コホモロジーの消滅定理と単射性定理について

松村 慎一 (MATSUMURA Shin-ichi) *

2015 年 12 月 10 日

概要

この報告書では, Kodaira の消滅定理の一般化についての著者の研究成果について概説する. 具体的には, 最小特異計量に対する Nadel 型の消滅定理, 乗数イデアル層付きの Kollár の単射性定理, 及びその相対版を複素幾何の視点から説明する. 証明では, 適切な意味で "semi-positive" な直線束や (特異) 計量を調和積分論や $\overline{\partial}$-方程式の L^2-理論で調べる技術が鍵となる.

1 はじめに〜Kodaira の消滅定理〜

代数幾何や複素幾何においてコホモロジーの消滅定理は重要な役割を果たす. それ故に, 状況や目的に応じて様々な消滅定理やその一般化が研究されてきた. この報告書では, Kodaira の消滅定理の超越的な手法を用いた一般化, 特に "semi-positive" な直線束や (特異) 計量への一般化についての著者の最近の研究成果について概説する. 近年, [BCHM10] により標準束が適切な意味で "positive" の場合に極小モデル理論が完成し, "semi-positive 性" の研究は重要性を増してきていると思われる. 解説される結果は主に [Kol86a], [Kol86b] のいくつかの結果の複素幾何の視点からの一般化である. 具体的には,

* 東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
mshinichi@m.tohoku.ac.jp, mshinichi0@gmail.com

- 第 2 節で, 最小特異計量に対する Nadel 型の消滅定理 ([Mat15a])
- 第 3 節で, 特異計量や乗数イデアル層を用いた Kollár の単射性定理の擬正な (pseudo-effective) 直線束への一般化 ([Mat13], [Mat14])
- 第 4 節で, 第 3 節の結果の相対版 ([Mat15c]) と Kollár-Ohsawa 型の消滅定理 ([Mat15b])

が解説される. この報告書では (正確さを犠牲にして) 証明のアイデアを伝えることを重視しているので, 正確な議論についてはそれぞれの論文を読んで頂きたい.

この節では, Kodaira の消滅定理に対する 2 通りの証明 (調和積分論を用いた証明と $\overline{\partial}$-方程式の L^2-理論を用いた証明) について復習する. 調和積分論と L^2-理論のそれぞれの長所を組み合わせることで, 第 2 節, 第 3 節, 第 4 節で紹介される結果が得られていくことになる. この報告書を通して, X で n 次元のコンパクトケーラー多様体, F で X 上の (正則) 直線束を表す. まずは Kodaira の消滅定理の主張から復習しよう.

定理 1 (Kodaira の消滅定理)**.** 直線束 F が positive (即ち, チャーン曲率が positive になるエルミート計量を許す) ならば, 以下が成立する :

$$\text{整数 } q > 0 \text{ に対して, } H^q(X, K_X \otimes F) = 0.$$

ここで K_X は X の標準束である.

Kodaira の埋め込み定理によれば直線束の ample 性と positive 性は同値なので, X を非特異射影多様体とし “positive” を “ample” と読み替えれば, これは純粋な代数幾何の主張とみなせる. この視点からは Deligne-Illusie-Raynaud による正標数還元を用いた証明が知られている (例えば [EV92] を参照). Hodge 理論的な視点からの証明は [KM98], [Fn08], [Fn09] でも学べる.

さて, Kodaira の消滅定理の超越的な手法を用いた証明について復習しよう.

調和積分論を用いた証明

Dolbeault の定理を用いると, コホモロジー $H^q(X, K_X \otimes F)$ は以下のように $\overline{\partial}$-コホモロジーを用いて記述できる:

$$H^q(X, K_X \otimes F) \cong \frac{\operatorname{Ker} \overline{\partial} : C_\infty^{n,q}(X,F) \to C_\infty^{n,q+1}(X,F)}{\operatorname{Im} \overline{\partial} : C_\infty^{n,q-1}(X,F) \to C_\infty^{n,q}(X,F)}.$$

ここで $C_\infty^{n,\bullet}(X,F)$ は C^∞-級の F に値をとる $(n,\bullet)$-形式の集合で, $\overline{\partial}$ は外微分作用素 d の $(0,1)$-部分である. 簡単のために, しばしば F に値をとる $(n,\bullet)$-形式を単に微分形式と呼ぶ. さて, 与えられたコホモロジー類 A に対して, A を代表する $\overline{\partial}$-閉な微分形式 u の中で L^2-ノルム $\|u\|_{h,\omega}$ が最小のものを考えよう. ここで, h は F の (そのチャーン曲率が positive になる) エルミート計量で, ω は X 上のケーラー形式である. また, L^2-ノルム $\|u\|_{h,\omega}$ は

$$\|u\|^2_{h,\omega} := \int_X |u|^2_{h,\omega} \frac{\omega^n}{n!}$$

で定義される. L^2-ノルムが最小になる代表元 u がちゃんと C^∞-級になることを示す点が技術的には難しい. 議論の流れとしては, u が微分方程式 $\Delta_{\overline{\partial}} u = 0$ の弱解になることを示し, 楕円型微分作用素の正則性定理より C^∞-級であることを示すことになる. ここで, $\Delta_{\overline{\partial}}$ は $\Delta_{\overline{\partial}} := \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}$ で定義される $\overline{\partial}$-ラプラシアンである. ($\overline{\partial}^*$ は $\overline{\partial}$ の随伴作用素である.) この調和形式 u に対して, Bochner-Kodaira-Nakano の等式を用いると

$$0 = \|\overline{\partial} u\|^2_{h,\omega} + \|\overline{\partial}^* u\|^2_{h,\omega} = \|D'_h u\|^2_{h,\omega} + \|D'^*_h u\|^2_{h,\omega} + \langle\!\langle Au, u \rangle\!\rangle_{h,\omega}$$

がわかる. 一方で, 曲率が positive であることから $\langle\!\langle Au, u \rangle\!\rangle_{h,\omega} \geq c\|u\|^2_{h,\omega}$ がわかる. ここで D'_h はチャーン接続 D_h の $(1,0)$-部分で, A は $A := \sqrt{-1}\Theta_h(F)\Lambda_\omega$ である. (Λ_ω はウェッジ積 $\omega \wedge \bullet$ の随伴作用素.) 以上の議論から u が恒等的に零になることがわかり, そのコホモロジー類 A が零であることが従う. □

