# 4 次元 3 次超曲面と K3 曲面

大内元気

本稿では 4 次元 3 次超曲面と K3 曲面の関係について紹介し、最後に講演で話した主定理について述べる.

## 1　4 次元 3 次超曲面と K3 曲面

以下、基礎体は複素数体 $\mathbb{C}$ とし 4 次元 3 次超曲面や K3 曲面は常に滑らかで射影的とする. 4 次元 3 次超曲面は、有理性問題、複素シンプレクティック多様体の構成、K3 曲面との関係などという観点から研究されてきた. 1 章ではこれらについて簡単にまとめる.

### 1.1　ホッジ理論

4 次元 3 次超曲面と K3 曲面の関係についてホッジ理論の観点から述べる. [Has00] の結果を紹介する. $X$ を 4 次元 3 次超曲面、$S$ を K3 曲面とする. $X$ の 4 次のコホモロジーのホッジ分解を考えると

$$0 \quad 1 \quad 21 \quad 1 \quad 0$$

となる また、$S$ の 2 次のコホモロジーのホッジ分解は良く知られているように

$$1 \quad 20 \quad 1$$

である. ここで交点数に関する符号を考えるとそれぞれ $(21,2),(3,19)$ であることに注意する. Hassett は、[Has00] において $H^4(X,\mathbb{Z})$ と $H^2(S,\mathbb{Z})(-1)$ の符号 $(19,2)$ の部分格子に注目し 4 次元 3 次超曲面と K3 曲面の関係について調べた.

**Definition 1.1.** 4 次元 3 次超曲面 $X$ が *special* であるとは、$\mathrm{rk}H^{2,2}(X,\mathbb{Z})$ が 2 以上であることをいう. このとき $H^{2,2,}(X,\mathbb{Z})$ はランク 2 の原始的部分格子 $K$ で $H^2 \in K$ となるものが存在する. ここで $H = \mathrm{c}_1(\mathcal{O}_X(1))$ である. $K$ の $H^4(X,\mathbb{Z})$ 中での直交補空間 $K^\perp$ は符号 $(19,2)$ の部分格子を与える. $d = \mathrm{det}K$ となる $K$ が存在するとき $X$ は判別式 $d$ であるという.

K3 曲面 $S$ についてはその上の偏極 $h$ についてその原子コホモロジー $H^2(S,\mathbb{Z})_{\mathrm{prim}}(-1) = h^\perp$ を考えると符号 $(19,2)$ の部分格子が得られる. Hassett は次を示した.

**Theorem 1.2.** ([Has00]) $\mathcal{C}$ を 4 次元 3 次超曲面のモジュライ空間とし、$d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $\mathcal{C}_d$ を special で判別式が $d$ であるような 4 次元 3 次超曲面全体のなす部分集合とする. このとき次が成り立つ.

- $d > 6$ かつ $d \equiv 0,2(\mathrm{mod}6)$ であることと $\mathcal{C}_d \neq \phi$ であることは同値である. また、 $\mathcal{C}_d \neq \phi$ のとき $\mathcal{C}_d$ は余次元 1 の既約な閉集合である.
- $d$ が 4 と 9 と $p$ で割り切れないことは次と同値である: 任意の $X \in \mathcal{C}_d$ に対し $H^{2,2}(X,\mathbb{Z})$ のランク 2

の原始部分格子 $K$ とある次数 $d$ の変極 K3 曲面 $(S,h)$ が存在して $K^{\perp}$ と $H^2(S,\mathbb{Z})_{\mathrm{prim}}(-1)$ がホッジ同型、$H^2 \in K$, $\det K = d$ となる．ここで $p$ は任意の奇素数で $p \equiv 2(\mathrm{mod}3)$ となるものである．

