C\|V_-\|_{L^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)}$$

を満たす ([32])。これから次が分かる。

(2) $\sigma_p(H)$ は有限個で, 負または零の多重度有限な固有値からなる。$\sigma_{ess}(H) = \sigma_c(H) = [0, \infty)$ である。

複素数上半平面を $\mathbf{C}^+$ と書き, $\lambda \in \overline{\mathbf{C}}^+ = \{\lambda \in \mathbf{C} \colon \Im\lambda \geq 0\}$ に対して

$$G_0(\lambda) = R_0(\lambda^2), \quad G(\lambda) = R(\lambda^2)$$

と定める。$G_0(\lambda)$ と $R_0(\lambda^2)$ の実軸への境界値の間には

$$G_0(\pm\lambda) = R_0(\lambda^2 \pm i0), \quad G(\pm\lambda) = R(\lambda^2 \pm i0), \quad \lambda \geq 0$$

の関係がある。$G_0(\lambda)$ はよく知られた簡単な形の積分核をもち

$$G_0(\lambda)u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{|x-y|} u(y)dy \tag{1.5}$$

と表される。これに Hardy の不等式を用いれば $\lambda \in \overline{\mathbf{C}}^+$ の時, $VG_0(\lambda) \in \mathbf{B}(L^1)$ で, $V$ を $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ で近似すれば, $VG_0(\lambda)$ は $L^1(\mathbb{R}^3)$ のコンパクト作用素であることも分かる。

$$G(\lambda) = G_0(\lambda)(1 + VG_0(\lambda))^{-1}, \quad \lambda^2 \notin \sigma_p(H)$$

が成立する。 Goldberg-Schlag([14]) は Agmon-Kuroda のよく知られた議論をルベーグ空間 $L^1(\mathbb{R}^3)$ の間の作用素 $1 + VG_0(\lambda)$ に対して拡張し, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ の時にも

$$-1 \in \sigma_{L^1}(VG_0(\lambda)) \Leftrightarrow \lambda^2 \in \sigma_p(H)$$

が成立することを示した。ここで, 一般に $1 \leq q \leq \infty$ に対して, $\sigma_{L^q}(K)$ などは $L^q(\mathbb{R}^3)$ 上のコンパクト作用素 $K$ などのスペクトル（固有値の集合）である。これより, 上に注意した Ionescu-Jerison の正の固有値の不存在定理によって, (1.3) を満たす $V$ に対して, $G(\lambda)$ は上半平面から $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ まで $\mathbf{B}(L^1, L^{3,\infty})$ 値連続関数として拡張され, 任意の $\delta > 0$ に対して定数 $C_\delta$ が存在して

$$\sup_{|\lambda| \geq \delta} \|G(\lambda)u\|_{L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)} \leq C_\delta \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \tag{1.6}$$

が成立することが分かる（極限吸収原理. [19] による拡張も参照)。これによって :

(3) $[0, \infty)$ は $H$ の絶対連続スペクトル $\sigma_{ess}(H)$ に等しい。

$P_{ac}$ を $H$ の絶対連続スペクトル部分空間 $\mathcal{H}_{ac}$ への直交射影とする.

0 が $H$ の固有値であることはあり得る。さらに, $-1 \in \sigma_{L^1}(VG_0(0))$ であっても, 0 が固有値でないこともある。

$$-1 \in \sigma_{L^1}(VG_0(0)) \Leftrightarrow -1 \in \sigma_{L^\infty}(G_0(0)V)$$

である。$\mathcal{N} = \mathrm{Ker}_{L^\infty}(1 + G_0(\lambda)V) = L^\infty$ における $1 + G_0(\lambda)V$ の零空間と定義する。

$$\mathcal{N} \subset \cap_{s>3} L^s(\mathbb{R}^3), \quad u \in \mathcal{N} \Rightarrow (-\Delta + V)u(x) = 0$$

である。$\mathcal{N} \cap L^2(\mathbb{R}^3) \neq \{0\}$ なら 0 は $H$ の固有値であるが, $\mathcal{N} \subset L^2(\mathbb{R}^3)$ となるとは限らない。この時, $u \in \mathcal{N} \setminus L^2$ は $H$ の（閾値）レゾナンス状態, 0 は $H$ のレゾナンスであるという。$\mathcal{N} \cap L^2(\mathbb{R}^d) = \{0\}$ の場合もあり, この場合 0 はレゾナンスであるが, 固有値ではない。

定義 1.1. $H$ は 0 が $H$ の固有値でもレゾナンスでもないとき *generic type*, そうでない時 *exceptional type* という。$H$ が *generic type* であることと $u \in \cap_{3<s\leq\infty} L^s(\mathbb{R}^3)$ を満たす $-\Delta u(x) + V(x)u(x) = 0$ の解 $u \neq 0$ が存在しないことは同値である。

$H$ が generic type であることは $\mathcal{N} = \{0\}$ であることと同値で, この時, 上の議論から分かるように, 極限吸収原理が 0 を込めて成立し, (1.6) が $|\lambda| > \gamma$ の制限を取り除いて成立する：ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|G(\lambda)u\|_{L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}. \tag{1.7}$$

**Global dispersive estimate** $V$ が (1.3) を満たし $H$ が generic type の時, 次の評価が Goldberg([15]) によって証明されている：

$$\|e^{-itH}P_{ac}\varphi\|_\infty \leq C|t|^{-3/2}\|\varphi\|_1, \quad \varphi \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3). \tag{1.8}$$

これは時間大域的な分散型評価と呼ばれ, $V = 0$ の時には解の表現式

$$e^{-itH_0}\varphi(x) = \frac{e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}}{(2\pi|t|)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i(x-y)^2}{2t}}\varphi(y)dy \tag{1.9}$$

からほぼ自明な評価である。 この評価 (1.8) は微妙なもので $H$ が generic でないと一般には成立しない。$V \neq 0$ の時, 一般の次元 $d \geq 1$ の generic type の $H$ に対する大域的な分散型評価

$$\|e^{-itH}P_{ac}\varphi\|_\infty \leq C|t|^{-d/2}\|\varphi\|_1, \quad \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d) \tag{1.10}$$

は Journé -Soffer-Sogge [23] によって初めて示された。[23] における条件はある $\alpha > d+4$ と $\sigma > 0$ に対して

$$\hat{V} \in L^1(\mathbb{R}^d), \quad \langle x\rangle^\alpha V : W^{\sigma,2}(\mathbb{R}^d) \to W^{\sigma,2}(\mathbb{R}^d)$$

であったが, この条件は次第に改良されて, とくに $d = 3$ における上に述べた結果はほぼ "sharp" ある。ここで $\langle x\rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$ である。同様に $d = 1$ でも sharp な結果が得られていて $\langle x\rangle^1 V(x) \in L^1$ であれば (1.10) が成立する。ほかの次元では結果が sharp がどうか不明であるが次の十分条件が知られている：

(1) $d=2$ の時, $|V(x)| \le C\langle x\rangle^{-3-\varepsilon}$ （[35]）.