$\overline{\partial}$-方程式に対する L^2-理論を用いた証明

局所的には $\overline{\partial}$-方程式が L^2-ノルム付きで解けることを用いると, コホモロジー $H^q(X, K_X \otimes F)$ を L^2-空間の $\overline{\partial}$-コホモロジーで記述できる：

$$H^q(X, K_X \otimes F) \cong \frac{\operatorname{Ker} \overline{\partial} : L^{n,q}_{(2)}(X,F)_{h,\omega} \to L^{n,q+1}_{(2)}(X,F)_{h,\omega}}{\operatorname{Im} \overline{\partial} : L^{n,q-1}_{(2)}(X,F)_{h,\omega} \to L^{n,q}_{(2)}(X,F)_{h,\omega}}.$$

ここで $L^{n,\bullet}_{(2)}(X,F)_{h,\omega}$ は L^2-ノルムが有限な F に値をとる $(n,\bullet)$-形式の集合である. ($\overline{\partial}$ は閉作用なので慎重に扱う必要がある.) この同型より, 高次コホモロジーが消えるかという問題は, 任意の $\overline{\partial}$-閉な微分形式 u が $\overline{\partial}$-完全である (即ち, 偏微分方程式 $\overline{\partial}v = u$ が解 v を持つ) かという問題に置き換わる.

曲率が positive の場合は, 以下のように関数解析的な手法を用いることで, $\overline{\partial}$-方程式 $\overline{\partial}v = u$ を解くことができる. まず, Bochner-Kodaira-Nakano の等式を用いると, 適切な閉作用素の定義域に入る α に対して

$$\begin{aligned} |\langle\!\langle \alpha, u \rangle\!\rangle_{h,\omega}|^2 &\leq \langle\!\langle A^{-1}u, u \rangle\!\rangle_{h,\omega} \langle\!\langle A\alpha, \alpha \rangle\!\rangle_{h,\omega} \\ &\leq C\|u\|^2_{h,\omega}(\|\overline{\partial}\alpha\|^2_{h,\omega} + \|\overline{\partial}^*\alpha\|^2_{h,\omega}) \end{aligned}$$

なる評価が得られる. この不等式から, $g(\overline{\partial}^*\alpha) := \langle\!\langle \alpha, u \rangle\!\rangle_{h,\omega}$ で定義される線形写像 $g\colon \operatorname{Im} \overline{\partial}^* \to \mathbb{C}$ が (well-defined で) 有界作用素になることがわかる. 実際, α を $\operatorname{Ker} \overline{\partial}$ とその直交補空間の成分に $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ と直交分解すると

$$|g(\overline{\partial}^*\alpha)|^2 = |\langle\!\langle \alpha_1, u \rangle\!\rangle_{h,\omega}|^2 \leq C\|u\|^2_{h,\omega}\|\overline{\partial}^*\alpha_1\|^2_{h,\omega} \leq C\|u\|^2_{h,\omega}\|\overline{\partial}^*\alpha\|^2_{h,\omega}$$

がわかる. このとき, Hahn-Banach の定理と Riesz の表現定理から, $\overline{\partial}v = u$ と L^2-評価 $\|v\|^2_{h,\omega} \leq C\|u\|^2_{h,\omega}$ を満たす v の存在がわかる. □

この議論の利点は解の存在だけでなく, その L^2-ノルムまで評価できる点にある. このような量的な評価が出来るのは解析の利点のひとつであり, 様々な応用を与えてくれる. もちろん, 調和積分論が劣っている訳ではなく一長一短である. 後述するように, 単射性定理の証明では調和積分論が有効に働く. また, 乗数イデアル層を用いた単射性定理の一般化を考える際には, 調和積分論と $\overline{\partial}$-方程式の L^2-理論を組み合わせる技術が重要となる.

2 Nadel, Kawamata-Viehweg の消滅定理

この節では, 最小特異計量に対する Nadel 型の消滅定理 ([Mat15a]) について説明する. まずは Nadel のコホモロジー消滅定理を復習しよう.

定理 2 (Nadel の消滅定理, [Nad89], [Nad90] cf. [Dem82])**.** h を曲率が positive になる F の特異計量とする. このとき, 以下が成立する :

$$\text{整数 } q > 0 \text{ に対して, } H^q(X, K_X \otimes F \otimes \mathcal{I}(h)) = 0.$$

ここで $\mathcal{I}(h)$ は特異計量 h の乗数イデアル層である.

特異計量, その曲率, 乗数イデアル層の定義を復習する. 簡単のため, 直線束 F の C^∞-級エルミート計量 g を固定する. ここで, C^∞-級エルミート計量とは $x \in X$ のファイバー F_x のエルミート内積 g_x の族 $\{g_x\}_{x \in X}$ であり, $x \in X$ について C^∞-級になるものである. 雑に言えば, 特異計量とはこの C^∞-級という条件を弱めたエルミート計量である. X 上の L^1_{loc}-関数 φ に対して

$$h := ge^{-2\varphi}$$

の形のエルミート計量 h を特異計量といい, φ を (g に関する)h のウェイトという. 特異計量 h の曲率はウェイト φ を用いて $\sqrt{-1}\Theta_h(F) := \sqrt{-1}\Theta_g(F) + 2\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi$ と定義される. 関数 φ が C^∞-級のとき h は (通常の)C^∞-級エルミート計量であり, そのチャーン曲率は上式で与えられるので, 上式は特異計量への自然な一般化になっている. 微分 $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi$ は Schwartz の超関数の意味での微分なので, 特異計量の曲率は C^∞-級の $(1,1)$-形式でなく一般には $(1,1)$-カレントとなる. (ここでの微分を定義するために関数 φ に L^1_{loc}-性を要請している.) 特異計量の曲率は $(1,1)$-カレントの意味で $\sqrt{-1}\Theta_h(F) \geq 0$ を満たすとき semi-positive であるという. この条件は (局所的に)$\sqrt{-1}\Theta_h(F) = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\psi$ を満たす関数 ψ が多重劣調和であることと同値である. また, あるエルミート形式 ω に対して $\sqrt{-1}\Theta_h(F) \geq \omega$ を満たすときに positive であるという. この条件は局所座標 $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ と十分小さい $\delta > 0$

に対して $\psi - \delta\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2$ が多重劣調和になることと同値である．乗数イデアル層 $\mathcal{I}(h)$ は開集合 $U \subset X$ に対して

$$\mathcal{I}(h)(U) := \mathcal{I}(\varphi)(U) := \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid |f|e^{-\varphi} \in L^2_{\mathrm{loc}}(U)\}$$