$d$ に関する一つ目の条件を (*)、二つ目の条件を (**) と呼ぶ．

## 1.2 導来圏

次に 4 次元 3 次超曲面と K3 曲面の関係について導来圏の観点から述べる．[Kuz10] や [AT] の結果を紹介する．$X$ を 4 次元 3 次超曲面とする．このとき $X$ 上の連接層の導来圏 $D^b(X)$ は次のような半直交分解をもつ．

$$D^b(X) = \langle \mathcal{A}_X, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1), \mathcal{O}_X(2) \rangle.$$

Kuznetsov[Kuz10] は、次を示した．

**Theorem 1.3.** ([Kuz10]) $\mathcal{A}_X$ は 2 次元 Calabi-Yau 圏である．つまり、2 回シフト関手 [2] は $\mathcal{A}_X$ の Serre 関手を与える．

さらに次の予想を提唱した．この予想の動機は [Kuz15] で詳しく説明されている．

**Conjecture 1.4.** ([Kuz10]) $X$ が有理的であることと $\mathcal{A}_X$ が K3 曲面の導来圏と同値になることは同値である．

Addington と Thomas は [AT] で Hassett の条件と Kuznetsov の条件が本質的に等価であることを示した．

**Theorem 1.5.** ([AT]) 次が成り立つ．

- $\mathcal{A}_X$ が K3 曲面の導来圏と同値ならば、ある $(*)$ と $(**)$ を満たす $d$ が存在して $X \in \mathcal{C}_d$ となる．
- $d$ が $(*)$ と $(**)$ を満たしているとする．このとき $\mathcal{C}_d$ のある Zarisiki 開集合 $U_d$ が存在して任意の $X \in U_d$ について $\mathcal{A}_X$ が K3 曲面の導来圏と同値になる．

上の $U_d$ として $\mathcal{C}_d$ を取れると期待されているが、技術的な困難があるため上のような主張になっている．

## 1.3 複素シンプレクティック多様体

複素シンプレクティック多様体とは、単連結で滑らかな射影的代数多様体 $M$ で $H^{2,0}(M) = \mathbb{C}\omega$ となるものをいう．ここで $\omega$ は各点で非退化な正則 2 形式である．$\omega$ は $M$ 上の複素シンプレクティック形式と呼ばれる．例えば K3 曲面は複素シンプレクティック多様体である．K3 曲面や 4 次元 3 次超曲面から複素シンプレクティック多様体の例を構成できる．

**Example 1.6.** $S$ を *K3* 曲面とする．$\mathrm{Hilb}^n(S)$ を $S$ 上の $n$ 点の Hilbert スキームとすると $\mathrm{Hilb}^n(S)$ は $2n$ 次元の複素シンプレクティック多様体になる．一般に次が成り立つ．$v \in H^*(S,\mathbb{Z})$ を原始ベクトルとし、$h$ を $v$ に関して一般的な豊富因子とする．このとき $S$ 上の $h$ に関する安定層のモジュライ空間 $M_h(S)$ は複素シンプレクティック多様体になる．このとき、$M$ 上複素シンプレクティック形式 $\omega$ は次のようにかける．$[E] \in M_h(v)$ に対し、

$$\omega_{[E]} \colon \mathrm{Ext}^1(E,E) \times \mathrm{Ext}^1(E,E) \to \mathrm{Ext}^2(E,E) \simeq \mathrm{End}(E)^* \simeq \mathbb{C}$$

ここで最初の写像は米田積である．

**Example 1.7.** $X$ を 4 次元 3 次超曲面とし、$F(X) := \{l \in \mathrm{Gr}(2,6) \mid l \subset X\}$ を $X$ 上の直線のなす Fano スキームとする．このとき $F(X)$ は、$\mathrm{Hilb}^2(K3)$ と変形同値な 4 次元複素シンプレクティック多様体である [BD]. $l \in F(X)$ 上で複素シンプレクティック形式 $\omega$ は

$$\mathrm{Ext}^1(\mathrm{pr}(\mathcal{O}_l(1)), \mathrm{pr}(\mathcal{O}_l(1))) \times \mathrm{Ext}^1(\mathrm{pr}(\mathcal{O}_l(1)), \mathrm{pr}(\mathcal{O}_l(1))) \to \mathrm{Ext}^2(\mathrm{pr}(\mathcal{O}_l(1)), \mathrm{pr}(\mathcal{O}_l(1))) \simeq \mathrm{End}(\mathrm{pr}(\mathcal{O}_l(1)))^* \simeq \mathbb{C}$$

