On an algebro-geometric realization of the cohomology ring of conical symplectic resolutions

疋田辰之 (京都大学)

Abstract

A 型 Springer fiber のコホモロジー環の記述に関する DeConcini-Procesi, Tanisaki の結果を conical symplectic resolution のコホモロジー環の記述に一般化する予想を定式化する．予想の定式化には Braden-Licata-Proudfoot-Webster により提唱された symplectic duality と呼ばれる双対性を用いる．

1 Introduction

半単純 Lie 代数の表現論は古くからよく研究されてきたが, 最近ではこれを conical symplectic resolution と呼ばれるものの量子化の表現論に一般化しようとする研究が盛んに行われている．例えば Lie 代数の Langlands dual を取るという操作の conical symplectic resolution への一般化のようなものとして, symplectic dual と呼ばれる別の conical symplectic resolution が存在すると期待されている．本稿では conical symplectic resolution のコホモロジー環を symplectic dual を用いて記述する予想について述べる．この予想の原型となる結果として, A 型 Springer fiber と呼ばれる代数多様体のコホモロジー環の記述に関する DeConcini-Procesi と Tanisaki による結果があるので, まずこの結果について簡単に説明する．

1.1 Springer fibers of type A

少し記号を準備する．§1 では $G = \mathrm{SL}_n$ とする．ここで G は $\mathbb{C}$ 上の代数群とみなす．$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数, $B \subset G$ を上三角行列全体からなる Borel 部分群, $\mathfrak{b}$ をその Lie 代数, $T \subset B$ を対角行列全体からなる Cartan 部分群, $\mathfrak{t}$ をその Lie 代数とする．$\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}$ を冪零行列全体からなる閉部分代数多様体 (冪零錐) とする．$e \in \mathcal{N}$ に対して, e に付随する Springer fiber $\mathcal{B}_e$ を

$$\mathcal{B}_e = \{gB \in G/B \mid \mathrm{Ad}(g)^{-1}e \in \mathfrak{b}\}$$

で定義する．これは旗多様体 G/B の閉部分代数多様体であり, 容易にわかるように $\mathcal{B}_e$ は自然な同型を除いて e の共役類のみに依存する．自明な場合を除いて $\mathcal{B}_e$ は smooth でなく, 既約でもない．

Springer fiber のような代数多様体を考える動機としては表現論との様々なレベルでの関係がある．例えばそのうち最も基本的なものとしては次の Springer 対応がある．

Theorem 1 (Springer)**.** $\mathrm{H}^*(\mathcal{B}_e, \mathbb{C})$ には自然に n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ が作用し, e の Jordan block の type が $\lambda \vdash n$ のとき, $\mathfrak{S}_n$ の表現として $\mathrm{H}^{2\dim(\mathcal{B}_e)}(\mathcal{B}_e, \mathbb{C}) \simeq L_\lambda$ となる．ここで L_λ は λ に対応する $\mathfrak{S}_n$ の既約表現である．

よく知られているように$\mathfrak{S}_n$の既約表現はnの分割と1対1に対応している．一方で冪零行列の共役類もJordan標準形の理論によりnの分割と1対1に対応している．Springer対応は冪零行列の共役類と$\mathfrak{S}_n$の既約表現の間の対応をnの分割を経由せずに与えていると言える．

Gが一般の半単純な$\mathbb{C}$上の代数群の場合にも同様にSpringer fiberは定義でき，そのコホモロジーにはWeyl群Wが作用する．Wの既約表現の分類も同様にできるが，A型の場合と比べて少し複雑になるため詳細は省略する．

Example 2. eがregularのとき，すなわちJordan typeが(n)のとき，$\mathcal{B}_e = \mathrm{pt}$となり，$\mathrm{H}^0(\mathcal{B}_e, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{triv} = L_{(n)}$.

Example 3. $e = 0$のとき，Jordan typeは(1^n)で$\mathcal{B}_e = G/B$は旗多様体全体になる．旗多様体のコホモロジー環は余不変式環$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/\left(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_+^{\mathfrak{S}_n}\right)$と次数付き環として同型であり，余不変式環には$\mathfrak{S}_n$が自然に作用する．最高次のコホモロジーは差積$\prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)$で張られる1次元部分空間であり，$\mathrm{H}^{2\dim(G/B)}(G/B, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{sgn} = L_{(1^n)}$となる．

Example 4. eがsubregularのとき，すなわち$\lambda = (n-1, 1)$のとき，$\mathcal{B}_e$は$n-1$個の$\mathbb{P}^1$のchainとなる．このとき$\mathrm{H}^2(\mathcal{B}_e, \mathbb{C})$は$n-1$次元で対称群の表現としては$\mathfrak{t} \simeq L_{(n-1,1)}$と同型，また$\mathrm{H}^0(\mathcal{B}_e, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{triv}$となる．ちなみに$\mathcal{B}_e$は$A_{n-1}$型特異点の最小特異点解消の例外集合と一致しており，Gを他の単純代数群に取り替えればADE型特異点の最小特異点解消の例外集合が出てくる．