とおくことで定義される． 特異計量 h がある C^∞-級の $(1,1)$-形式 γ に対して $\sqrt{-1}\Theta_h(F) \geq \gamma$ を満たすとき, φ は局所的に C^∞-級関数と多重劣調和関数の和の形でかける．このとき h の乗数イデアル層は連接層になることが知られている．

特異計量の具体例を見てみよう．

例 3. テンソル冪 F^m の (正則) 切断の族 $\{s_i\}_{i=1}^N$ に対して

$$\varphi := \frac{1}{2m}\log\Big(\sum_{i=1}^{N}|s_i|^2_{g^m}\Big)$$

とおくと, $h := ge^{-2\varphi}$ は (g の取り方によらない) 特異計量になる．その曲率は $\sqrt{-1}\Theta_h(F) = (1/m)\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log\sum_{i=1}^{N}|s_i|^2$ となり, semi-positive であることもわかる．($|s_i|$ は s_i を局所的に正則関数と見なしたときの絶対値である.) この h の "特異性" は多重劣調和関数 $(1/2m)\log\sum_{i=1}^{N}|s_i|^2$ から定まっている．このような特異計量は代数的特異性 (algebraic singularities) を持つという．また, $\{s_i\}_{i=1}^N$ の定めるイデアル層が正規交差な因子 D の定めるイデアル層 $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-D)$ になるような双有理写像 $\pi : \widetilde{X} \to X$ を取ると, 乗数イデアル層 $\mathcal{I}(h)$ は

$$\mathcal{I}(h) = \pi_*(K_{\widetilde{X}/X} - \lfloor\frac{1}{m}D\rfloor)$$

と記述できる．ここで $\lfloor(1/m)D\rfloor$ は係数の切り捨てで出来る因子である．右辺は代数幾何における乗数イデアル層の定義となる (例えば [Laz04] を参照).

直線束 F が曲率が positive になる特異計量 h を許すとき, F は巨大な (big) 直線束であるという．(この条件は F の小平次元が $n = \dim X$ と一致することと同値である.) Nadel の消滅定理は Kodaira の消滅定理の巨大な直線束への一般化とみなせる．直線束 F がネフかつ巨大のとき, F は曲率が positive で乗数イデアル層が自明となる特異計量 h を許す (ネフの定義は第 3 節を参照)．この考察から以下の Kawamata-Viehweg の消滅定理が導かれる．

定理 4 (Kawamata-Viehweg の消滅定理, [Kaw82], [Vie82])**.** 直線束 F がネフかつ巨大のとき, 以下が成立する :

$$\text{整数 } q > 0 \text{ に対して, } H^q(X, K_X \otimes F) = 0.$$

より一般に, X が非特異射影多様体で直線束 F がネフのとき

$$\text{整数 } q > n - \kappa_\sigma(F) \text{ に対して, } H^q(X, K_X \otimes F) = 0$$

が得られる. ここで $\kappa_\sigma(F)$ は F の数値的小平次元である. この主張は超平面を用いた次元に関する数学的帰納法から従う. 以下の問題は部分的な結果 ([Cao14], [DP03]) はあるものの未解決である. (有名な問題だが誰が最初に提案したかを著書は知らない.)

問題 5. X がコンパクトケーラー多様体で直線束 F がネフのとき

$$\text{整数 } q > n - \kappa_\sigma(F) \text{ に対して, } H^q(X, K_X \otimes F) = 0$$

が成立するだろうか.

F が巨大のとき (より一般に擬正のとき), semi-positive な曲率を持つ特異計量の中で特異性が最もマイルドな計量が構成できる. この計量を最小特異計量 (metrics with minimal singularities) とよび, $h_{\min}$ とかく. この最小特異計量は解析的ザリスキー分解を許す, 即ち

$$H^0(X, F^m \otimes \mathcal{I}(h_{\min}^m)) \xrightarrow{\cong} H^0(X, F^m)$$

を満たす. 雑に言えば, $F \otimes \mathcal{I}(h_{\min})$ をザリスキー分解の positive 部分もどきと捉えられる訳である. この最小特異計量は (semi-positive な曲率を持つが), F が positive(ample) の場合を除いて positive な曲率を持たず, 一般には非代数的な特異性を持つので扱いが難しい. [Mat15a] では, この困難さを解決して, 最小特異計量を用いた Nadel 型の消滅定理を証明した.

定理 6 ([Mat15a])**.** $h_{\min}$ を巨大な直線束 F の最小特異計量とする. このとき, 以下が成立する :

$$\text{整数 } q > 0 \text{ に対して, } H^q(X, K_X \otimes F \otimes \mathcal{I}(h_{\min})) = 0.$$

最小特異計量の乗数イデアル層 $\mathcal{I}(h_{\min})$ の代数幾何的な類似物として, 漸近的乗数イデアル層 (asymptotic multiplier ideal sheaves)$\mathcal{I}(\|F\|)$ と呼ばれるものがあり, これに対しては Nadel 型の消滅定理が成立することが知られている (例えば [Laz04] を参照). 上の定理はこの結果の複素解析幾何版とみなせる. この結果を arXiv で公開した 10 ヶ月後に Guan-Zhou が多重劣調和関数の乗数イデアル層に関する (strong) openness conjecture を解決した ([GZ15]). その後に, Hiệp や Lempert によって別証明が与えられた ([Hie14], [Lem14]). この予想 (既に定理) は, 多重劣調和関数 φ の乗数イデアル層が十分小さな $\delta > 0$ に対して $\mathcal{I}(\varphi) = \mathcal{I}((1+\delta)\varphi)$ を満たすことを主張する. [DEL00, Theorem 1.11] より $\mathcal{I}(h_{\min}^{1+\delta}) \subset \mathcal{I}(\|F\|) \subset \mathcal{I}(h_{\min})$ がわかるので, 巨大な直線束 F に対しては $\mathcal{I}(h_{\min})$ と $\mathcal{I}(\|F\|)$ が一致することが従う. つまり, 以上の定理を組み合わせれば, 上の定理は既知の結果から従う訳である.

問題 7. 直線束 F がアバンダント (即ち, 小平次元 $\kappa(F)$ と数値的小平次元 $\kappa_\sigma(F)$ が一致する) のとき, F の最小特異計量の乗数イデアル層 $\mathcal{I}(h_{\min})$ と漸近的乗数イデアル層 $\mathcal{I}(\|F\|)$ は一致するか.