と同一視できる [KM]. ここで $\mathrm{pr} : D^b(X) \to \mathcal{A}_X$ は、包含関手 $\mathcal{A}_X \to D^b(X)$ の左随伴関手である．このことから $F(X)$ は $\mathcal{A}_X$ の対象のモジュライ空間と同一視できることが期待できる．

最近 Lehn ら [LLSS] は 4 次元 3 次超曲面を用いて 8 次元複素シンプレクティック多様体の例を構成した．

**Example 1.8.** $X$ を射影平面を含まない 4 次元 3 次超曲面とする．このとき、ある 8 次元複素シンプレクティック多様体 $Z$ で $X$ が $Z$ のラグランジュ部分多様体となるようなものを構成できる [LLSS]. ここで $Z$ は $X$ 上のねじれ 3 次曲線の Hilbert スキームを縮約して得られる．$C$ を $X$ 上のねじれ 3 次曲線とすると $C$ は $\mathbb{P}^5$ の中のある $\mathbb{P}^3$ に含まれる．Lehn らは各 $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^5$ に対し、3 次曲面 $X \cap \mathbb{P}^3$ 上のねじれ 3 次曲線を調べることで Hilbert スキームの縮約を構成した．$X$ が射影平面 $P$ を含むとき、$P \subset \mathbb{P}^3$ となるような $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^5$ に対して $X \cap \mathbb{P}^3$ は、平面と 2 次曲面の和に退化してしまう．これを避けるために $X$ に関する仮定がつけられている．

2 章では、4 次元 3 次超曲面 $X$ が射影平面を含む場合に Example 1.8 の類似が成り立つことを説明する．この場合 8 次元複素シンプレクティック多様体は、あるねじれ K3 曲面上のある Bridgeland 安定性条件に関する安定対象のモジュライ空間として構成される．

## 2 射影平面を含む 4 次元 3 次超曲面

まず、射影平面を含む 4 次元 3 次超曲面から K3 曲面を構成する．$X$ を射影平面 $P$ を含む 4 次元 3 次超曲面とする．$\sigma\colon \tilde{X} \to X$ を $X$ の $P$ を中心とするブローアップとし $p\colon \widetilde{\mathbb{P}^5} \to \mathbb{P}^5$ を $\mathbb{P}^5$ の $P$ を中心とするブローアップとする．$P$ からの線形射影は $q\colon \widetilde{\mathbb{P}^5} \to \mathbb{P}^2$ を誘導する．これは、 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-h)$ の射影化である．ここで $h$ は $\mathbb{P}^2$ の中の直線である．$D$ を $\sigma$ の例外因子とすると $D$ は $H - h$ と線形同値である．$j\colon \tilde{X} \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{P}^5}$, $\pi := q \circ j\colon \tilde{X} \to \mathbb{P}^2$ とおく．このとき $\pi\colon \tilde{X} \to \mathbb{P}^2$ は 6 次曲線 $C$ 上に退化ファイバーをもつ 2 次曲面ファイブレーションの構造をもつ．$X$ を一般にとり $C$ が滑らかであると仮定する．$f\colon S \to \mathbb{P}^2$ を $C$ で分岐する二重被覆とする．このとき $S$ は K3 曲面である．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, hook] \arrow[d] & \tilde{X} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "\sigma"'] & \widetilde{\mathbb{P}^5} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "q"] & & \\
P \arrow[r, hook] & X \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^5 \arrow[r, dotted] & \mathbb{P}^2 & S \arrow[l, "f"']
\end{tikzcd}$$

Kuznetsov([Kuz10]) はある Brauer クラス $\alpha$ が存在して $\mathcal{A}_X$ が $D^b(S,\alpha)$ と同値であることを示した．ここで $D^b(S,\alpha)$ は $S$ 上の $\alpha$ に関するねじれ連接層の導来圏である．$\alpha$ の構成法について述べる．