(2) $d=4$ の時, $V \in C^{(d-3)/2}$ で $|V(x)| \le C\langle x\rangle^{-3-\varepsilon}$ ([5], [6]）.

(3) $d=5$ の時, $V \in C^{(d-3)/2}$ で $|V(x)| \le C\langle x\rangle^{-5-\varepsilon}$ ([5], [6]）.

(4) $d \ge 6$ の時, $|V(x)| \le C\langle x\rangle^{-d-2-\varepsilon}$ で $d_* = \frac{d-1}{d-2}$ と $\sigma > \frac{1}{d_*}$ に対して $\mathcal{F}(\langle x\rangle^{2\sigma}V) \in L^{d_*}(\mathbb{R}^d)$. ただし, $\mathcal{F}$ はフーリエ変換である。

$d=1$ の時には $\langle x\rangle^1 V(x) \in L^2$ であれば, $H$ が exceptional type の時にも (1.10) が成立する。一方, $d \ge 2$ の時には, $H$ が exceptional type だと (1.10) は成立しないが, $d=3$ の時には, この時にも, $e^{-itH}P_{ac}u$ の漸近挙動の精密な情報が得られている ([39], [9, 10]).

**主定理**　この講演の目的は Goldberg の評価 (1.8) における, 主要項を取り出して, $e^{-itH}P_{ac}$ の漸近展開を与える次の定理を示すことである。$a \ge 0$ の時, $[a]$ は $a$ の整数部分である。

定理 1.2.　$V$ はある整数 $k \ge 0$ とある $1 \le p < 3/2 < q \le \infty$ に対して

$$\langle x\rangle^k V \in \ell^p(L^q) \tag{1.11}$$

みたし, $H$ は generic type と仮定する. この時, 任意の $0 \le \varepsilon < 3(1/p - 2/3)$ に対して $e^{-itH}P_{ac}$ は $t \to \infty$ において次の漸近展開を持つ:

$$\Big\|\langle x\rangle^{-k-\varepsilon}\Big(e^{-itH}P_{ac} - \sum_{j=0}^{[k/2]} t^{-\frac{3}{2}-j}P_j\Big)\varphi\Big\|_\infty \le C|t|^{-\frac{k+3+\varepsilon}{2}}\|\langle x\rangle^{k+\varepsilon}\varphi\|_1, \tag{1.12}$$

ここで $P_0, \dots, P_{[k/2]}$ は $(H-\lambda^2)^{-1}$ の $\lambda = 0$ の微分を用いて書ける有限次元作用素, $C > 0$ は $\varphi$ によらない定数である. $t \to \infty$ でも同様である.

定理についてのいくつかの注意を与えよう。

注意 1.3.

(1) $H = -\Delta$ の時の表現式 (1.9) から確かめられるように, (1.12) の右辺の減衰度 $C|t|^{-\frac{k+3+\varepsilon}{2}}$ は sharp である.

(2) $k$ が整数でない時の $V$ の重みは $p$ を変えることで部分的には吸収できる。

(3) $k=0$ の時の (1.12) から, 分散型評価 (1.8) における主要部は $t^{-\frac{3}{2}}P_0$ である。

(4) $V$ が $|V(x)| \le C\langle x\rangle^{-\sigma}$ の形の条件を満たすとき, $e^{-itH}P_{ac}$ を重み付き $L^2$ 空間 $\langle x\rangle^{k+\delta}L^2(\mathbb{R}^d)$ から $\langle x\rangle^{-k-\delta}L^2(\mathbb{R}^d)$ （$\delta > d/2$）への作用素と考えての (1.12) と同様な漸近展開が Rauch （[30]）や Jensen-Kato（[20]）, とくに Murata（[29]）によって一般的な条件の下で得られている。これらの結果は $H$ が exceptional type の時にも得られていて, 定理 1.2 はこれらの制限 $L^p$ 版である。この定理を一般次元あるいは, exceptional type の時に拡張することが望まれる。

(5) $d=1$ の時には, Mizutani ([28]) によって (1.8) が exceptional type の場合を込めて得られている.

以下において証明のあらましを $k=0$ の場合に限って述べる。$H$ は generic type と仮定する。証明は Goldberg による分散型評価 (1.8) の論法の精密化で次元が 3 であること, とくに $G_0(\lambda)$ の積分核が (1.5) のように単純な形であることに強く依存する。

この論法を実行するのに weighted resolvent

$$G_{0,\varepsilon}(\lambda) = \langle x\rangle^{\varepsilon} G_0(\lambda)\langle x\rangle^{-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0 \tag{1.13}$$

のアマルガム空間の間の評価が必要で Kenig-Ruiz-Sogge あるいは Goldberg-Schlag の $L^p$ 評価を改良する必要がある。このレゾルベントの評価の改良から始める。

## §2. Resolvent の評価

$3/2 \le \rho \le 2$ に対して双対的な指数 $r(\rho)$ と $s(\rho)$ を

$$r(\rho) = \frac{2\rho}{\rho+1}, \quad s(\rho) = \frac{2\rho}{\rho-1}, \quad \frac{1}{r(\rho)} + \frac{1}{s(\rho)} = 1$$

と定義する。$\rho$ が $3/2$ から $2$ に増加するとき, $r(\rho)$ は増加し, $s(\rho)$ は減少して

$$6/5 \le r(\rho) \le 4/3, \quad 4 \le s(\rho) \le 6$$

となる。 (1.13) で定義した $G_{0,\varepsilon}(\lambda)$ の重み $\langle x\rangle^{-\varepsilon}$ をコントロールするためのパラメータ $\varepsilon_*(\rho)$ と $G_{0,\varepsilon}(\lambda)$ の適当な空間の間での作用素ノルムの $\lambda \to \infty$ における減衰を記述するための指数 $\delta_*(\rho)$ を

$$\varepsilon_*(\rho) = \tfrac{2}{\rho} - 1, \quad \delta_*(\rho) = 2 - \tfrac{3}{\rho}. \tag{2.1}$$

と定義する。$\rho$ が $3/2$ から $2$ に増加すると, $\varepsilon_*(\rho)$ は減少, $\delta_*(\rho)$ は増加して

$$0 \le \varepsilon_*(\rho) \le 1/3, \quad 0 \le \delta_*(\rho) \le 1/2$$

となる。三点 $P_\rho, Q, R$ を次で定め,

$$P_\rho = \left(\tfrac{1}{r(\rho)}, \tfrac{1}{s(\rho)}\right), \quad Q = \left(\tfrac{2}{3}, 0\right), \quad R = \left(1, \tfrac{1}{3}\right),$$