上述の議論より F が巨大 (即ち $\kappa(F) = \kappa_\sigma(F) = n$) のときは肯定的に解決される. また, F がネフかつアバンダントのときも [Kaw85], [Nak85] から正しいことがわかる.

定理 6 の証明の概略を与えよう. この証明をさらに発展させることで Kollár の単射性定理などが一般化されることになる.

定理 6 の証明の概略

まず, $\overline{\partial}$-方程式を局所的に L^2-ノルム付きで解くことで, コホモロジー $H^q(X, K_X \otimes F \otimes \mathcal{I}(h_{\min}))$ を L^2-空間の $\overline{\partial}$-コホモロジーで記述する:

$$H^q(X, K_X \otimes F \otimes \mathcal{I}(h_{\min})) \cong \frac{\operatorname{Ker} \overline{\partial} : L^{n,q}_{(2)}(X,F)_{h_{\min},\omega} \to L^{n,q+1}_{(2)}(X,F)_{h_{\min},\omega}}{\operatorname{Im} \overline{\partial} : L^{n,q-1}_{(2)}(X,F)_{h_{\min},\omega} \to L^{n,q}_{(2)}(X,F)_{h_{\min},\omega}}.$$

任意のコホモロジー類 A を代表する F に値をとる (n,q)-形式 u をとる. 以後, しばしばノルムの添え字の ω を省略する. 曲率が positive な特異計量 $h_{\rm big}$ に関する L^2-ノルム $\|u\|_{h_{\rm big}}$ が有限ならば, 通常の Nadel の定理から u が $\overline{\partial}$-完全であることが従

う．問題は $\|u\|_{h_{\mathrm{big}}}=\infty$ の場合である．この場合はテンソル冪 F^m の切断 s を適切にとり，F^{m+1} の特異計量 $h^m_{\mathrm{big}}h_{\min}$ に関する L^2-ノルム $\|su\|_{h^m_{\mathrm{big}}h_{\min}}$ を考える．このとき，$\sup_X |s|_{h^m_{\mathrm{big}}}<\infty$ を満たすように s と h_{big} を選んでおけば

$$\|su\|^2_{h^m_{\mathrm{big}}h_{\min}}=\int_X |su|^2_{h^m_{\mathrm{big}}h_{\min}}\frac{\omega^n}{n!}\leq \sup_X |s|^2_{h^m_{\mathrm{big}}}\int_X |u|^2_{h_{\min}}\frac{\omega^n}{n!}<\infty$$

より $\|su\|^2_{h^m_{\mathrm{big}}h_{\min}}$ は有限となる．$h^m_{\mathrm{big}}h_{\min}$ の曲率は positive だから，通常の Nadel の定理から $\overline{\partial}$-方程式 $\overline{\partial}v=su$ が $L^{n,\bullet}_{(2)}(X,F^{m+1})_{h^m_{\mathrm{big}}h_{\min}}$ 内で解 v を持つことがわかる．最小特異計量の特異性は h_{big} よりマイルドなので，当然，$L^{n,\bullet}_{(2)}(X,F^{m+1})_{h^{m+1}_{\min}}$ 内でも解を持つことがわかる．以上より，切断 s から誘導される写像

$$\Phi_s : H^q(X,K_X\otimes F\otimes \mathcal{I}(h_{\min}))\xrightarrow{\otimes s} H^q(X,K_X\otimes F^{m+1}\otimes\mathcal{I}(h^{m+1}_{\min}))$$

が零写像であることがわかった．

写像 Φ_s が単射であることがわかれば主張が従う．もし $h_{\min}$ がザリスキー開集合 Y 上で C^∞-級であれば，[Eno90] と [Fn12] に基づく以下の議論から単射が従う．まずはこれを確認しよう．最初に Y 上の完備ケーラー形式 $\widetilde{\omega}$ を以下を満たすように取る (このような $\widetilde{\omega}$ の構成法は [Fn12] を参照).

- $\widetilde{\omega}\geq\omega$.
- 任意の $x\in X$ のある近傍上で $\widetilde{\omega}=\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\Phi$ を満たす有界関数 Φ が存在する．

このとき，[Fn12, Claim 1] より同型

$$\begin{aligned}H^q(X,K_X\otimes F\otimes\mathcal{I}(h_{\min}))&\cong\frac{\mathrm{Ker}\,\overline{\partial}:L^{n,q}_{(2)}(F)_{h_{\min},\widetilde{\omega}}\to L^{n,q+1}_{(2)}(F)_{h_{\min},\widetilde{\omega}}}{\mathrm{Im}\,\overline{\partial}:L^{n,q-1}_{(2)}(F)_{h_{\min},\widetilde{\omega}}\to L^{n,q}_{(2)}(F)_{h_{\min},\widetilde{\omega}}}\\&\cong\mathcal{H}^{n,q}_{h_{\min},\widetilde{\omega}}(F)\end{aligned}$$

が得られる．ここで，$\mathcal{H}^{n,q}_{h_{\min},\widetilde{\omega}}(F)$ は Y 上の調和形式の集合である．この同型からコホモロジー類を調和形式で代表することが出来る．この事実と Bochner-Kodaira-Nakano の等式を応用すると，調和形式 u に対して su も調和形式になることがわかる ([Eno90] の議論)．ここから Φ_s の単射性が従う．

最小特異計量 $h_{\min}$ はザリスキー開集合上 C^∞-級とは限らない．そこで，一般の場合は [DPS01] の特異計量の近似定理を用いて，以下を満たす F の特異計量の族 $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ を取る．

- h_ε はザリスキー開集合 Y 上で C^∞-級である．
- $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$ に対して $h_{\varepsilon_2}\le h_{\varepsilon_1}\le h_{\min}$ が成立する．
- $\mathcal{I}(h_{\min})=\mathcal{I}(h_\varepsilon)$ が成立する
- $\sqrt{-1}\Theta_{h_\varepsilon}(F)\ge -\varepsilon\omega$ が成立する．