2 次曲面ファイブレーション $\pi$ は $\mathbb{P}^2$ 上の Clifford 代数の層 $Cl$ を定める．$Cl$ の偶数次部分を $Cl_0$ とする．$\mathrm{Coh}(Cl_0)$ を連接右 $Cl_0$ 加群のなすアーベル圏とし、その導来圏を $D^b(Cl_0)$ とかく．Kuznetsov は同

値 $\Psi : \mathcal{A}_X \to D^b(Cl_0)$ を [Kuz10] において具体的に構成した．このとき $S$ 上の Azumaya 代数の層 $\mathcal{B}$ で $f_*\mathcal{B} = Cl_0$ を満たすものが存在し、$f_*\colon \mathrm{Coh}(\mathcal{B}) \to \mathrm{Coh}(Cl_0)$ が同値になる．$\mathcal{B}$ が定める $S$ 上の Brauer 群の元を $\alpha$ とすると、あるランク 2 の $\alpha$ ねじれベクトル束 $\mathcal{U}_0$ が存在して $\otimes\mathcal{U}_0^\vee\colon \mathrm{Coh}(S,\alpha) \to \mathrm{Coh}(\mathcal{B})$ が同値になる．ここで $\mathrm{Coh}(\mathcal{B})$ は連接右 $\mathcal{B}$ 加群のなすアーベル圏、$\mathrm{Coh}(S,\alpha)$ は $S$ 上の $\alpha$ に関するねじれ層のアーベル圏 [C] である．

**Theorem 2.1.** ([Kuz10])
$\Phi := (f_* \circ \otimes\mathcal{U}_0^\vee)^{-1} \circ \Psi\colon \mathcal{A}_X \to D^b(S,\alpha)$ とおくと、$\Phi$ は同値である．

これから Example 1.8 の類似について考える．$X$ をラグランジュ部分多様体として含む複素シンプレクティック多様体 $M$ を構成する．構成において $X \to M$ は関手 $\mathrm{pr}\colon D^b(X) \to \mathcal{A}_X$ と $\Phi\colon \mathcal{A}_X \to D^b(S,\alpha)$ が重要である．

**Remark 2.2.** $\mathrm{pr}\colon D^b(X) \to \mathcal{A}_X$ は包含関手の左随伴として定義したが、以後 $\Phi\colon \mathcal{A}_X \to D^b(S,\alpha)$ と相性の良い別の半直交分解

$$D^b(X) = \langle \mathcal{O}_X(-1), \mathcal{A}_X, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1) \rangle.$$

に関する射影関手を $\mathrm{pr}\colon D^b(X) \to \mathcal{A}_X$ とかくことにする．

$\mathcal{A}_X$ は 2 次元 Calabi-Yau 圏なので、$\mathcal{A}_X$ の対象のモジュライ空間は複素シンプレクティック多様体になると期待できる．特に $x \in X$ に対して $\mathrm{pr}(\mathcal{O}_x) \in \mathcal{A}_X$ を考えると $X$ から複素シンプレクティック多様体への写像ができると期待できる．このアイディアに基づき $X \to M$ を構成する．次が成り立つ．