閉三角形 $\triangle P_\rho QR$ から底辺の 2 つの頂点を除いて

$$\mathcal{D}_\rho \equiv \triangle P_\rho QR \setminus \{Q, R\}$$

と定める。さらに $0 \le \kappa \le 1$ に対して $\mathcal{D}_\rho$ と頂点 $P_\rho$ を共有し, 底辺が平行な閉三角形から底辺の 2 つの頂点を除いて

$$\mathcal{D}_\rho(\kappa) \equiv \triangle P_\rho Q_\kappa R_\kappa \setminus \{Q_\kappa, R_\kappa\}, \quad Q_\kappa = \left(\tfrac{2+\kappa}{3}, 0\right), \quad R_\kappa = \left(1, \tfrac{1-\kappa}{3}\right).$$

と定義する。点 $P_\rho$, 底辺 $QR$ および $Q_\kappa R_\kappa$ はそれぞれ直線

$$\tfrac{1}{r}-\tfrac{1}{s}=\tfrac{1}{\rho},\quad \tfrac{1}{r}-\tfrac{1}{s}=\tfrac{2}{3},\quad \tfrac{1}{r}-\tfrac{1}{s}=\tfrac{2+\kappa}{3}$$

上にある。$0\le\theta\le 1$ に対して底辺 $QR$, $Q_\kappa R_\kappa$ と平行で $\mathcal{D}_\rho$ および $\mathcal{D}_\rho(\kappa)$ を $\theta$ 対 $1-\theta$ に内分する 2 つの線分を

$$L_\theta(\rho)=\mathcal{D}_\rho\cap\left\{\left(\tfrac{1}{r},\tfrac{1}{s}\right):\tfrac{1}{r}-\tfrac{1}{s}=\tfrac{1-\theta}{\rho}+\tfrac{2\theta}{3}\right\},$$
$$L_{\kappa,\theta}(\rho)=\mathcal{D}_\rho(\kappa)\cap\left\{\left(\tfrac{1}{r},\tfrac{1}{s}\right):\tfrac{1}{r}-\tfrac{1}{s}=\tfrac{1-\theta}{\rho}+\tfrac{(2+\kappa)\theta}{3}\right\}$$

と定義する。以下, $\gamma$ は作用素値関数の滑らかさを記述するためのパラメータである。

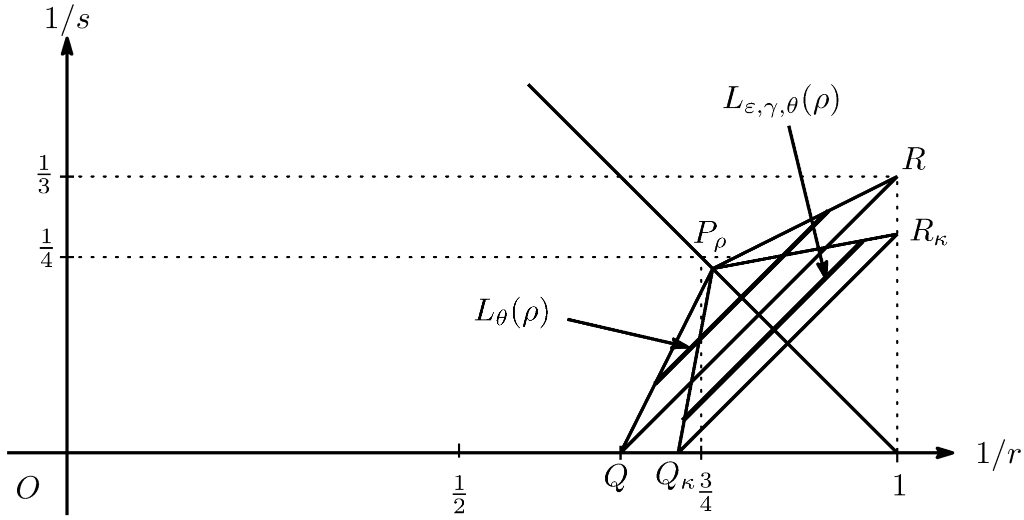


Figure 1.

$$\varepsilon(\rho,\theta)=\theta\varepsilon+(1-\theta)\varepsilon_*(\rho).$$

と定義する。次の評価が成立する：バナッハ空間 $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ に対して $\mathbf{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ は $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への有界作用素の全体がなすバナッハ空間, $\mathbf{B}(\mathcal{X})=\mathbf{B}(\mathcal{X},\mathcal{X})$ である.

定理 2.1. $3/2\le\rho\le 2$, $0\le\varepsilon,\gamma$ は $\varepsilon+\gamma\le 1$ を満たし, $0<\theta<1$ とする。
(1) 任意の $\lambda\in\mathbf{C}^+$ に対して $G_{0,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}(\lambda)$ は, $(1/r,1/s)\in L_\theta(\rho)$ と $(1/\tilde{r},1/\tilde{s})\in L_{\varepsilon,\theta}(\rho)$ を満たす $(r,s)$, $(\tilde{r},\tilde{s})$ に対して $\ell^{\tilde{r}}(L^r)$ から $\ell^{\tilde{s}}(L^s)$ への有界作用素. $c>0$ を定めると $|\lambda|\ge c$ をみたす $\lambda\in\overline{\mathbf{C}}^+\setminus\{0\}$ に対して次の評価を満たす：

$$\|G_{0,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}(\lambda)u\|_{\mathbf{B}(\ell^{\tilde{r}}(L^r),\ell^{\tilde{s}}(L^s))}\le C|\lambda|^{-(1-\theta)\delta_*(\rho)}. \tag{2.2}$$

(2) $(1/r,1/s)\in L_\theta(\rho)$ と $(1/\tilde{r},1/\tilde{s})\in L_{\varepsilon+\gamma,\theta}(\rho)$ を満たす $(r,s)$, $(\tilde{r},\tilde{s})$ に対して, $G_{0,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}(\lambda)$ は $\lambda$ の $\mathbf{B}(\ell^{\tilde{r}}(L^r),\ell^{\tilde{s}}(L^s))$ 値関数として

(a) $\mathbf{C}^+$ において正則, $\overline{\mathbf{C}}^+\setminus\{0\}$ において強連続,

(b) $\gamma > 0$ であれば $\overline{\mathbf{C}}^{+} \setminus \{0\}$ において指数 $\theta\gamma$ の局所 Hölder 連続である。

(c) $c > 0$ の時, 適当な定数 $C > 0$ が存在して $|\lambda| > c$ および $|\sigma| < |\lambda|/2$ に対して

$$\|\Delta^{\sigma} G_{0,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}(\lambda)u\|_{\mathbf{B}(\ell^{\tilde r}(L^r),\ell^{\tilde s}(L^s))} \le C|\lambda|^{-(1-\theta)\delta_*(\rho)}|\sigma|^{\theta\gamma}, \tag{2.3}$$

ただし $(\Delta^{\sigma} f)(\lambda) = f(\lambda+\sigma) - f(\lambda)$ は $\lambda$ に関する差分作用素である。

レゾルベントの微分に対しては次が成立する。

$$K_{l,\pm\varepsilon}(\lambda) = \langle x\rangle^{-l} G_{0,\pm\varepsilon}(\lambda)\langle x\rangle^{-l}, \quad l = 1, 2, \dots.$$