ここで Y は ε によらないものを取ることができることに注意する．この近似の利点は，h_ε は Y 上 C^∞-級なので Y 上で調和積分論が使える点にある．調和積分論が使えるとは言っても，h_ε の曲率は semi-positive とは限らないので，直接 Enoki の議論を使うことはできない．そこで，与えられたコホモロジー類 A を代表する h_ε に関する調和形式 u_ε に対して，su_ε が "漸近的に" 調和形式に近づくことを示す．具体的には $\lim_{\varepsilon\to 0}\|\overline{\partial}^* su_\varepsilon\|_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}}=0$ を示す．一方で，最初の議論を L^2-ノルムを込めて行うことで，$\overline{\partial}$-方程式 $\overline{\partial}v_\varepsilon=su_\varepsilon$ の解 v_ε で $\|v_\varepsilon\|_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}}$ が (ε に関して) 有界になるものが取れる．以上の議論より

$$\|su_\varepsilon\|^2_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}}=\langle\!\langle \overline{\partial}^* su_\varepsilon, v_\varepsilon\rangle\!\rangle_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}}\le \|\overline{\partial}^* su_\varepsilon\|_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}}\|v_\varepsilon\|_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}}\to 0$$

がわかる．この収束から適切な意味で $u_\varepsilon\to 0$ を示すことができ，そこからコホモロジー類 A が零になることが従う． □

特異計量 h_ε の曲率は semi-positive とは限らないので su_ε は調和形式から "ズレ" るかもしれない．その "ズレ" を L^2-ノルムの良い評価で補正するというのが証明のアイデアである．この節の最後に，最小特異計量に対する $\overline{\partial}$-方程式の解の L^2-ノルムについての問題を述べる．

問題 8. $q>0$, F を巨大とする．定理 6 より，$\overline{\partial}$-閉な $u\in L^{n,q}_{(2)}(X,F)_{h_{\min}}$ に対して $\overline{\partial}v=u$ を満たす解 $v\in L^{n,q-1}_{(2)}(X,F)_{h_{\min}}$ の存在がわかる．では，L^2-ノルムに関する "良い" 評価を満たす解 v は構成できるだろうか．

3 Kollár の単射性定理

この節では, 消滅定理の "semi-positive" な直線束への一般化である単射性定理を考える. まずは Kollár の単射性定理とその複素幾何の設定への一般化である Enoki の単射性定理を復習し, その後にこれらの乗数イデアル層を用いた一般化 (定理 11) について説明する. 定理 11 と今までの定理との関係を図で表すと以下のようになる.

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\text{Kodaira の消滅定理}\\ F\text{ の仮定}\begin{cases}\text{複素幾何: } C^{\infty}\text{-級計量で曲率が正}\\ \text{代数幾何: 豊富 (ample)}\end{cases}\end{array} \arrow[r, "\text{単射性定理}", "\text{への一般化}"'] \arrow[d, "\text{特異計量への}"', "\text{一般化}"] & \begin{array}{c}\text{Kollár, Enoki の単射性定理}\\ \begin{cases}\text{複素幾何: } C^{\infty}\text{-級計量で曲率が半正}\\ \text{代数幾何: 半豊富 (semi-ample)}\end{cases}\end{array} \arrow[d, "\text{特異計量への}"', "\text{一般化}"] \\
\begin{array}{c}\text{Nadel, Kawamata-Viehweg の消滅定理}\\ \begin{cases}\text{複素幾何: 特異計量で曲率が正}\\ \text{代数幾何: 巨大 (big)}\end{cases}\end{array} \arrow[r, "\text{単射性定理}", "\text{への一般化}"'] & \begin{array}{c}\text{定理 11 の単射性定理}\\ \begin{cases}\text{複素幾何: 特異計量で曲率が半正}\\ \text{代数幾何: 擬正 (pseudo-effective)}\end{cases}\end{array}
\end{tikzcd}$$

まずは, 消滅定理の semi-ample な直線束, semi-positive な直線束への一般化である Kollár の単射性定理, Enoki の単射性定理を復習しよう.

定理 9 (Kollár の単射性定理 (Enoki の単射性定理), [Kol86a], [Eno90])**.** X を非特異射影多様体 (コンパクトケーラー多様体), F を semi-ample(semi-positive) な直線束とする. このとき, F^m の切断 $s(\neq 0)$ から誘導される写像

$$\Phi_s : H^q(X, K_X \otimes F) \xrightarrow{\otimes s} H^q(X, K_X \otimes F^{m+1}).$$

は単射である.

定義 10. (1) F のテンソル冪 $F^m (m > 0)$ が共通零点を持たない切断を許すとき, F は semi-ample であるという.

(2) F が曲率が semi-positive になる C^{∞}-級計量を許すとき, F は semi-positive であるという.

(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, F が $\sqrt{-1}\Theta_{h_\varepsilon}(F) \geq -\varepsilon\omega$ を満たす C^{∞}-級計量 h_ε を許

すとき, F は数値的に半正 (numerically effective, 単にネフと書く) であるという.

X が射影多様体のとき, 上記のネフの定義は任意の曲線 C との交点数 $(F \cdot C)$ が非負であることと同値である. 代数幾何ではこの条件がネフの定義となる. semi-ample ならば semi-positive で, semi-positive ならばネフであるが, 逆はいずれも成り立たない. 非特異射影多様体はコンパクトケーラー多様体で semi-ample ならば semi-positive なので, Enoki の結果は Kollár の結果の一般化になっている. その証明は Kollár の証明と異なり調和積分論に基づいている. 単射性定理については [Sko78], [Tan71], [Ohs04] などでも研究されている.

F が曲率が semi-positive になる特異計量を許すとき, F は擬正 (pseudo-effective) であるという. では, 擬正な直線束に対して上の単射性定理はどのように一般化されるのだろうか. [Fn12] ではザリスキー開集合上で C^{∞}-級の特異計量に対する単射性定理が与えられている. 以下の定理はこの問いに対する答えのひとつであり, [Fn12] の任意の特異計量への一般化である.

定理 11 ([Mat13])**.** h を曲率が semi-positive な F の特異計量とする. このとき, $\sup_X |s|_{h^m} < \infty$ を満たす F^m の切断 $s(\neq 0)$ から誘導される写像

$$\Phi_s : H^q(X, K_X \otimes F \otimes \mathcal{I}(h)) \xrightarrow{\otimes s} H^q(X, K_X \otimes F^{m+1} \otimes \mathcal{I}(h^{m+1}))$$

は (well-defined で) 単射である.

注意 12. (1) 切断 s のノルムの関する条件は Φ_s を well-defined にするための自然な仮定である. また, F の最小特異計量はこの条件を全ての切断に対して満たすので, (F が擬正ならば) いつでもこの定理を応用することができる.