1.2 Cohomology ring of Springer fibers of type A

一般にSpringer fiberの奇数次のコホモロジーは消えることが知られている(DeConcini-Lusztig-Procesi [9])．よってそのコホモロジー環は可換環になる．A型Springer fiberの場合は自然な準同型写像$\mathrm{H}^*(G/B, \mathbb{C}) \to \mathrm{H}^*(\mathcal{B}_e, \mathbb{C})$が全射となり，この可換環は余不変式環の商として具体的に記述することができる．

$\lambda \vdash n$に対応する冪零軌道を$\mathcal{O}_\lambda$で表し，$\overline{\mathcal{O}_\lambda}$をその閉包とする．$\lambda^T$で$\lambda$の転置を表すことにする．

Theorem 5 (DeConcini-Procesi [10], Tanisaki [22])**.** $e \in \mathcal{O}_\lambda$とする．このとき次数付き代数として

$$\mathrm{H}^*(\mathcal{B}_e, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{t} \cap \overline{\mathcal{O}_{\lambda^T}}].$$

ここで$\mathfrak{t} \cap \overline{\mathcal{O}_{\lambda^T}}$は$\mathfrak{g}$でのスキーム論的共通部分であり，その座標環の次数は$\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathfrak{g}$, $s \cdot X = s^{-2}X$, から誘導される$\mathfrak{t} \cap \overline{\mathcal{O}_{\lambda^T}}$への$\mathbb{C}^*$により定まる．

$\mathbb{C}[\mathfrak{t} \cap \overline{\mathcal{O}_{\lambda^T}}]$には自然に$\mathfrak{S}_n$が作用し，この同型は$\mathrm{H}^*(\mathcal{B}_\lambda, \mathbb{C})$への$\mathfrak{S}_n$作用とcompatibleになる．A型の場合，冪零軌道の閉包の定義方程式としては例えば[22]で予想されWeyman ([24])によって証明されたものが知られている．それを用いれば定理の右辺をより具体的に表示することもできる．

Example 6. $e = 0$のとき，$\lambda = (1^n)$であり$\lambda^T = (n)$，よって$\overline{\mathcal{O}_{\lambda^T}} = \mathcal{N}$である．$X = (x_{ij})_{i,j} \in \mathfrak{g}$としたとき，$\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}$の定義方程式は$\det(tI - X) = t^n$によって与えられる．これを対角行列に制限すると$(t - x_{11})(t - x_{22}) \cdots (t - x_{nn}) = t^n$となり，$\mathfrak{t} \cap \mathcal{N} \subset \mathfrak{t}$の定義方程式は$x_{ii}$たちの基本対称式で与えられる．よって$\mathbb{C}[\mathfrak{t} \cap \mathcal{N}] \simeq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/\left(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_+^{\mathfrak{S}_n}\right) \simeq \mathrm{H}^*(G/B, \mathbb{C})$.

Remark 7. 他の型の Springer fiber への一般化に関しては部分的な結果として例えば [7] が知られていたが, 一般には次数付き環としての同型という形での定式化にはなっていない.

一般に Springer fiber は Slodowy variety と呼ばれる conical symplectic resolution とホモトピー同値であることが知られており, 特にそのコホモロジー環は同型である. 本稿では上の DeConcini-Procesi-Tanisaki の結果をより一般の conical symplectic resolution に拡張することを試みる.

2 Conical symplectic resolutions

ここでは conical symplectic resolution の定義や性質, 具体例についてまとめる.

2.1 Definition

$\mathfrak{M}$ を smooth algebraic symplectic variety, ω をその上の symplectic form とする.

Definition 8 (conical symplectic resolution)**.** $\mathfrak{M}$ とそこへの $\mathbb{S} = \mathbb{C}^*$ 作用の組 $(\mathfrak{M}, \mathbb{S})$ が conical symplectic resolution であるとは,

1. $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して $s^*\omega = s^\ell \omega$, $s \in \mathbb{S}$,
2. $\pi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_0 := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\mathfrak{M}]$ は projective birational,
3. $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_0 = \mathbb{C}$, $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_{<0} = 0$,

が成り立つことを言う. ここで $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_i$ は $\mathbb{S}$-weight が i の部分を表し, $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_{<0} = \oplus_{i<0} \mathbb{C}[\mathfrak{M}]_i$ である.

$\mathfrak{M}_0$ は normal であり, 唯一の $\mathbb{S}$ 固定点 o を持つ. 基本的な conical symplectic resolution の性質としては例えば次のようなものがある.

Proposition 9. $(\mathfrak{M}, \mathbb{S})$ を conical symplectic resolution とする. このとき次が成り立つ.