と定義する。

定理 2.2. $l = 1, 2, \dots$ とし, $\rho$, $\varepsilon$, $\gamma$ および $\theta$ は定理 2.1 の通り, $(r,s)$, $(\tilde r, \tilde s)$ は $(1/r, 1/s) \in L_{\theta}(\rho)$, $(1/\tilde r, 1/\tilde s) \in L_{\varepsilon,\gamma,\theta}(\rho)$ を満たす指数とする。この時：

(a) $\lambda \mapsto K_{l,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}(\lambda) \in \mathbf{B}(\ell^{\tilde r}(L^r), \ell^{\tilde s}(L^s))$ は $\lambda \in \mathbf{C}^{+}$ の正則関数, $\lambda \in \overline{\mathbf{C}}^{+}$ に $C^l$ 級関数として拡張される。

(b) $u$, $\lambda \in \overline{\mathbf{C}}^{+}$ によらない定数 $C > 0$ が存在して次が成立する：

$$\sum_{j=1}^{l} \|K^{(j)}_{l,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}(\lambda)u\|_{\ell^{\tilde s}(L^s)} + \sup_{\sigma\neq 0}|\sigma|^{-\gamma\theta}\|\Delta^{\sigma} K^{(l)}_{l,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}(\lambda)u\|_{\ell^{\tilde s}(L^s)} \le C\langle\lambda\rangle^{-(1-\theta)\delta_*(\rho)}\|u\|_{\ell^{\tilde r}(L^r)}. \tag{2.4}$$

定理 2.2 から $G(\lambda) = G_0(\lambda)(1+VG_0(\lambda))^{-1}$ の $\lambda$ に関する微分可能性, ならびに導関数の性質が得られるが詳しくは述べない。定理 2.1 ならびに定理 2.2 の証明もここでは与えない。[13] を参照されたい。

## § 3. 定理 1.2 の証明のあらすじ

$k = 0$ の時の定理 1.2 の証明のあらすじを述べる。$\langle x\rangle^{-s}L^r = \{\langle x\rangle^{-s}u \colon u \in L^r\}$ は重み付き $L^2$ 空間,

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} u(x)\overline{v(x)}dx$$

である。次の cut-off 関数 $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ を取っておく。

$$\chi(\lambda) = \chi(-\lambda); \quad \chi(\lambda) = \begin{cases} 1 \text{ for } |\lambda| \le 1, \\ 0 \text{ for } |\lambda| \ge 2 \end{cases}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\chi(\lambda - 3n) = 1. \tag{3.1}$$

$L > 0$ に対して $\chi_L(\lambda) = \chi(\lambda/L)$ と定義する. レゾルベント方程式を使うと

$$G(\lambda) = (1+G_0(\lambda)V)^{-1}G_0(\lambda) = G_0(\lambda)(1+VG_0(\lambda))^{-1}. \tag{3.2}$$

$u,v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ とする。$H$ は generic type だから $(e^{-itH}P_{ac}u,v)$ をレゾルベントの境界値を用いて

$$(e^{-itH}P_{ac}u,v)=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-it\mu}((R(\mu+i0)-R(\mu-i0))u,v)\chi_L(\sqrt{\mu})d\mu$$

と表現できる（Stone の公式）。この右辺で変数を $\mu=\lambda^2$ と置き換え, $G(\lambda)=R(\lambda^2)$ を用いると

$$(e^{-itH}P_{ac}u,v)=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{i\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-it\lambda^2}(G(\lambda)u,v)\lambda\chi_L(\lambda)d\lambda$$

$\lambda$ について部分積分すると

$$-\frac{1}{2t\pi}\lim_{L\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-it\lambda^2}(G'(\lambda)u,v)\chi_L(\lambda)d\lambda+\int_{\mathbb{R}}e^{-it\lambda^2}(G(\lambda)u,v)\chi_L'(\lambda)d\lambda\right)\tag{3.3}$$

これを

$$\lim_{L\to\infty}\left((U_{1,L}(t)u,v)+(U_{2,L}(t)u,v)\right).$$

と書く。$U_{1,L}(t)$ が定理の (1.12) を満たすこと, $U_{2,L}(t)$ が剰余項の評価

$$\|\langle x\rangle^{-\varepsilon}U_{2,L}\varphi\|_\infty\le C|t|^{-\frac{3+\varepsilon}{2}}\|\langle x\rangle^{\varepsilon}\varphi\|_1\tag{3.4}$$

を満たすことを示せばよい。ただし定数 $C>0$ は $R>0$ を十分大とすれば $L\ge R$ によらない。$U_{1,L}(t)$ についてだけ説明する。$U_{2,L}(t)$ に対する評価 (3.4) は $U_{1,L}(t)$ に現れる剰余項の評価と平行して行うことができるからである。

Goldberg に従って

$$G'(\lambda)=2\lambda G(\lambda)^2=(1+G_0(\lambda)V)^{-1}G_0'(\lambda)(1+VG_0(\lambda))^{-1}\tag{3.5}$$

と書く。$G_0(\lambda)$ の積分核は $ie^{i\lambda|x-y|}/(4\pi)$ であった。$w\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $L\ge1$ に対して

$$w_L(\lambda,\cdot)=\chi(\lambda/2L)(1+VG_0(\lambda))^{-1}w(x).\tag{3.6}$$

と定義する。$((1+G_0(\lambda)V)^{-1})^*=(1+VG_0(-\lambda))^{-1}$ だから

$$(U_{1,L}(t)u,v)=-\frac{1}{2t\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-it\lambda^2}\langle\chi(\lambda/L)G_0'(\lambda)u_L(\lambda),v_L(-\lambda)\rangle d\lambda.\tag{3.7}$$

$\hat{u}_L(\rho,x)=(\mathcal{F}_{\lambda\to\rho}u_L)(\rho,x)$ と書く。次の補題が重要である。

補題 3.1. $0\le\varepsilon\le1$ とする. $\hat{u}_L(\rho,x)$ は

$$\|(\langle\rho\rangle^{\varepsilon}+\langle x\rangle^{\varepsilon})\hat{u}_L(\rho,x)\|_{L^1(\mathbb{R}^4)}\le C\|\langle x\rangle^{\varepsilon}u\|_{L^1(\mathbb{R}^3)},\tag{3.8}$$

を満たす。ただし定数は $L\ge1$, $u$ にはよらない.