**Proposition 2.3.** $X$ を 4 次元 3 次超曲面とし、$x \in X$ とする．このとき次が成り立つ．

- $x \neq y \in X$ のとき、$\mathrm{pr}(\mathcal{O}_x)$ と $\mathrm{pr}(\mathcal{O}_y)$ は同型でない．
- $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x) = \mathbb{C}^4$, $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{pr}(\mathcal{O}_x), \mathrm{pr}(\mathcal{O}_x)) = \mathbb{C}^8$ で
  $\mathrm{Ext}^2(\mathrm{pr}(\mathcal{O}_x), \mathrm{pr}(\mathcal{O}_x)) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{pr}(\mathcal{O}_x), \mathrm{pr}(\mathcal{O}_x)) = \mathbb{C}$ となる．
- 線形写像 $\mathrm{pr}\colon \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x) \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{pr}(\mathcal{O}_x), \mathrm{pr}(\mathcal{O}_x))$ は単射である．
- 米田積
  $$\omega_x\colon \mathrm{Ext}^1(\mathrm{pr}(\mathcal{O}_x), \mathrm{pr}(\mathcal{O}_x)) \times \mathrm{Ext}^1(\mathrm{pr}(\mathcal{O}_x), \mathrm{pr}(\mathcal{O}_x)) \to \mathrm{Ext}^2(\mathrm{pr}(\mathcal{O}_x), \mathrm{pr}(\mathcal{O}_x))$$
  は $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x)$ 上で 0 である．

Proposition 2.3 によりもしモジュライ空間 $M$ が構成できれば、$X$ から 8 次元複素シンプレクティック多様体へのラグランジュ埋め込みが定まる．今のところ $\mathcal{A}_X$ 上の対象に関する良いモジュライ理論がないが、$X$ が射影平面を含むときには同値 $\Phi\colon \mathcal{A}_X \to D^b(S,\alpha)$ を用いることで [Bri08] や [HMS] にあるような Bridgeland 安定性条件の理論や [BM1] や [BM2] にあるような K3 曲面上のモジュライ理論を使うことができる．

**Theorem 2.4.** ([BM1],[BM2]) $S$ を K3 曲面、$\alpha \in \mathrm{Br}(S)$ を Brauer 類、$v \in H^*(S,\mathbb{Z})$ を原始ベクトル $\sigma \in \mathrm{Stab}(S,\alpha)$ を $v$ に関して一般的な $D^b(S,\alpha)$ 上の幾何学的 Bridgeland 安定性条件とする．このとき、$D^b(S,\alpha)$ の $\sigma$ に関して安定な対象で向井ベクトルが $v$ のものの粗モジュライ空間 $M_\sigma(v)$ が存在し、複素シンプレクティック多様体になる．ここで $H^*(S,\alpha,\mathbb{Z})$, は $\alpha$ に関するねじれ向井格子である．

この定理により、幾何学的で一般的な Bridgeland 安定性条件 $\sigma \in \mathrm{Stab}(S,\alpha)$ ですべての $x \in X$ に対して $\Phi(\mathrm{pr}(\mathcal{O}_x))$ が $\sigma$ に関して安定になるようなものを構成できればよい．Bridgeland 安定性条件とは次のような

ものである.

**Definition 2.5.** ([Bri07]) $\mathcal{D}$ を三角圏で $\mathcal{D}$ 上の数値的 Grothendieck 群 $N(\mathcal{D})$ がランク有限なものとする. 数値的 Grothendieck 群 $N(\mathcal{D})$ とは通常の Grothendieck 群 $K(\mathcal{D})$ を Euler 形式 $\chi\colon K(\mathcal{D})\times K(\mathcal{D})\to\mathbb{Z}$ に関して自明なもので割ってできた群である. $\mathcal{D}$ 上の Bridgeland 安定性条件 $\sigma=(Z,\mathcal{C})$ とは群準同型 $Z:N(\mathcal{D})\to\mathbb{C}$ と $\mathcal{D}$ 上の有界 t 構造の核 $\mathcal{C}\subset\mathcal{D}$ の組であって次の条件を満たすものである.

- 任意の $0\neq E\in\mathcal{C}$ に対して $Z(E)\in\{re^{i\pi\phi}\in\mathbb{C}\mid r>0,0<\phi\leq 1\}$ が成り立つ.
- 任意の $0\neq E\in\mathcal{C}$ に対してフィルトレーション $\mathcal{C}$

$$0=E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_N=E$$

  で次を満たすものが存在する. $F_i:=E_i/E_{i-1}$ は $\sigma$ に関して半安定で任意の $i$ に対して $\phi(F_i)>\phi(F_{i+1})$ が成り立つ. このフィルトレーションは Harder-Narashimhan フィルトレーションと呼ばれる.
- $N(\mathcal{D})_{\mathbb{R}}$ 上のノルム $||-||$ をひとつ固定する. このとき定数 $C$ で任意の 0 でない $\sigma$ に関して半安定な対象 $E\in\mathcal{C}$ に対して $||E||\leq C\cdot|Z(E)|$ となる.