1. $R\pi_* \mathcal{O}_{\mathfrak{M}} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{M}_0}$, つまり $\mathfrak{M}_0$ は有理特異点を持つ.
2. $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{L} := \pi^{-1}(o)$ はホモトピー同値, 特に $\mathrm{H}^*(\mathfrak{M}, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{H}^*(\mathfrak{L}, \mathbb{C})$.
3. $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}$ は Lagrangian subvariety.

例えば $\mathfrak{M}$ が次に述べる Slodowy variety の場合を考えれば, $\mathfrak{L}$ は Springer fiber と一致する.

2.2 Springer resolutions and Slodowy varieties

基本的な conical symplectic resolution の例として, Springer resolution と呼ばれるものがある. G を $\mathbb{C}$ 上の半単純代数群, B をその Borel 部分群, U を B の冪単根基, $T \subset B$ を Cartan 部分群, $\mathcal{N}_G \subset \mathfrak{g} := \operatorname{Lie}(G)$ を冪零錐とする.

$$\widetilde{\mathcal{N}}_G := \{(gB, X) \in G/B \times \mathfrak{g} \mid \operatorname{Ad}(g)^{-1} X \in \operatorname{Lie}(U)\}$$

を Springer resolution と呼ぶ. $\mathfrak{g}$ 上の G 不変で非退化な内積を固定し, $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ を同一視すると $\widetilde{\mathcal{N}}_G$ は $T^*(G/B)$ と同型になり, 従って smooth であり, かつ symplectic form を持つ. さらに第 2 成分への射影 $\pi : \widetilde{\mathcal{N}}_G \to \mathcal{N}_G$ は projective かつ birational である. $\widetilde{\mathcal{N}}_G$ への $\mathbb{S}$ 作用は $s \cdot (gB, X) = (gB, s^{-2}X)$ により与える.

Proposition 10. $\widetilde{\mathcal{N}}_G$ は conical symplectic resolution で, その affinization は $\mathcal{N}_G$.

より一般に $B \subset P \subset G$ を放物型部分群としたとき, $T^*(G/P)$ は conical symplectic resolution になる. ちなみに M を smooth algebraic variety としたとき, T^*M が conical symplectic resolution になるならば, ある G と P について $M \simeq G/P$ となるだろうという予想がある (Demailly, Campana, Peternell).

また, Springer resolution を冪零軌道の slice に制限することで別の conical symplectic resolution が得られる. $e \in \mathcal{N}_G$ を冪零元, (e, h, f) を e を含む $\mathfrak{sl}_2$-triple とする. $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(f)$ を $\mathfrak{g}$ の中での f の centralizer とする. このとき $S_e := (e + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(f)) \cap \mathcal{N}_G$ を Slodowy slice と呼び, そこへの Springer resolution の制限を $\pi : \widetilde{S}_e \to S_e$ と書く. $\widetilde{S}_e$ を Slodowy variety と呼ぶ. $\widetilde{S}_e$ への $\mathbb{S}$ 作用は $s \cdot (gB, X) = (s^h gB, s^{-2}\operatorname{Ad}(s^h)X)$ により定める. この作用は $e \in S_e$ が S_e の唯一の $\mathbb{S}$ 固定点になるように定めている.

Proposition 11. $\widetilde{S}_e$ は conical symplectic resolution で, その affinization は S_e.

2.3 Properties of conical symplectic resolutions

より非自明な conical symplectic resolution に関する一般的な性質として, 次の Kaledin による結果が知られている.

Theorem 12 (Kaledin [13])**.** 1. 有限個の strata による stratification $\mathfrak{M}_0 = \sqcup_\alpha \mathfrak{M}_\alpha$ であって各 $\mathfrak{M}_\alpha$ が smooth symplectic になるものが存在する.

2. 任意の $p \in \mathfrak{M}_\alpha$ に対して formal symplectic variety $\hat{Y}_p$ が存在して, $\mathfrak{M}_0$ の p での形式近傍は $\mathfrak{M}_\alpha$ の p での形式近傍と $\hat{Y}_p$ の直積に同型となる.

3. π は semi-small, つまり $\operatorname{codim}_{\mathfrak{M}_0}\{x \in \mathfrak{M}_0 \mid \dim \pi^{-1}(x) \geq d\} \geq 2d$ が任意の $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して成立する.

4. $\mathrm{H}^{\mathrm{odd}}(\mathfrak{M}, \mathbb{C}) = 0$.

上に現れる $\mathfrak{M}_\alpha$ を $\mathfrak{M}_0$ の symplectic leaf と呼ぶ. 例えば $\mathfrak{M} = \widetilde{\mathcal{N}}_G$ の場合, symplectic leaf は冪零軌道になる. またこのとき $\hat{Y}_p$ は Slodowy slice の形式近傍で与えられる. 奇数次のコホモロジーが消えるという主張は, $\mathfrak{M} = \widetilde{S}_e$ の場合を考えれば先述の Springer fiber に対する DeConcini-Lusztig-Procesi の結果を再現する. また π が semi-small であることは $R\pi_*\underline{\mathbb{C}}_{\mathfrak{M}}[\dim \mathfrak{M}]$ が perverse sheaf になることと言い換えることもでき, 表現論的な応用を考える上で重要である (詳しくは [8] を参照).