$k=0$ の時, 定理 1.2 は補題 3.1 から次のようにすぐ出る。

$$F_L(\sigma)=\mathcal{F}_{\lambda\to\sigma}(\langle\chi(\lambda/L)G_0'(\lambda)u_L(\lambda),v_L(-\lambda)\rangle)(\sigma)$$

と定義する。$G_0'(\lambda)$ の積分核は $ie^{i\lambda|x-y|}/4\pi$ だから

$$F_L(\sigma)=\frac{i}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\iint L\hat{\chi}(L(\sigma-|x-y|-\mu-\rho))\hat{u}_L(\mu,y)\overline{\hat{v}_L(\rho,x)}d\mu d\rho dxdy.$$

次の補題は変数変換から直ちにしたがう：

補題 3.2. $L\geq 1$ によらない定数が存在して $\rho\geq 0$ に対して

$$\int\langle\sigma\rangle^\rho L|(\mathcal{F}\chi^{(\alpha)})(L(\sigma-\Sigma))|d\sigma\leq C_\rho\langle\Sigma\rangle^\rho. \tag{3.9}$$

補題 3.2 と補題 3.1 をあわせて用いれば

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^1}\langle\sigma\rangle^\varepsilon|F_L(\sigma)|d\sigma&\leq C\iint_{\mathbb{R}^8}\langle|x-y|+\mu+\rho\rangle^\varepsilon|\hat{u}_L(\mu,y)\hat{v}_L(\rho,x)|d\mu d\rho dxdy\\&\leq C\|(\langle\mu\rangle^\varepsilon+\langle y\rangle^\varepsilon)\hat{u}_L\|_1\|(\langle\rho\rangle^\varepsilon+\langle x\rangle^\varepsilon)\hat{v}_L\|_1\leq C\|\langle x\rangle^\varepsilon u\|_1\|\langle x\rangle^\varepsilon v\|_1.\end{aligned} \tag{3.10}$$

(3.7) の右辺にパーセバルの等式を用い, 次に $e^{i\sigma^2/4t}=1+(e^{i\sigma^2/4t}-1)$ と分解すれば

$$\langle U_{1,L}(t)u,v\rangle=\frac{e^{\mp 3i\pi/4}}{(2|t|)^{\frac{3}{2}}i\pi}\left(\int_{\mathbb{R}}F_L(\sigma)d\sigma+\int_{\mathbb{R}}(e^{i\sigma^2/4t}-1)F_L(\sigma)d\sigma\right). \tag{3.11}$$

Fourier の逆変換公式によって右辺の第一項は次に等しい：

$$\frac{\sqrt{2}e^{\mp 3i\pi/4}}{(2|t|)^{\frac{3}{2}}i\sqrt{\pi}}\langle G_0'(0)u_L(0),v_L(0)\rangle=\frac{\sqrt{2}e^{\mp 3i\pi/4}}{(2|t|)^{\frac{3}{2}}i\sqrt{\pi}}\langle G'(0)u,v\rangle \tag{3.12}$$

(3.10) から第二項は剰余項である。

$$\frac{2^{1-\varepsilon}}{(2|t|)^{\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}\pi}\int_{\mathbb{R}}|\sigma|^\varepsilon|F_L(\sigma)|d\sigma\leq\frac{C}{|t|^{\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}\|\langle x\rangle^\varepsilon u\|_1\|\langle x\rangle^\varepsilon v\|_1$$

だからである。これによって, 定理 1.2 の証明は補題 3.1 の証明に帰着する。

## §4. 補題 3.1 の証明の大筋

$u_L(\lambda)$ を高エネルギー部分

$$u_{L,high}(\lambda)=(1-\chi(\lambda/\lambda_0))u_L(\lambda) \tag{4.1}$$

と低エネルギー部分

$$u_{L,low}(\lambda)=\chi(\lambda/\lambda_0)u_L(\lambda) \tag{4.2}$$

に分解する。 $\chi_{\geq}(\lambda)=1-\chi(\lambda)$ と書く。$\lambda_0>0$ は大きなパラメータである. $u_{L,high}(\lambda)$, $u_{L,low}(\lambda)$ がおのおの (3.8) を満たすことを別々の方法で示す。

## § 4.1. 高エネルギー部分の評価

$\lambda_0 \leq L$ に対して

$$h_{L,\lambda_0}(\lambda)=\chi_{\geq}(\lambda/\lambda_0)\chi(\lambda/L) \tag{4.3}$$

と定義する。$V\in \ell^p(L^q)$ と仮定し,

$$\kappa_{\max}=3(1/p-2/3),\ r_{\max}=\min(p_*,3q/(q+3))$$

と定義する. ただし

$$\frac{1}{p_*}=1-\left(\frac{1}{p}-\frac{2+\varepsilon+\gamma}{3}\right).$$

である。$1<p_*\leq \frac{3}{2+\varepsilon+\gamma}$ が成立する。

命題 4.1. $0\leq \gamma,\varepsilon,\ \gamma+\varepsilon<\kappa_{\max}$ とする. $\Lambda>0$ が存在して $\Lambda\leq\lambda_0<L$ の時, 次が成立する：

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\langle\sigma\rangle^{\tau}\langle x\rangle^{\varepsilon}|\mathcal{F}_{\lambda\to\sigma}u_{L,high}(\sigma,x)|dxd\sigma\leq C\|\langle x\rangle^{\varepsilon}u\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.4}$$

ここで, $C$ は $u$, $\Lambda\leq\lambda_0<L$ によらない定数である。

**命題の証明** $|\lambda|\to\infty$ の時, $\|(VG_0(\lambda))^3\|_{\mathbf{B}(\langle x\rangle^{\pm\varepsilon}L^1)}\to 0$ が成立する。これを用いて $u_{L,high}(\lambda)$ の定義 (3.6) の中の $(1+VG_0(\lambda))^{-1}$ を

$$(1+VG_0(\lambda))^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n G_n(\lambda),\quad G_n(\lambda)\equiv(VG_0(\lambda))^n$$

と展開すれば

$$u_{L,high}(\lambda,x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n h_{L,\lambda_0}(\lambda)G_n(\lambda)u \tag{4.5}$$

$h_{L,\lambda_0}(\lambda)G_n(\lambda)u$ に対して次が成立する：

補題 4.2. $0\leq\varepsilon,\gamma,\varepsilon+\gamma<\kappa_{\max}$ とする. $\Lambda\leq\lambda_0<L$ の時, 次が成立する：

$$\int_{\mathbb{R}^4}\langle\sigma\rangle^{\gamma}\langle x\rangle^{\varepsilon}|\mathcal{F}(h_{L,\lambda_0}(\lambda)G_n(\lambda)u)(\sigma,x)|d\sigma dx\leq C^n\|\langle x\rangle^{\varepsilon}u\|_1. \tag{4.6}$$

ただし, $C$ は $n$, $L$ によらない定数。

**証明.** $G_0(\lambda)$ の積分核表現を用いて $G_n(\lambda)u(x)$ を $\mathbb{R}^{3n}$ 上の積分として表現する : $x_0 = y$, $x = x_n$, $\Sigma = \sum_{j=1}^n |x_j - x_{j-1}|$ と書くとき,

$$G_n(\lambda)u(x) = \int_{\mathbb{R}^{3n}} \frac{e^{i\lambda\Sigma}\prod_{j=1}^n V(x_j)}{\prod_{j=1}^n 4\pi|x_j - x_{j-1}|} u(y)dydx_1\cdots dx_{n-1}. \tag{4.7}$$