(2) 定理の定式化のポイントは乗数イデアル層を用いる点にある. たとえ直線束がネフでも (ネフ直線束は常に擬正だが), 乗数イデアル層なしでは単射性定理は成立しないことに注意する

定理 11 の証明の概略を述べる.

定理 11 の証明の概略

まず, 定理 6 の証明と同様に, 特異計量 h を F の特異計量の族 $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ で近似する．条件 $\sup_X |s|_{h^m} < \infty$ から Y は ε によらないとして良いことがわかる．先程と同様の同型を用いて, 与えられたコホモロジー類 A を h_ε に関する調和形式 u_ε で代表する．$K_X \otimes F$ ではなく乗数イデアル付きの連接層 $K_X \otimes F \otimes \mathcal{I}(h)$ を考えていることから, L^2-ノルム $\|u_\varepsilon\|_{h_\varepsilon,\widetilde{\omega}}$ が (ε に関して) 有界であることがわかる．この評価から Enoki の単射性定理の証明を一般化して $\lim_{\varepsilon\to 0} \|\overline{\partial}^* s u_\varepsilon\|_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}} = 0$ を示すことができる．我々の目的は単射を証明することなので, sA はコホモロジー類として零だと仮定してよい．この仮定から $\overline{\partial}$-方程式 $\overline{\partial} v_\varepsilon = s u_\varepsilon$ が解 v_ε を持つことがわかる．

定理 6 と同じ方針で証明を行おうとすると, この解 v_ε の L^2-ノルム $\|v_\varepsilon\|_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}}$ が問題となる．今の状況で $\|v_\varepsilon\|_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}}$ が (ε に関して) 有界になるような v_ε を構成できれば証明は完成する．先程は F の巨大性 (曲率の positive 性) をうまく使うことで, そのような解 v_ε を構成していた．定理 11 の証明の鍵は, $\overline{\partial} v_\varepsilon = s u_\varepsilon$ の解 v_ε をうまく構成し L^2-ノルム $\|v_\varepsilon\|_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}}$ を評価する点にある．もし考えている計量の曲率が positive ならば, 解 v_ε を $\|v_\varepsilon\|^2_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}} \leq C\|s u_\varepsilon\|^2_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}}$ を満たすように取れ, 右辺の有界性から問題は解決する．しかし, 今の状況では h_ε の曲率は positive どころか semi-positive でもない．ここが証明の難しさのひとつである．雰囲気として v_ε のノルムを $s u_\varepsilon$ のノルムで抑えたいので, $\overline{\partial}$-作用素が開写像になるというような主張をしたい．しかし, $\overline{\partial}$-作用素は閉作用素であるし, 考えている L^2-空間は ε に依存して変化するので, このままでは定式化もうまく出来ない．そこで, $\overline{\partial}$-方程式 $\overline{\partial} v_\varepsilon = s u_\varepsilon$ をコバウンダリー作用素 δ を用いた方程式 $\delta W_\varepsilon = S_\varepsilon$ に変換することを考える．実はコチェインの空間は ε に依らず, δ も開写像であるということがわかる．この方程式 $\delta W_\varepsilon = S_\varepsilon$ を先に解いて良い解 W_ε を構成し, それから v_ε を得ることを考える．

簡単のために $q=1$ の場合を考える．X の有限開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ を各 U_i が (十分小さい) 開球になるようにとる．このとき, 各 U_i 上では $\overline{\partial}$-方程式が L^2-ノルム付きで解けることを利用し, U_i 上で $\overline{\partial} v_{\varepsilon,i} = s u_\varepsilon$ を満たし, L^2-ノルム $\|v_{\varepsilon,i}\|_{h_\varepsilon^{m+1},\widetilde{\omega}}$ が有界になる解 $v_{\varepsilon,i}$ を取る．この解達から定まるコチェイン $S_\varepsilon := \delta(\{v_{\varepsilon,i}\}) = \{v_{\varepsilon,j} - v_{\varepsilon,i}\}$ を考える．ノルムの評価とコチェインの空間やチェックコホモロジーの位相を調べることで, (うまく部分列をとれば)S_ε は実際にはコバウンダリーで, ある S_0 に収束することがわかる．S_0 もコバウンダリーなので $\delta W_0 = S_0$ を満たす W_0 が取れる．δ が

開写像なので W_0 の有界開集合の像は開集合になる．この有界開集合から $\delta W_\varepsilon = S_\varepsilon$ を満たす W_ε を取り, 適切な意味で有界な 0-コチェイン $W_\varepsilon = \{W_{\varepsilon,i}\}$ が得られる．有限開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ の単位の分割 $\{\rho_i\}_{i\in I}$ をとり, $v_\varepsilon := \sum_{k\in I}\rho_k(V_{\varepsilon,k} - W_{\varepsilon,k})$ とおけば, v_ε が我々の構成したかった解であることがわかる．v_ε の L^2-ノルムは W_0 の取り方や単位の分割に依存し良い評価でない．しかし, (ε に関して) 有界であるという我々の目的だけは達成できるという仕組みになっている．ここの議論はかなり技術的だが, 解の L^2-ノルムを評価する方法のひとつを与えてくれる． □

この節の最後に単射性定理についての問題を述べる．この問題は相当難しく, 適切な仮定をおき定式化から練る必要がありそうだが, 重要な問題だと思われる．

問題 13. 単射性定理について量的な評価が得られるだろうか．例えば, 問題 8 のように, 単射性定理の結果から解けることがわかる $\overline{\partial}$-方程式の解について, “良い” 評価を得られるか．また, 単射性定理を使って部分多様体から切断を延長した際に, Ohsawa-Takegoshi の拡張定理のような L^2-評価を得られるだろうか.