2.4 Quantization of conical symplectic resolutions

ω により $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$ は Poisson 代数の構造を持つ. $\mathfrak{M}_0$ の smooth locus 上にある symplectic form を用いると, smooth locus 上の Poisson 構造が定まるが, $\mathfrak{M}_0$ が normal であることからこれは $\mathfrak{M}_0$ 全体に延びる. この Poisson 代数の量子化として, 様々な表現論的に興味のある代数が実現される.

Definition 13 (quantization)**.** $(\mathfrak{M}, \omega)$ の量子化とは

1. $\mathcal{Q} : \mathfrak{M}$ 上の結合的な平坦 $\mathbb{C}[\![\hbar]\!]$-代数の (Zariski 位相に関する) 層であって $\hbar$-進位相に関して完備なもの

2. $\mathcal{Q}/\hbar\mathcal{Q} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$：代数の同型

の組であって $\mathcal{Q}/\hbar\mathcal{Q}$ が可換になることから誘導される Poisson 代数の構造が同型 $\mathcal{Q}/\hbar\mathcal{Q} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$ と compatible になるようなものを言う．

$Q(\mathfrak{M},\omega)$ で $(\mathfrak{M},\omega)$ の量子化の同型類の集合を表すことにする．このとき次の結果が知られている．

Theorem 14 (Bezrukavnikov-Kaledin [2])**.** 自然な全単射 (noncommutative period map と呼ばれる)
$$\mathrm{Per} : Q(\mathfrak{M},\omega) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(\mathfrak{M},\mathbb{C})[\![\hbar]\!]$$
が存在する．

$\mathrm{Per}(\mathcal{Q}) = 0$ となる量子化を canonical な量子化と呼ぶ．また, $\mathbb{S}$ 作用を用いると $\mathbb{S}$ 同変な量子化の概念を定義することができる．ただし $\hbar$ の $\mathbb{S}$-weight は ℓ とする．$Q(\mathfrak{M},\omega)^{\mathbb{S}}$ で $\mathbb{S}$ 同変な量子化の同型類の集合を表すことにする．このとき次が知られている．

Proposition 15 (Losev [17])**.** Per は次の全単射を誘導する
$$Q(\mathfrak{M},\omega)^{\mathbb{S}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(\mathfrak{M},\mathbb{C})$$

$\mathcal{Q} \in Q(\mathfrak{M},\omega)^{\mathbb{S}}$ とする．$\mathcal{D} := \mathcal{Q}[\hbar^{-1/\ell}]$ とおき, $\mathcal{D}(m) \subset \mathcal{D}$ を $\mathcal{D}(0) := \mathcal{Q}[\hbar^{1/\ell}]$, $\mathcal{D}(m) := \hbar^{-m/\ell}\mathcal{D}(0)$ により定める．$A := \Gamma(\mathfrak{M},\mathcal{D})^{\mathbb{S}}$ とするとこれは filtration $A(0) \subset A(1) \subset \ldots \subset A$ $(A(m) := \Gamma(\mathfrak{M},\mathcal{D}(m))^{\mathbb{S}})$ を持ち, $\mathrm{gr}\, A$ は $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]$ と次数付き Poisson 代数として同型になる．つまり A は $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]$ の量子化を与える． 例えば $\mathfrak{M} = \widetilde{\mathcal{N}}_G$ のとき $\mathrm{H}^2(\widetilde{\mathcal{N}}_G,\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{t}^*$ であり, $\mathrm{Per}(\mathcal{Q}) = \lambda \in \mathfrak{t}^*$ ならば $A \simeq U(\mathfrak{g})/(\mathrm{Ker}\,\chi_\lambda)$ となる．ここで $U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環であり, $Z(\mathfrak{g})$ をその中心とすると $\chi_\lambda : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ は highest weight $\lambda - \rho$ の Verma 加群の中心指標である (2ρ は全ての正ルートの和)．したがってこの場合 conical symplectic resolution の量子化の表現論を考えることは $\mathfrak{g}$ の表現論を考えることに相当する．

2.5 Other examples

他にも

- S3-variety : Slodowy variety の放物版 (特に $\widetilde{S}_e$ や $T^*(G/P)$ を含む)
- hypertoric variety : $\mathbb{C}^{2n}$ のトーラスによる Hamiltonian reduction であって smooth なもの
- $\mathbb{C}^2$ 上の n 点の Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$, あるいはより一般に $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の crepant resolution 上の n 点の Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}^n(\widetilde{\mathbb{C}^2/\Gamma})$ ($\Gamma \subset \mathrm{SL}_2$：有限部分群)
- $\mathbb{P}^2$ 上の framed torsion-free sheaf の moduli 空間
- affine Grassmannnian $G(\!(\epsilon)\!)/G[\![\epsilon]\!]$ の $G[\![\epsilon]\!]$-軌道の閉包の中での別の $G[\![\epsilon]\!]$-軌道の transversal slice の resolution (存在すれば)
- quiver variety

などが conical symplectic resolution の例として知られている．

2.6 Poisson deformation

既に述べたように $\mathfrak{M}$ の非可換方向への変形のパラメータは $\mathfrak{t}^\vee := \mathrm{H}^2(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ で与えられていたが, 同様に可換な方向への変形のパラメータも $\mathfrak{t}^\vee$ で与えられることが知られている. ここでの変形は Poisson 構造のデータ込みで考える.