Fubini を使って積分順序を入れ替えて

$$\mathcal{F}_{\lambda\to\sigma}(h(\lambda)G_n(\lambda)u)(\sigma, x) = \int_{\mathbb{R}^{3n}} \frac{\hat{h}(\sigma-\Sigma)\prod_{j=1}^n V(x_j)}{\prod_{j=1}^n 4\pi|x_j - x_{j-1}|} u(y)dydx_1\cdots dx_{n-1}$$

とし, 次に (3.9) を使って

$$\int_{\mathbb{R}} |\langle\sigma\rangle^\gamma|\hat{h}(\sigma-\Sigma)|d\sigma \le C\langle\Sigma\rangle^\gamma \le C\sum_{j=1}^n \langle x_j - x_{j-1}\rangle^\gamma$$

と評価すれば

$$\begin{aligned} &\int \langle\sigma\rangle^\gamma |\mathcal{F}_{\lambda\to\sigma}(h(\lambda)G_n(\lambda)u)(\sigma,x)|d\sigma \\ &\qquad \le C\sum_{m=1}^n \int_{\mathbb{R}^{3n}} \frac{\langle x_m - x_{m-1}\rangle^\gamma \prod_{j=1}^n |V(x_j)|}{\prod_{j=1}^n 4\pi|x_j - x_{j-1}|}|u(y)|dydx_1\cdots dx_{n-1}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

$K_1, K_2$ をそれぞれ積分核

$$K_1(x,y) = \frac{V(x)}{4\pi|x-y|}, \quad K_2(x,y) = \frac{V(x)\langle x-y\rangle^\gamma}{4\pi|x-y|}$$

を持つ積分作用素とする。 この時,

$$\|K_1\|_{\mathbf{B}(\langle x\rangle^{\pm\varepsilon}L^1)} + \|K_2\|_{\mathbf{B}(\langle x\rangle^{\pm\varepsilon}L^1)} \le C$$

で, (4.8) の右辺の各項は $n-1$ 個の $K_1$ と 1 個の $K_2$ の積である。(4.6) が従う。 □

補題 4.2 の右辺には $n$ について減衰する因子が含まれず, (4.5) において和を取ることができない。$G_0(\lambda)$ の $|\lambda| \to \infty$ での減衰評価 (2.2) を用いて減衰因子を含む評価を得よう。

補題 4.3. $0 \le \varepsilon + \gamma < \kappa_{\max}$, $3/2 \le \rho \le 2$ とする. 定数 $0 < \theta_* < 1$ と $n_0$ が存在して任意の $\theta_* \le \theta < 1$ と $n \ge n_0$ に対して:

$$\begin{aligned} &\sup_{\sigma\in\mathbb{R}} \|\langle x\rangle^\varepsilon \langle\sigma\rangle^{\theta\gamma}\mathcal{F}(h_{L,\lambda_0}(\lambda)G_n(\lambda)u)(x,\sigma)\|_1 \\ &\qquad\qquad \le C^n\lambda_0^{1-(n-2)(1-\theta)\delta_*(\rho)}\|\langle x\rangle^\varepsilon u\|_{L^1}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

ここで定数 $C$ は $u$,$n \ge n_0$, $1 \le \lambda_0 \le L$ によらない。

**証明.** レゾルベントの減衰評価とポテンシャルに対する仮定を用いれば $1 < r < r_{\max}$ に対して, $\theta_* = \theta(\rho, \varepsilon, \gamma, r)$ を適当に選ぶと

$$\begin{aligned}
&\|\langle x\rangle^\varepsilon (VG_0(\lambda))^n u\|_{L^1} \\
&\le \|\langle x\rangle^\varepsilon VG_0(\lambda)\langle x\rangle^{-\varepsilon}\|_{\mathbf{B}(L^r,L^1)} \prod_{i=2}^{n-1} \|\langle x\rangle^\varepsilon VG_0(\lambda)\langle x\rangle^{-\varepsilon}\|_{\mathbf{B}(L^r)} \\
&\quad \times \|\langle x\rangle^\varepsilon VG_0(\lambda) u\|_{L^1} \le C(C/\lambda)^{(n-2)(1-\theta\delta_*(\rho))}\|\langle x\rangle^{-\varepsilon}u\|_1, \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

同様に差分商に対して

$$\begin{aligned}
&\sup_{0<|\sigma|\le 1} |\sigma|^{-\theta\gamma}\|\Delta_\lambda^\sigma \langle x\rangle^\varepsilon (VG_0(\lambda))^n u\|_{L^1} \\
&\qquad \le Cn(C/\lambda)^{(n-2)(1-\theta\delta_*(\rho))}\|\langle x\rangle^{-\varepsilon}u\|_1. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

$f(\lambda) = h_{L,\lambda_0}(\lambda)G_n(\lambda)u$ に対して自明な等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\sigma} f(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\sigma}(f(\lambda) - f(\lambda - \pi/\sigma))d\lambda. \qquad (4.12)$$

を用い, $\lambda \le \lambda_0$ で $h_{L,\lambda_0}(\lambda) = 0$ であることを用いれば $(n-2)(1-\theta\delta_*(\rho)) > 1$ を満たす $n$ に対して (4.9) が得られる。 □

命題 4.1 は $\lambda_0$ を十分大きく取って, 補題 4.2 と補題 4.3 を補間したあとに, (4.5) の右辺で $n$ について和を取れば得られる。

## § 4.2. 低エネルギー評価

次に低エネルギー部分 $u_{low}(\lambda) = \chi(\lambda/2\lambda_0)(1 + VG_0(\lambda))^{-1}u$ に対する評価を示そう。ふたたび

$$\hat{u}_{low}(\sigma, x) = (\mathcal{F}_{\lambda\to\rho} u_{low})(\sigma, x)$$

と書く。

命題 4.4. $0 < \gamma, \varepsilon, \gamma + \varepsilon < \kappa_{\max}$ とする.

$$\iint_{\mathbb{R}^4} \langle\sigma\rangle^\gamma \langle x\rangle^\varepsilon |\hat{u}_{low}^{(\ell)}(\sigma, x)| dx d\sigma \le C\|\langle x\rangle^\varepsilon u\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \qquad (4.13)$$

が成立する。ただし $C$ は $u$ によらない定数である。

証明の basic strategy はふたたび Goldberg から拝借する. $B(\lambda, \mu) = G_0(\lambda) - G_0(\mu)$ と定義する。Hardy の不等式の帰結である次の補題の証明は読者にまかせる。

補題 4.5. $0 \le \varepsilon + \theta < \kappa_{\max}$ に対して

$$\|\langle x\rangle^\varepsilon VB(\lambda, \mu)\langle x\rangle^{-\varepsilon}\|_{\mathbf{B}(L^1)} \le C|\lambda - \mu|^\theta. \qquad (4.14)$$

$S(\lambda) = (1 + VG_0(\lambda))^{-1}$ と定義する。$S(\lambda)$ は $\mathbf{B}(\langle x\rangle^{-\varepsilon} L^1)$ 値ノルム連続である。レゾルベント方程式によって

$$S(\lambda) = (1 + VG_0(\lambda))^{-1} = (1 + S(\mu)VB(\lambda, \mu))^{-1} S(\mu). \tag{4.15}$$