4 単射性定理の相対版と Kollár-Ohsawa 型の消滅定理

この節では, 乗数イデアル層付き単射性定理と Kodaira の消滅定理の相対版を考える．まずは定理 11 の相対版を考えよう．

定理 14 ([Mat15c])**.** 写像 $\pi\colon \mathcal{X} \to Y$ を複素多様体 $\mathcal{X}$ から解析空間 Y への固有な全射ケーラー射とする．E を $\mathcal{X}$ 上の直線束で, h を曲率が semi-positive な E の特異計量とする．このとき, 任意の相対コンパクトな $K \Subset X$ に対して $\sup_K |s|_{h^m} < \infty$ を満たす $E^m (m \geq 0)$ の切断 $s(\neq 0)$ から誘導される写像

$$\Phi_s\colon R^q\pi_*(K_{\mathcal{X}} \otimes E \otimes \mathcal{I}(h)) \xrightarrow{\otimes s} R^q\pi_*(K_{\mathcal{X}} \otimes E^{m+1} \otimes \mathcal{I}(h^{m+1}))$$

は (well-defined で) 単射である．ここで $R^q\pi_*(\cdot)$ は q 次の高次順像を意味する．

E が semi-ample のときは Kollár の結果 ([Kol86a]) であり, E が semi-positive

のときは Takegoshi の結果 ([Tak95]) である．また, [Fn13] にはザリスキー開集合上 C^∞-級の特異計量に対しての結果がある．上記の定理はこれらの一般化を与えている．この定理の $m=0$ の場合を考えることで, $R^q\pi_*(K_{\mathcal{X}}\otimes E\otimes\mathcal{I}(h))$ に捩れがないことなどがわかる．定理 14 の証明は [Tak95] の議論と定理 11 の議論との組み合わせだが, $m=0$ の場合は可算個のザリスキー開集合 $\{Y_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ を扱う必要があるなど単なる組合せではうまくいかない点もあり, かなり複雑となる．

次に Kodaira の消滅定理の相対版を紹介しよう．

定理 15 ([Mat15b])**.** 写像 $\pi\colon \mathcal{X}\to Y$ を弱擬凸なケーラー多様体 $\mathcal{X}$ から解析空間 Y への固有な全射正則写像とする．$\mathcal{X}$ 上のベクトル束 E がある Y 上のケーラー形式 σ に対して (Nakano の意味で) $\sqrt{-1}\Theta_h(E)\geq\pi^*\sigma$ を満たす C^∞-級計量 h を許すとする．このとき,

$$\text{整数 } p>0 \text{ に対して, } H^p(Y,R^qf_*(K_{\mathcal{X}}\otimes E))=0$$

が成立する．特に, 同型 $H^0(Y,R^qf_*(K_{\mathcal{X}}\otimes E))\cong H^q(\mathcal{X},K_{\mathcal{X}}\otimes E)$ を得る．

f が恒等写像の場合に上の定理は Kodaira の消滅定理を導く．この種の定理は $q=0$ の場合に Ohsawa によって得られ, その後, Kollár によって代数的な状況 ($\mathcal{X}$, Y が射影的な場合) かつ E が ample 直線束の引き戻しの場合に証明された ([Ohs84], [Kol86b])．上の定理はこれらの一般化である．また, [Fn15, Conjecture 2.25] を肯定的に解決する．この定理は以下のコホモロジーの分解定理の証明と $\overline{\partial}$-方程式に対する L^2-理論から従う．このコホモロジーの分解定理は, [Fs15] で導来圏内での分解定理に一般化された．[Kol86b] の分解定理は完全に semi-positive なベクトル束へ一般化されたこととなる．

定理 16 ([Mat15b])**.** 写像 $\pi\colon \mathcal{X}\to Y$ をケーラー多様体 $\mathcal{X}$ から解析空間 Y への固有な全射正則写像とする．$\mathcal{X}$ 上のベクトル束 E が (Nakano の意味で) 曲率が semi-positive な C^∞-級計量を許すとする．このとき, 任意の $p,q\geq 0$ に対して, 以下の性質を満たす (自然な) 写像

$$\varphi_{p,q}\colon H^p(Y,R^qf_*(K_{\mathcal{X}}\otimes E))\to H^{p+q}(\mathcal{X},K_{\mathcal{X}}\otimes E)$$

が存在する.

- $\varphi_{p,q}$ は単射な準同型である.
- $p \neq p', p+q = p'+q'$ のとき, $\mathrm{Im}\,\varphi_{p,q} \cap \mathrm{Im}\,\varphi_{p',q'} = \{0\}$ が成立する.

特に, $\mathcal{X}$ がコンパクトケーラー多様体のとき,

$$H^\ell(\mathcal{X}, K_\mathcal{X} \otimes E) = \bigoplus_{p+q=\ell} \mathrm{Im}\,\varphi_{p,q}$$

が成立する.

当然, 上記の結果の乗数イデアル層付き版も考えることができるであろう.

問題 17. 乗数イデアル層を用いて, 定理 15, 定理 16 を擬正な直線束 F に一般化できるか.

定理 16 は [Tak95] で確立された正則凸多様体に対する調和積分論から従う. Takegoshi の調和積分論の乗数イデアル層付き版は [Fn13] や [Mat15c] で議論されているので, 上の問題は肯定的に解決できそうに思える. しかし, 証明はかなり複雑になるので良い応用がないと手が出しにくいかもしれない.

5 おわりに

著者が単射性定理の研究を始めた元々の動機は, LC 対に対する単射射定理の複素幾何的な状況への一般化 ([Fn13, Problem 1.8]) であった. 乗数イデアル層は非 KLT 的な情報を抽出するイデアルであり, それは解析的には正則関数の L^2-可積分性で扱える. その一方で, 非 LC 的な情報を抽出するイデアル ([FST11] を参照) は解析的にどう扱うべきかわからず, この問題は未解決である. その代わりに, 乗数イデアル層を使った主張は次々と解決できたという訳である. 一般の特異計量を扱うため証明はかなり技術的だが, 調和形式の漸近的な挙動を調べたり, $\overline{\partial}$-方程式の解の L^2-ノルムを評価したりなどのここで確立された議論は, 他の局面でも有効に働くのではないかと期待している. また, 応用上は最小特異計量や極限で得られる特異計量

を扱うことが多い．これらの計量の特異性を調べることは困難なので, 一般の特異計量に対して定理を定式化しておく価値はあると思われる．この報告集に近い話題については [Fn15], [Mat15] などに纏まっている．この報告集では述べなかったが, 双有理幾何に自然に現れる切断の拡張問題への応用が [GM13] で研究されている．

謝辞

城崎代数幾何学シンポジウムでの講演の機会を与えて下さった世話人の石井亮先生, 權業善範先生, 高橋宣能先生に感謝致します．コメントをくださいました藤野修先生に感謝致します．著者は JSPS から科学研究費補助金 若手研究 (B) ♯25800051 を受けています．

参考文献

[BCHM10] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon, J. McKernan. *Existence of minimal models for varieties of log general type.* J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), 405–468.

[Cao14] J. Cao. *Numerical dimension and a Kawamata-Viehweg-Nadel-type vanishing theorem on compact Kähler manifolds.* Compositio Math. **150** (2014), no. 11, 1869–1902.