$(X, \{,\})$ を Poisson スキームとする. $\mathrm{Art}_{\mathbb{C}}$ を局所 Artin$\mathbb{C}$-代数 $(A, \mathfrak{m}_A)$ であって $A/\mathfrak{m}_A \simeq \mathbb{C}$ となるもののなす圏とする. $(A, \mathfrak{m}_A) \in \mathrm{Art}_{\mathbb{C}}$ に対して, $(X, \{,\})$ の $S = \mathrm{Spec}(A)$ 上無限小 Poisson 変形とは, 平坦射 $\mathcal{X} \to S$ と S 上 relative な Poisson 構造 $\{,\} : \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \times \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ の組であって $\mathfrak{m}_A$ に対応する点に制限したとき $(X, \{,\})$ と一致するようなもののことを言う. PD_X で $(A, \mathfrak{m}_A)$ に対して S 上の Poisson 変形全体の集合を対応させる $\mathrm{Art}_{\mathbb{C}}$ から集合の圏への関手を表す. このとき, $\mathfrak{M}$ や $\mathfrak{M}_0$ の Poisson 変形に関して例えば次のような結果が知られている.

Theorem 16 (Namikawa [19], [20], [21])**.** 以下の性質を満たす可換図式が存在する.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{M}_0 \arrow[d, "g"] \\ \mathfrak{t}^\vee \arrow[r, "h"] & \mathfrak{t}^\vee/\mathrm{W} \end{tikzcd}$$

1. W は有限群 (Namikawa Weyl 群と呼ばれる) で, W は $\mathfrak{t}^\vee$ に作用する.

2. $\mathcal{M} \to \mathfrak{t}^\vee$, $\mathcal{M}_0 \to \mathfrak{t}^\vee/\mathrm{W}$ の原点での formal completion は $\mathrm{PD}_{\mathfrak{M}}$, $\mathrm{PD}_{\mathfrak{M}_0}$ を pro-represent する. 特に $f^{-1}(0) \simeq \mathfrak{M}$ かつ $g^{-1}(h(0)) \simeq \mathfrak{M}_0$.

3. $\mathfrak{t}^\vee$ の有限個の余次元 1 の線型部分空間 $\mathcal{H}^\vee = \{H\}$ が存在して, $t \in \mathfrak{t}^\vee$ に対し, $f^{-1}(t) \not\simeq g^{-1}(h(t))$ であることと, $t \in \cup_{H \in \mathcal{H}^\vee} H$ となることは同値.

2.7 Grothendieck simultaneous resolutions

$\mathfrak{M} = \widetilde{\mathcal{N}}_G$ の場合, 上の定理に現れる可換図式は Grothendieck simultaneous resolution としてよく知られたものになる. このとき $\mathfrak{t}^\vee \simeq \mathfrak{t}^*$ となり, 内積を一つ固定すれば $\mathfrak{t}^\vee \simeq \mathfrak{t}$ とも思える. また Namikawa Weyl 群は通常の Weyl 群と一致する. $\mathcal{M}_0 \simeq \mathfrak{g}$ であり, 射 $\mathcal{M}_0 \to \mathfrak{t}^\vee/\mathrm{W}$ は自然な射 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\!\!/G \simeq \mathfrak{t}/\mathrm{W}$ により与えられる. $\mathcal{M}$ は

$$\widetilde{\mathfrak{g}} := \{(gB, X) \in G/B \times \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(g)^{-1}X \in \mathfrak{b}\}$$

で与えられ, 射 $\mathcal{M} \to \mathfrak{t}^\vee$ は $\mathrm{Ad}(g)^{-1}X$ の $\mathfrak{b}/[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \simeq \mathfrak{t}$ での像を対応させることで得られる. $\mathcal{M} \to \mathcal{M}_0$ は第 2 成分への射影とする. このとき, $\mathcal{H}^\vee$ は coroot が定める hyperplane と一致する (ここでは $\mathfrak{t}^\vee = \mathfrak{t}^*$ とみなしている). したがって一般の conical symplectic resolution に対する $\mathcal{H}^\vee$ は coroot hyperplane の類似であると言える.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathfrak{g}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{g} \arrow[d] \\ \mathfrak{t} \arrow[r] & \mathfrak{t}/\mathrm{W} \end{tikzcd}$$

また, $\widetilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ が small と呼ばれる性質を満たすことと generic には W-covering になっていることから先述の Springer fiber のコホモロジーへの W 作用が構成できる. 一般に conical symplectic resolution のコホモロジーには Namikawa Weyl 群が作用する.