(4.14) によって $d_0 > 0$ を小さく取れば $|\lambda|, |\mu| \le 2\lambda_0$ の時, $|\lambda - \mu| < 4d_0$ に対して

$$\|S(\mu)VB(\lambda, \mu)\|_{\mathbf{B}(\langle x\rangle^{-l-\varepsilon} L^1)} < 1/2. \tag{4.16}$$

そこで $\chi(\lambda/2\lambda_0)$ を台が長さ $d_0$ 以下の小さな台を持つ関数に分解して

$$\chi(\lambda/2\lambda_0) = \sum_{j=-n}^{n} \chi_{j,d}(\lambda), \quad \chi_{j,d}(\lambda) \equiv \chi\left((\lambda - \mu_j)/d\right) \chi(\lambda/2\lambda_0). \tag{4.17}$$

として,

$$u_{low}(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \chi_{j,d}(\lambda) S(\lambda) u \equiv \sum_{j=1}^{n} u_{low,j}\,. \tag{4.18}$$

と分解する。各 $u_{low,j}$ に対して (4.13) を示せばよい。 (4.16) によって, $\chi_{j,d}(\lambda) \ne 0$ の時, $\mathbf{B}(\langle x\rangle^{-\varepsilon} L^1)$ において

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= (1 + \chi((\lambda - \mu_j)/2d) S(\mu_j) VB(\lambda, \mu_j))^{-1} S(\mu_j) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\chi((\lambda - \mu_j)/2d) S(\mu_j) VB(\lambda, \mu_j))^m S(\mu_j) \end{aligned} \tag{4.19}$$

と展開できる。$0 \le \varepsilon < \kappa_{\max}$ である。$|\mu| \le 2\lambda_0$ に対して

$$T_\mu(\lambda) = \chi((\lambda - \mu)/2d) S(\mu) VB(\lambda, \mu).$$

と定義する。

補題 4.6. $0 \le \varepsilon + \gamma + \theta < \kappa_{\max}$ とする. $0 < d < 1$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} \langle\sigma\rangle^{\gamma} \left\|\langle x\rangle^{\varepsilon} \mathcal{F}(T_\mu(\lambda)u)(\sigma, x)\right\|_1 d\sigma \le C d^{\theta} \|\langle x\rangle^{\varepsilon} u\|_1. \tag{4.20}$$

$C$ は $|\mu| \le 2\lambda_0$ および $0 < d < 1$ にはよらない定数.

補題 4.6 の証明に用いる次の初等的な補題の証明は省略する。

補題 4.7. $0 \le \varepsilon, \theta \le 1$, $0 \le \theta + \varepsilon \le 1$ とする. $0 < d \le 1$, $0 < \rho < \infty$ に対して次が成立する：

$$a \int \langle\sigma\rangle^{\varepsilon} |\hat\chi(a(\sigma - \rho)) - \hat\chi(a\sigma)| d\sigma \le C a^{\theta} \langle\rho\rangle^{\theta+\varepsilon}. \tag{4.21}$$

$\varepsilon = 0$ なら $\langle\rho\rangle^{\theta}$ を $|\rho|^{\theta}$ で置き換えてよい.

**補題 4.6 の証明** $S(\mu) \in \mathbf{B}(\langle x\rangle^{-\varepsilon}L^1)$ だから $\chi((\lambda-\mu)/2d)VB(\lambda,\mu)$ に対して示せばよい。$G_0(\lambda)$ の積分核表示を用いると

$$\mathcal{F}_{\lambda\to\sigma}\{\chi((\lambda-\mu)/2d)VB(\lambda,\mu)u\}(\sigma,x) = \int_{\mathbb{R}^3} K(\sigma,x,y)u(y)dy,$$
$$K(\sigma,x,y) = 2de^{-i\mu(\sigma-|x-y|)}V(x)\left(\frac{\hat{\chi}(2d(\sigma-|x-y|))-\hat{\chi}(2d\sigma)}{4\pi|x-y|}\right).$$

補題 4.7 を用いると

$$\int \langle\sigma\rangle^{\gamma}|\langle x\rangle^{\varepsilon}K(\sigma,x,y)\langle y\rangle^{-\varepsilon}|d\sigma \le C|V(x)|d^{\theta}\frac{\langle x-y\rangle^{\gamma+\varepsilon+\theta}}{|x-y|}. \tag{4.22}$$

右辺を $\langle x\rangle^{\gamma+\varepsilon+\theta}|x|^{-1}$ を核とする合成積作用素と掛け算作用素 $V$ との積と考え, 前者に Hardy 型あるいは Young の不等式を用いれば補題が得られる。 □

$fg$ のフーリエ変換が $\hat{f}$, $\hat{g}$ の合成積であることを用いれば次の補題は補題 4.6 から帰納的に得られる。

補題 4.8. $0 \le \varepsilon+\gamma+\theta < \kappa_{\max}$, $0<d<1$ とする。$k=1,\dots,n$ に対して, $S_k(\lambda)$ は $\mathbf{B}(L^1(\mathbb{R}^3))$ に値をもつ $\mathbb{R}$ のコンパクト台をもつ連続関数で, $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ に対して

$$(S_k u)(\lambda,x) = S_k(\lambda)u(x) \in L^1(\mathbb{R}^4_{(\lambda,x)}),$$

と定義する時, $u$ によらない定数 $C_k$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}}\langle\sigma\rangle^{\gamma}\left\|\langle x\rangle^{\varepsilon}\widehat{S_k u}(\sigma,x)\right\|_1 d\sigma \le C_k d^{\theta}\|\langle x\rangle^{\varepsilon}u\|_1 \tag{4.23}$$

が成立すると仮定する。この時,

$$T_n(\lambda) \equiv S_n(\lambda)\cdots S_1(\lambda)$$

は

$$\int_{\mathbb{R}}\langle\sigma\rangle^{\gamma}\left\|\langle x\rangle^{\varepsilon}\widehat{T_n u}(\sigma,x)\right\|_1 d\sigma \le C^n\left(\prod_{k=1}^{n}C_k\right)d^{n\theta}\|\langle x\rangle^{\varepsilon}u\|_1, \tag{4.24}$$

を満たす。$C$ は $n$, $C_1,\dots,C_n$, $d$, $u$ にはよらない定数.

低エネルギー部分の評価である命題 4.4 は補題 4.8 から従う。

$$f_m(\lambda,x) = \chi_{j,d}(\lambda)\times((4.19)\text{ の右辺の第 } m \text{ 項})u(x)$$

と定義すれば, $d<1$ を十分小さく取る時,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\iint_{\mathbb{R}^4}\langle\sigma\rangle^{\sigma}\|\langle x\rangle^{\varepsilon}(\mathcal{F}_{\lambda\to\sigma}f_m)(\sigma,x)\|dxd\sigma \le \sum_{m=1}^{\infty}(Cd^{\theta})^m\|\langle x\rangle^{\varepsilon}u\|$$

となるからである。詳細は省略してよいだろう（[13] を参照)。

## References


[1] S. Agmon, *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa C1, Sci. (4) **2** (1975), 151–218.