ここで $0\neq E\in\mathcal{C}$ に対して $\phi(E):=\arg(Z(E))/\pi\in(0,1]$ とおいた. また $E\in\mathcal{C}$ が $\sigma$ に関して（半）安定であるとは $0\neq F\subset E$ に対して $\phi(F)<(\leq)\phi(E)$ が成り立つことをいう.

ねじれ K3 曲面上の Bridgeland 安定性条件は次のようにして構成できる.

**Example 2.6** ([Bri08], [HMS])**.** $(S,\alpha)$ をねじれ *K3* 曲面とする. $\alpha\in\mathrm{Br}(S)=H^2(S,\mathcal{O}_S^*)_{\mathrm{tor}}$ であった. 指数完全列から $B\in H^2(S,\mathbb{Q})$ で $\exp(B^{0,2})=\alpha$ となるものがとれる. このとき Chern 指標 $\mathrm{ch}^B\colon K(D^b(S,\alpha))\to H^*(S,\mathbb{Z})$ が存在する ([HS]). $E\in K(D^b(S,\alpha))$ に対して $v(E):=\mathrm{ch}^B(E)\sqrt{\mathrm{td}(S)}$ とおき、$v(E)$ を $E$ の向井ベクトルという. $B'\in\mathrm{NS}(S)_{\mathbb{R}}$ と $\mathbb{R}$ 上の豊富類 $\omega\in\mathrm{NS}(S)_{\mathbb{R}}$ をとる. $\tilde{B}:=B'+B\in H^2(S,\mathbb{R})$ とおく. 群準同型 $Z:=Z_{\tilde{B},\omega}\colon N(S,\alpha)\to\mathbb{C}$ を次のように定義する.

$$Z_{\tilde{B},\omega}(E):=-\int_S e^{-(\tilde{B}+i\omega)}v(E).$$

このとき、有界 t 構造の核 $\mathrm{Coh(S,\alpha)}$ を $\tilde{B}$ に関して tilting と呼ばれる操作を施すと新しい有界 t 構造の核 $\mathcal{C}_{\tilde{B},\omega}$ が得られる. このとき、$\sigma_{\tilde{B},\omega}=(Z_{\tilde{B},\omega},\mathcal{C}_{\tilde{B},\omega})$ が Bridgeland 安定性条件になることと spherical な $E\in\mathrm{Coh}(S,\alpha)$ で $Z_{\tilde{B},\omega}(E)\in\mathbb{R}_{\leq 0}$ となるようなものが存在しないことは同値である.

しかし、一般に 4 次元 3 次超曲面 $X$ に対して $\mathcal{A}_X$ 上に Bridgeland 安定性条件が存在するのかどうかはわかっていない. また、Bayer-Macri のようなモジュライ理論も今のところ $\mathcal{A}_X$ 上では知られていない.
筆者は次の定理を示した.

**Theorem 2.7.** ([O]) $X$ を射影平面を含む 4 次元 3 次超曲面とし、$\Phi\colon\mathcal{A}_X\to D^b(S,\alpha)$ を Theorem 2.1 における同値とする. $B\in H^2(S,\mathbb{Q})$ で $\exp(B^{0,2})=\alpha$ となるような $B$ を一つとる. $v:=v(\Phi(\mathrm{pr}(\mathcal{O}_x)))$ とおく. このとき、ある $B'\in H^2(S,\mathbb{Q})$ と $\mathbb{R}$ 上の豊富類 $\omega\in\mathrm{NS}(S)_{\mathbb{R}}$ が存在して、任意の $x\in X$ に対して $\Phi(\mathrm{pr}(\mathcal{O}_x))$ は Bridgeland 安定性条件 $\sigma_{\tilde{B},\omega}$ に関して安定になる. また、$\sigma_{\tilde{B},\omega}$ は $v$ に関して一般的である.