3 Conjectures

3.1 Category $\mathcal{O}$

Braden-Licata-Proudfoot-Webster により提唱された symplectic duality では conical symplectic resolution に別の良い $\mathbb{T} := \mathbb{C}^*$ 作用が入る状況を考える．以下, conical symplectic resolution とそこへの $\mathbb{T}$ 作用の組 $(\mathfrak{M}, \mathbb{S}, \mathbb{T})$ に次の条件を仮定する．

1. $\mathbb{T}$ の $\mathfrak{M}$ への作用は Hamiltonian であり, $\mathbb{S}$ の作用と可換.
2. $\mathfrak{M}^{\mathbb{T}}$ は有限集合.
3. $\mathfrak{M}_0$ の minimal symplectic leaf は $\{o\}$.

$\mathcal{Q} \in Q(\mathfrak{M}, \omega)$ から § 2.4 で述べたように $\mathcal{D}$ や代数 A を構成すると, A には $\mathbb{T}$ が作用する．その weight への分解を $A = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ と書く．$\mathcal{O}_a$ を有限生成 A 加群であって $A^{\geq 0}$ が locally finite に作用するものからなる圏とする．また $\mathcal{O}_g$ を "good" な $\mathbb{S}$-同変 $\mathcal{D}$-加群であって support が $\mathfrak{M}^+ := \{p \in \mathfrak{M} \mid \lim_{\mathbb{T} \ni t \to 0} t \cdot p \text{ exists}\}$ に入るものからなる圏とする (詳細は [3] を参照).

例えば $\mathfrak{M} = \widetilde{\mathcal{N}}_G$ で量子化のパラメータが regular, つまり Weyl 群の作用に関する stabilizer が自明になるとき, $\mathcal{O}_a$ は BGG category $\mathcal{O}$ として $\mathfrak{g}$ の表現論において昔から研究されていた圏と圏同値になる．従って $\mathcal{O}_a$ は category $\mathcal{O}$ の conical symplectic resolution への一般化とみなせる．さらに $\mathfrak{g}$ の表現論で重要な結果である Beilinson-Bernstein, Brylinski-Kashiwara の局所化定理の類似として, 多くのパラメータで $\mathcal{O}_a \simeq \mathcal{O}_g$ が成り立つことが知られている ([4]). 局所化定理が成り立つとき, $\mathcal{O}$ でその category $\mathcal{O}$ を表すことにする．また 2 つの量子化のパラメータが $\mathrm{H}^*(\mathfrak{M}, \mathbb{Z})$ だけ異なるとき, 対応する $\mathcal{O}_g$ は圏同値になることも知られている ([3]).

3.2 Symplectic duality

$(\mathfrak{M}, \mathbb{S}, \mathbb{T})$ を上のとおりとする．G を $\mathbb{S}$ と可換な $\mathfrak{M}$ の Hamiltonian symplectomorphism のなす群とする．これは簡約代数群になる．$\mathrm{T} \subset \mathrm{G}$ を $\mathbb{T}$ を含む (唯一の) 極大トーラス (cf. [3]), $\mathbb{W}$ を G の Weyl 群とする．$\mathfrak{M}$ に対する coroot (正確にはそれが定める hyperplane) の概念は既に述べたが, $\mathfrak{M}$ に対する root の概念も, $\mathfrak{M}^{\mathbb{T}} = \mathfrak{M}^{\mathrm{T}} \subset \mathfrak{M}$ の normal bundle に現れる T-weight として定義することができる (例えば [18]). $\mathcal{H}$ を $\mathfrak{M}$ の root が定める $\mathfrak{t}$ の hyperplane の集合とする．

Conjecture 17 (Braden-Licata-Proudfoot-Webster [3])**.** 別の conical symplectic resolution と良い $\mathbb{C}^*$ 作用の組 $(\mathfrak{M}^!, \omega^!, \mathbb{S}^!, \mathbb{T}^!)$ (symplectic dual と呼ばれる) が存在して, $\mathfrak{M}^!$ に対応する記号には ! を付けることにすると

1. $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}^!$ は Koszul dual (cf. [1]). ここで量子化のパラメータは "integral" なものを取る (cf. [3]).
2. $\mathrm{W} \simeq \mathbb{W}^!$ かつ $\mathbb{W} \simeq \mathrm{W}^!$.
3. $\mathfrak{t}^\vee \simeq \mathfrak{t}^!$ かつ $\mathfrak{t} \simeq (\mathfrak{t}^\vee)^!$, つまり変形パラメータと同変パラメータが入れ替わる．
4. $\mathcal{H}^\vee = \mathcal{H}^!$ かつ $\mathcal{H} = (\mathcal{H}^\vee)^!$, つまり coroot hyperplane と root hyperplane が入れ替わる．
5. etc.