[2] S. Agmon, *Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations: bounds on eigenfunctions of $NN$-body Schödinger operators*. Mathematical Notes, **29**. Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1982.

[3] G. Artbazar and K. Yajima, *The $L^p$-continuity of wave operators for one dimensional Schrödinger operators*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **7** (2000), 221-240.

[4] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation spaces, an introduction*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1976).

[5] F. Cardoso, C. Cuevas and G. Vodev, *Dispersive estimates for the Schrödinger equation with potentials of critical regularity.* Cubo **11** (2009), 57–70.

[6] F. Cardoso, C. Cuevas and G. Vodev, *High frequency dispersive estimates for the Schrödinger equation in high dimensions.* Asymptot. Anal. **71** (2011), 207–225.

[7] H. Cyson, R. Froese, W. Kirsch and B. Simon, *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry.* Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[8] P. D'Ancona and L. Fanelli, *$L^p$-boundedness of the wave operator for the one dimensional Schrödinger operator*, Comm. Math. Phys. **268** (2006), no. 2, 415–438.

[9] M. B. Erdoğan and W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators in the presence of a resonance and/or an eigenvalue at zero energy in dimension three I.* Dynamics of PDE, **1** (2004), 359.

[10] M. B. Erdoğan and W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrodinger operators in the presence of a resonance and/or an eigenvalue at zero energy in dimension three. II.* J. Anal. Math. **99** (2006), 199–248.

[11] D. Finco and K. Kenji, *The $L^p$ boundedness of wave operators for Schrödinger operators with threshold singularities. II. Even dimensional case.* J. Math. Sci. Univ. Tokyo **13** (2006), no. 3, 277–346.

[12] A. Galtbayar, A. Jensen and K. Yajima, *Local time-decay of solutions to Schrödinger equation with time-periodic potentials*, J. Stat. Phys. **116** (2004), 231–282.

[13] A. Galtbayar and K. Yajima *Resolvent Estimates in Amalgam Spaces and Asymptotic Expansions for Schrödinger Equations*, to appear in Jour. Math. Soc. Japan.

[14] M. Goldberg and W. Schlag, *A limiting absorption principle for the three-dimensionalSchrödinger equation with $L^p$ potentials.* Int. Math. Res. Not. 2004, no. 75, 4049–4071.

[15] M. Goldberg, *Dispersive estimate for the three-dimensional Schrödinger equation with almost critical potentials*, Geom. and Funct. Anal. **16** (2006), no. 3, 517-536.

[16] M. Goldberg and W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators in dimensions one and three*, Commun. Math. Phys. **251** (2005), 157–178.

[17] M. Goldberg and M. Visan, *A counter example to dispersive estimates for Schrödinger operators in higher dimensions*, Comm. Math. Phys. **266** (2006), no. 1, 211–238.

[18] A. D. Ionescu and D. Jerison, *On the absence of positive eigenvalues of Schrödinger operators with rough potentials.* Geom. Funct. Anal. **13** (2003), no. 5, 1029–1081.

[19] A. D. Ionescu and W. Schlag, *Agmon-Kato-Kuroda theorems for a large class of perturbations.* Duke Math. J. **131** (2006), no. 3, 397–440.

[20] A. Jensen and T. Kato, *Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions*, Duke Math. J. **46** (1979), 583–611.

[21] A. Jensen and K. Yajima, *A remark on $L^p$-boundedness of wave operators for two dimensional Schrödinger operators*, Commun. Math. Phys. **225** (2002), 633–637.

[22] A. Jensen and K. Yajima, *On $L^p$ boundedness of wave operators for 4-dimensional Schrödinger operators with threshold singularities.* Proc. Lond. Math. Soc. (3) **96** (2008), no. 1, 136–162.

[23] J.-L. Journe, A. Soffer and C. D. Sogge, *Decay estimates for Schrödinger operators.* Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), no. 5, 573–604.

[24] T. Kato, *Remarks on the essential selfadjointness and related problems for differential operators* in Spectral theory of differential operators, ed. by J. W. Knowles and R. T. Lewis (North Holland, Amsterdam 1981).

[25] C. E. Kenig, A. Ruiz and C. D. Sogge, *Uniform Sobolev inequalities and unique continuation for second order constant coefficient differential operators.* Duke Math. J. **55** (1987), 329–347.

[26] H. Koch and D. Tataru, *Carleman estimates and absence of embedded eigenvalues.* Comm. Math. Phys. **267** (2006), no. 2, 419–449.

[27] S. T. Kuroda, *Scattering theory for differential operators. I. Operator theory* and II. Self-adjoint elliptic operators, J. Math. Soc. Japan **25** (1973), 75–104 and 222–234.

[28] H. Mizutani, *Dispersive estimates and asymptotic expansions for Scrödinger equations in dimension one*, J. Math. Soc. Japan, to appear.

[29] M. Murata, *Asymptotic expansions in time for solutions of Schrödinger-type equations*, J. Funct. Anal., **49** (1982), 10–56.

[30] J. Rauch, *Local decay of scattering solutions to Schrödinger equation*, Comm. Math. Phys. **61** (1978), 149–168.

[31] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics vol II, Fourier analysis, selfadjointness*, Academic Press, New-York, San Francisco, London (1975).

[32] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics vol IV, Analysis of operators*, Academic Press, New-York, San Francisco, London (1978).

[33] I. Rodnianski, W. Schlag and A. Soffer, *Dispersive analysis of charge transfer models.* Comm. Pure Appl. Math. **58** (2005), 149–216.

[34] I. Rodnianski and W. Schlag, *Time decay for solutions of Schrödinger equations with rough and time-dependent potentials.* Invent. Math. **155** (2004), 451–513.

[35] W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators in dimensions two*, Commun. Math. Phys. **257** (2005), 87-117.

[36] W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators: a survey* in Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations, Ann. of Math. Stud.,**163** (2007), 255–285, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.

[37] E. M. Stein, *Interpolation of linear operator*, Trans. Amer. Math. Soc. **83** (1956), 482–492.

[38] K. Yajima, *The $W^{k,p}$-continuity of wave operators for Schrödinger operators.* J. Math. Soc. Japan **47** (1995), 551–581.

[39] K. Yajima, *Dispersive estimates for Schrödinger equations with thereshold resonance and eigenvalue*, Commun. Math. Phys. **259** (2005), 475–509.

[40] K. Yajima, *On time dependent Schrödinger equations*, in *Dispersive nonlinear problems in mathematical physics*, ed. P. D'Ancona and V. Georgev, Quaderni di Matematica **15**, Seconda Università di Napoli (2005), 267–329.

[41] K. Yajima, *The $L^p$ boundedness of wave operators for Schrödinger operators with threshold singularities. I. The odd dimensional case.* J. Math. Sci. Univ. Tokyo **13**

(2006), no. 1, 43–93.