[Dem82] J.-P. Demailly. *Estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète.* Ann. Sci. École Norm. Sup(4). **15** (1982), no. 3, 457–511.

[DEL00] J.-P. Demailly, L. Ein, R. Lazarsfeld. *A subadditivity property of multiplier ideals.* Michigan Math. J. **48** (2000), 137–156.

[DPS01] J.-P. Demailly, T. Peternell, M. Schneider. *Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds.* Internat. J. Math. **6** (2001), no. 6, 689–741.

[DP03] J.-P. Demailly, T. Peternell. *A Kawamata-Viehweg vanishing theorem on compact Kähler manifolds.* J. Differential Geom. **63** (2003), no. 2, 231–277.

[Eno90] I. Enoki. *Kawamata-Viehweg vanishing theorem for compact Kähler manifolds.* Einstein metrics and Yang-Mills connections (Sanda, 1990), 59–68.

[EV92] H. Esnault, E. Viehweg. *Lectures on vanishing theorems.* DMV Seminar, **20**. Birkhäuser Verlag, Basel, (1992).

[Fn08] O. Fujino. *Kodaira vanishing theorem for log canonical varieties.* Hodge 理論, 退化, 特異点の代数幾何とトポロジー研究集会（第 4 回）報告集, (2008), on the web page of the author.

[Fn09] O. Fujino. *On injectivity, vanishing and torsion-free theorems for algebraic varieties.* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **85** (2009), no. 8, 95–100.

[Fn12] O. Fujino. *A transcendental approach to Kollár's injectivity theorem.* Osaka J. Math. **49** (2012), no. 3, 833–852.

[Fn13] O. Fujino. *A transcendental approach to Kollár's injectivity theorem II.* J. Reine Angew. Math. **681** (2013), 149–174.

[Fn15] O. Fujino. *On semipositivity, injectivity, and vanishing theorems.* Preprint, a survey for Zucker 65, arXiv:1503.06503v3.

[FST11] O. Fujino, K. Schwede, S. Takagi. *Supplements to non-lc ideal sheaves.* Higher dimensional algebraic geometry, 1–46, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **24**, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, (2011).

[Fs15] T. Fujisawa. *A remark on the decomposition theorem for direct images of canonical sheaves tensorized with semipositive vector bundles.* Preprint, arXiv:1512.03887v1.

[GM13] Y. Gongyo, S. Matsumura. *Versions of injectivity and extension theorems.* Preprint, arXiv:1406.6132v2.

[GZ15] Q. Guan, X. Zhou. *Strong openness conjecture for plurisubharmonic functions.* to appear in Invent. Math. (2015).

[Hie14] P. H. Hiê̱p. *The weighted log canonical threshold.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris **352** (2014), no. 4, 283–288.

[Kaw82] Y. Kawamata. *A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing* *theorem.* Math. Ann. **261** (1982), no. 1, 43–46.

[Kaw85] Y. Kawamata. *Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties.* Invent. Math. **79** (1985), no. 3, 567–588.

[Kol86a] J. Kollár. *Higher direct images of dualizing sheaves. I.* Ann. of Math. (2) **123** (1986), no. 1, 11–42.

[Kol86b] J. Kollár. *Higher direct images of dualizing sheaves. II.* Ann. of Math. (2) **124** (1986), no. 1, 171–202.

[KM98] J. Kollár, S. Mori. *Birational geometry of algebraic varieties.* Cambridge Tracts in Mathematics, **134**. Cambridge University Press, Cambridge, (1998).

[Laz04] R. Lazarsfeld. *Positivity in Algebraic Geometry I-II.* A Series of Modern Surveys in Mathematics, **48, 49** Springer Verlag, Berlin, (2004).

[Lem14] L. Lempert. *Modules of square integrable holomorphic germs.* Preprint, arXiv:1404.0407v2.

[Mat13] S. Matsumura. *An injectivity theorem with multiplier ideal sheaves of singular metrics with transcendental singularities.* Preprint, arXiv:1308.2033v2.

[Mat14] S. Matsumura. *A Nadel vanishing theorem via injectivity theorems.* Math. Ann. **359** (2014), no. 3–4, 785–802.

[Mat15a] S. Matsumura. *A Nadel vanishing theorem for metrics with minimal singularities on big line bundles.* Adv. Math. **280** (2015), 188–207.

[Mat15b] S. Matsumura. *A vanishing theorem of Kollár-Ohsawa type on compact Kähler manifolds.* Preprint, arXiv:1511.04222v1.

[Mat15c] S. Matsumura. *An injectivity theorem with multiplier ideal sheaves for higher direct images under Kähler morphisms.* Preprint, on the web page of the author.

[Mat15] S. Matsumura. *Injectivity theorems with multiplier ideal sheaves and their applications.* Complex Analysis and Geometry, the Proceeding of the 10-th Korean Conference on Several Complex Variables, **144** of the series

Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 241–255

[Nad89] A. M. Nadel. *Multiplier ideal sheaves and existence of Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **86** (1989), no. 19, 7299–7300.

[Nad90] A. M. Nadel. *Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature.* Ann. of Math. (2) **132** (1990), no. 3, 549–596.

[Nak85] N. Nakayama. *The lower semicontinuity of the plurigenera of complex varieties.* Algebraic geometry, Sendai, (1985), 551–590, Adv. Stud. Pure Math., **10**, North-Holland, Amsterdam, (1987).

[Ohs84] T. Ohsawa. *Vanishing theorems on complete Kähler manifolds.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), no. 1, 21–38.

[Ohs04] T. Ohsawa. *On a curvature condition that implies a cohomology injectivity theorem of Kollár-Skoda type.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), no. 3, 565–577.

[Sko78] H. Skoda. *Morphismes surjectifs de fibrés vectoriels semi-positifs.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **11** (1978), no. 4, 577–611.

[Tak95] K. Takegoshi. *Higher direct images of canonical sheaves tensorized with semi-positive vector bundles by proper Kähler morphisms.* Math. Ann. **303** (1995), no. 3, 389–416.

[Tan71] S. G. Tankeev. *On n-dimensional canonically polarized varieties and varieties of fundamental type.* Math. USSR-Izv. **5** (1971), no. 1, 29–43.

[Vie82] E. Viehweg. *Vanishing theorems.* J. Reine Angew. Math. **335** (1982), 1–8.