Remark 18. $(\mathfrak{M}^!, \omega^!, \mathbb{S}^!, \mathbb{T}^!)$ の symplectic dual は $(\mathfrak{M}, \omega, \mathbb{S}, \mathbb{T})$.

例としては以下の様なペアが symplectic dual であると考えられている.

- $\widetilde{\mathcal{N}}_G$ と $\widetilde{\mathcal{N}}_{G^\vee}$ は symplectic dual ($G^\vee$ は G の Langlands 双対).
- A 型 S3 variety は別の A 型 S3 variety と symplectic dual.
- hypertoric variety は別の (Gale dual な) hypertoric variety と symplectic dual.
- $\mathrm{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ ($\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ の閉部分多様体であって台の重心が原点になる locus) は $\mathrm{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ と symplectic dual.
- $\mathrm{Hilb}^n(\widetilde{\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})})$ は $\mathbb{P}^2$ 上の rank r, $c_2 = n$ の framed torsion free sheaf の moduli と symplectic dual.
- ADE 型 quiver variety (であって良い $\mathbb{C}^*$ 作用を持つもの) はある affine Grassmannian の slice (であって resolution を持つもの) と symplectic dual.

Remark 19. $\mathfrak{M}_0$ が 3 次元の $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論の Higgs branch と呼ばれるものと一致するとき, $\mathfrak{M}_0^!$ はそのゲージ理論の Coulomb branch (cf. [5]) と呼ばれるものになると期待されている.

3.3 Conjectures

本題に戻り, DeConcini-Procesi-Tanisaki の定理の conical symplectic resolution への一般化についての予想を述べる. まず記号の準備として, H を $\mathbb{C}$ 上定義されたトーラス, $X = \mathrm{Spec}(R)$ を $\mathbb{C}$ 上のアフィンスキームであって H が作用するものとしたとき, その固定点スキーム X^H を, R の中で H 作用に関する weight が 0 でない homogeneous な元全体で生成されるイデアルで定義される X の閉部分スキームと定義する. このとき予想は次のように定式化される.

Conjecture 20 ([12]). $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{M}^!$ が symplectic dual のとき, 次数付き代数として

$$\mathrm{H}^*(\mathfrak{M}, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[(\mathfrak{M}_0^!)^{\mathbb{T}^!}],$$
$$\mathrm{H}^*(\mathfrak{M}^!, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[(\mathfrak{M}_0)^{\mathbb{T}}].$$

ここで右辺の次数は $\mathbb{S}^!$, $\mathbb{S}$ 作用から定まるもの.

例えば $G = \mathrm{SL}_n$ とし, $e \in \mathcal{N}$ を Jordan type が λ で与えられる冪零元とする. 放物型部分群 $B \subset P \subset G$ を, その Levi 部分群の block の大きさが λ で与えられるように取る. このとき, $\widetilde{S}_e$ の symplectic dual は $T^*(G/P)$ であり, また $T^*(G/P)$ の affinization は $\overline{\mathcal{O}_{\lambda^T}}$ であることがわかる. そして $\overline{\mathcal{O}_{\lambda^T}}$ の T-固定点スキームはスキーム論的共通部分 $\mathfrak{t} \cap \overline{\mathcal{O}_{\lambda^T}}$ に他ならない. したがって $\mathfrak{M} = \widetilde{S}_e$ の場合, 予想の上半分は DeConcini-Procesi-Tanisaki の定理に帰着する. ちなみにこの場合に予想の下半分が成り立つという観察が, DeConcini-Procesi-Tanisaki の定理を他の conical symplectic resolution に一般化しようという試みの背景にある.

Theorem 21 ([12]). この予想は A 型 S3 variety, hypertoric variety, $\mathrm{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ の場合に正しい.

証明は各々の場合に知られているコホモロジー環の記述を用いて明示的に同型を作ることにより得られる．各々のコホモロジー環の記述は, A 型 S3 variety の場合は [6], hypertoric variety の場合は [11] や [15], $\mathrm{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ の場合は [16] や [23] で知られている．また, Kamnitzer-Tingley-Webster-Weekes-Yacobi はこの予想の上半分を $\mathfrak{M}$ が ADE 型 quiver variety の場合に証明している ([14]).

ところで $\mathrm{H}^*(\mathfrak{M},\mathbb{C})$ には Namikawa Weyl 群 W が自然に作用している．一方で $\mathbb{W}$ は $\mathbb{C}[(\mathfrak{M}_0)^{\mathbb{T}}]$ に自然に作用している．従って次のように予想することは自然であると思われる．

Conjecture 22. 予想の同型は $\mathrm{W} \simeq \mathbb{W}^!$, $\mathrm{W}^! \simeq \mathbb{W}$ 作用と compatible.