$M$ を向井ベクトルが $v$ であるような $\sigma_{\tilde{B},\omega}$ に関して安定な対象のモジュライ空間とする. Proposition 2.3 と Theorem 2.4 と Theorem 2.7 から自然な射 $X\to M$ は $X$ が $M$ のラグランジュ部分多様体になるような

閉埋め込みであることがわかる．Theorem 2.7 における $B'$ や $\omega$ は Definition 2.5 の一つ目に条件が成り立つよう選び、あとは実際に $\Phi(\mathrm{pr}(\mathcal{O}_x))$ が安定かどうかを議論する際に適切に選び直すことで構成することができる．構成は極めて具体的でアドホックである．最近 Huybrechts[Huy] が Theorem 1.5 をねじれ K3 曲面の場合に拡張した．4 次元 3 次超曲面 $X$ で $\mathcal{A}_X$ がねじれ K3 曲面と同値なものに対しては Bridgeland 安定性条件の理論 [Bri08], [HMS] やモジュライ理論 [BM1],[BM2] を使えるので Theorem2.7 の類似を示せると期待できる．しかし、Theorem 2.1 のような具体的な圏同値があるわけではないので Theorem 2.7 のような安定性条件をあまり具体的な記述を使わずに構成しなければならない.

## 参考文献


[AT] N. Addington and R. Thomas, *Hodge theory and derived categories of cubic fourfolds,* arXiv:1211.3758.

[Bri07] T. Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories,* Ann. of Math **166** (2007), 317-345.

[Bri08] T. Bridgeland, *Stability conditions on K3 surfaces,* Duke Math.J. **141** (2008), 241-291.

[BD] A. Beauville and R. Donagi, *La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension 4,* C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. **301**(1985), 703-706.

[BM1] A. Bayer and E. Macri. *projectivity and birational geometry of Bridgeland moduli spaces,*Journal of the AMS 27 (2014), 707-752, arXiv:1203.4613v2.

[BM2] A. Bayer and E. Macri. *MMP for moduli of sheaves on K3s via wall crossing: nef and movable cones, Lagrangian fibrations,*Inventiones mathematicae 198 (2014), no. 3, 505–590, arxiv:1301.6968v3.

[C] A. Căldăraru, *Derived categories of twisted sheaves on Calabi-Yau manifolds,* Ph.D.Thesis, Cornell University, May 2000.

[Has00] B. Hassett, *Special cubic fourfolds,* Compositio Math. **120** (2000), 1-23.

[Huy] D. Huybrechts, *The K3 category of a cubic fourfold,* arXiv:1505.01775.

[HMS] D. Huybrechts, E. Macri and P. Stellari, *Stability conditions for generic K3 categories,* Compositio Math. **144** (2008), 134-162.

[HS] D. Huybrechts, P. Stellari, *Equivalences of twisted K3 surfaces,* Math. Ann. **322** (2005), 901-936.

[Kuz10] A. Kuznetsov, *Derived categories of cubic fourfolds,* in: Cohomological and geometric approaches to rationality problems, Progr.Math. **282** (2010), 219-243.

[Kuz15] A. Kuznetsov, *Derived categories view on rationality problems,* arXiv:1509.09115

[KM] A. Kuznetsov and D. Markushevich. *Symplectic structures on moduli spaces of sheaves via the Atiyah class,* J. Geom. Phys, 59(7):843-860, 2009.

[LLSS] CF. Lehn, M. Lehn, CH. Sorger and D. Van Straten, *Twisted cubics on cubic forfolds,* arXiv:1305.0178v2.

[O] G. Ouchi, *Lagrangian embeddings of cubic fourfolds containing a plane,*arXiv:1407.7265.



Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, Meguro-ku, Tokyo 153-8914, Japan

*E-mail-address*: genki.oouchi@ipmu.jp