また, symplectic duality においては変形パラメータと同変パラメータが入れ替わることを考えると, 次のように予想できる．

Conjecture 23. Theorem 16 の記号の元で, 次数付き代数として

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{G}^!}(\mathfrak{M}^!,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[\mathcal{M}_0^{\mathbb{T}}],$$
$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{T}^!}(\mathfrak{M}^!,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[(\check{\mathfrak{t}} \times_{\check{\mathfrak{t}}/\mathrm{W}} \mathcal{M}_0)^{\mathbb{T}}].$$

上では symplectic form を保つ群作用に関する同変コホモロジーを考えたが, symplectic form を保っていない $\mathbb{S}$ 作用に関する同変コホモロジーに関しても次のように予想することができる．A を canonical な量子化から定まる $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]$ の量子化とする．A は filtration を持つので, その Rees 代数 $A_\hbar$ を考えることができる．ここで $\hbar$ は Rees 代数を取るときに付け加えられるパラメータである．$A_\hbar^k$ を $\mathbb{T}$-weight が k の部分とする．

Conjecture 24. 次数付き代数として

$$\mathrm{H}^*_{\mathbb{S}^!}(\mathfrak{M}^!,\mathbb{C}) \simeq A_\hbar^0/(\sum_{k>0} A_\hbar^{-k} A_\hbar^k).$$

ただし $\mathrm{H}^*_{\mathbb{S}^!}(\mathrm{pt}) \simeq \mathbb{C}[\hbar]$ とみなす．

References

[1] A. Beilinson, V. Ginzburg, W. Soergel, Koszul duality patterns in representation theory, J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), no. 2, 473–527

[2] R. Bezrukavnikov, D. Kaledin, Fedosov quantization in algebraic context, Mosc. Math. J. 4 (2004), no. 3, 559–592

[3] T. Braden, A. Licata, N. Proudfoot, B. Webster, Quantizations of conical symplectic resolutions II: category $\mathcal{O}$ and symplectic duality, arXiv:1407.0964

[4] T. Braden, N. Proudfoot, B. Webster, Quantizations of conical symplectic resolutions I: local and global structure, arXiv:1208.3863

[5] A. Braverman, M. Finkelberg, H. Nakajima, Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $\mathcal{N}$=4 gauge theories, II, in preparation

[6] J. Brundan, V. Ostrik, Cohomology of Spaltenstein varieties, Transform. Groups, 16 (2011), 619–648

[7] J. Carrell, Orbits of the Weyl group and a theorem of DeConcini and Procesi Compositio Math. 60 (1986), no. 1, 45–52

[8] N. Chriss, V. Ginzburg, Representation theory and complex geometry, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997

[9] C. DeConcini, G. Lusztig, C. Procesi, Homology of the zero-set of a nilpotent vector field on a flag manifold, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), no. 1, 15–34

[10] C. DeConcini, C. Procesi, Symmetric functions, conjugacy classes and the flag variety, Invent. Math., 64 (1981), 203–219

[11] T. Hausel, B. Sturmfels, Toric hyperKähler varieties, Doc. Math., 7 (2002), 495–534

[12] T. Hikita, An algebro-geometric realization of the cohomology ring of Hilbert scheme of points in the affine plane, arXiv:1501.02430

[13] D. Kaledin, Symplectic singularities from the Poisson point of view, J. Reine Angew. Math. 600 (2006), 135–156

[14] J. Kamnitzer, P. Tingley, B. Webster, A. Weekes, O. Yacobi, Highest weights for truncated shifted Yangians and product monomial crystals, arXiv:1511.09131

[15] H. Konno, Cohomology rings of toric hyperkähler manifolds, Internat. J. Math., 11 (2000), 1001–1026

[16] M. Lehn, C. Sorger, Symmetric groups and the cup product on the cohomology of Hilbert schemes, Duke Math. J., 110 (2001), 345–357

[17] I. Losev, Isomorphisms of quantizations via quantization of resolutions, Adv. Math. 231 (2012), no. 3-4, 1216–1270

[18] D. Maulik, A. Okounkov, Quantum Groups and Quantum Cohomology, arXiv:1211.1287

[19] Y. Namikawa, Poisson deformations of affine symplectic varieties, Duke Math. J. 156 (2011), no. 1, 51–85

[20] Y. Namikawa, Poisson deformations of affine symplectic varieties, II, Kyoto J. Math. 50 (2010), no. 4, 727–752

[21] Y. Namikawa, Poisson deformations and birational geometry, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 22 (2015), no. 1, 339–359

[22] T. Tanisaki, Defining ideals of the closures of the conjugacy classes and representations of the Weyl groups, Tôhoku Math. J. (2), 34 (1982), 575–585

[23] E. Vasserot, Sur l'anneau de cohomologie du schéma de Hilbert de $\mathbf{C}^2$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 332 (2001), 7–12

[24] J.Weyman, The equations of conjugacy classes of nilpotent matrices, Invent. Math., 98 (1989), 229–245