曲線上の直線束の次数と曲線束に付随した忠実トロピカル化

山木　壱彦（京都大学）

1. 背景と主結果

X は体上の滑らかな射影曲線であるとし，その種数は g であるとする．L は X 上の直線束であるとする．もし $\deg(L) \geq 2g+1$ ならば，零でない大域切断 $s_0, \ldots, s_N \in H^0(X, L)$ が存在して，それに付随する射

$$X \longrightarrow \mathbb{P}^N, \quad p \mapsto (s_0(p) : \cdots : s_N(p))$$

が X の射影空間への埋め込みを与えることは，古典的に知られている．本稿では，非アルキメデス的解析曲線（ベルコビッチ曲線）とそのトロピカル化写像に対して，この古典的定理の類似を考察する．なお，本稿の内容は，同志社大学の川口周氏との共同研究 [22] に基づく[1]．

類似を定式化するにあたって，主だった登場人物を簡単に紹介しておこう．$\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ とおく．N 次元トロピカル射影空間を，$\mathbb{TP}^N = (\mathbb{T}^{N+1} \setminus \{(\infty, \ldots, \infty)\})/\sim$ で定める．ただし，$(x_0, \ldots, x_N) \sim (y_0, \ldots, y_N)$ であるとは，$c \in \mathbb{R}$ が存在して任意の $i = 0, \ldots, N$ に対して $y_i = x_i + c$ が成立することを意味する．$\mathbb{TP}^N$ には自然な整構造が入っていることを付言しておく（§ 3.1 参照）．

以下では，K は代数閉体で非自明な非アルキメデス的絶対値 $|\cdot|_K$ が備わっていて，しかもその絶対値について完備であるものとする．X は K 上の滑らかな射影曲線であるとする．それに付随するベルコビッチの意味での解析空間（ベルコビッチ曲線）を X^{an} で表す（§ 2.1 参照）．また，Γ は X^{an} の勝手な骨格であるとする（§ 2.2 参照）．これらについては § 2 もう少し詳しく説明するが，差し当たり必要な情報として，$X(K)$ は X^{an} の稠密な部分集合であることと，Γ は $X^{\mathrm{an}} \setminus X(K)$ の閉部分集合でありかつ整構造が備わっていることを指摘しておく．

L は X 上の直線束であるとする．非自明な大域切断 $s_0, \ldots, s_N \in H^0(X, L)$ が与えられると，それに付随して写像

$$\varphi : X(K) \longrightarrow \mathbb{TP}^N, \quad p \mapsto (-\log|s_0(p)| : \cdots : -\log|s_N(p)|) \tag{1.1}$$

が定義される．この写像は自然に連続写像 $\varphi : X^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathbb{TP}^N$ に一意に延長する[2]．これを，L（とその大域切断の系 $s_0, \ldots, s_N$）に付随したトロピカル化写像と呼ぶ．そして，φ が Γ の**忠実トロピカル化**であるとは，制限写像 $\varphi|_\Gamma$ がその像への同相を与えかつ整構造を保つことを言う．適当な $s_0, \ldots, s_N$ に対し φ が Γ の忠実トロピカル化であるとき，L は Γ **の忠実トロピカル化を実現可能**であるという；詳しくは §3.2 を参照．

なお，後で説明するように Γ は一般には一次元の単体複体の構造を持っていて，その整構造というのは長さの概念と同等である．また，$\varphi(\Gamma)$ は $\mathbb{TP}^N$ の中の 1 次元の区分的線型な対象であり，$\mathbb{TP}^N$ の整構造から「格子計量」，つまり，原始ベクトルを単位としてで定まる

Date: January 3, 2017.

講演および本稿執筆の機会を与えていただいた世話人の方々に感謝申し上げます．

原題は “EFFECTIVE FAITHFUL TROPICALIZATIONS ASSOCIATED TO LINEAR SYSTEMS ON CURVES” である．本稿は日本語で書いたので，邦題を付けてみた．

[1]ただし，本稿の文責は山木壱彦にある．

[2]$X(K)$ は X^{an} で稠密なのでこの延長は一意的である．§ 3.1 参照．

計量が入る．上で述べた「像に同相かつ整構造を保つ」というのは，これら計量空間の間の計量同型を意味する．

さて，冒頭に提示した古典的定理の観点から忠実トロピカル化というものを見てみると，自然に次の問題意識が生じる．

問 1.1. 任意の非負整数 g に対し，整数 $t(g)$ で次の性質「K 上の種数 g の任意の射影曲線と，任意の骨格 $\Gamma \subset X^{\mathrm{an}}$ と X 上の任意の直線束 L に対して，$\deg(L) \geq t(g)$ ならば L は Γ の忠実トロピカル化を実現可能」を持つものは存在するか？さらに，もしそのような $t(g)$ が存在するなら，それを具体的な表示で与えることは可能か？

本稿の主結果は，この問に肯定的な解答を与える．

定理 1.2. X は K 上の種数 g の射影多様体であるとし，Γ は X^{an} の骨格であり L は X 上の直線束であるとする．整数

$$t(g) := \begin{cases} 1 & \textit{if } g = 0, \\ 3 & \textit{if } g = 1, \\ 3g-1 & \textit{if } g \geq 2. \end{cases}$$

を考える．このとき，$\deg(L) \geq t(g)$ ならば L は Γ の忠実トロピカル化を実現可能である．

直線束の大域切断を用いたトロピカル化写像による忠実トロピカル化の考察を行ったのは，我々の知る限り我々の論文 [22] が最初であるが，直線束を考えずに有理関数を使って作った忠実トロピカル化に関しては先行研究がある．Katz–Markwig–Markwig [19, 20]，Baker–Payne–Rabinoff [5]，Gubler–Rabinoff–Werner [16]，および Baker–Rabinoff [6] の諸結果によると，次のことが知られている：K 上の任意の滑らかな射影曲線 X と X^{an} の任意の骨格 Γ に対し，X の非零な有理関数 $f_1, \ldots, f_N$ が存在して

$$\psi : X^{\mathrm{an}} \setminus X(K) \to \mathbb{R}^N, \quad p = (p, |\cdot|) \mapsto (-\log|f_1(p)|, \ldots, -\log|f_N(p)|) \tag{1.2}$$

が Γ の忠実トロピカル化を与える，つまり，ψ が計量同型 $\Gamma \to \psi(\Gamma)$ を誘導する．

ここで現れる有理関数 $f_1, \ldots, f_N$ は，十分次数の大きな直線束の大域切断とみなせることに注意しておこう．正確には，自然数 d が存在して，X 上の次数が d 以上の任意の直線束 L に対し，$1, f_1, \ldots, f_N \in H^0(X, L)$ とみなすみなし方が存在する．このことに注意すると，上で参照した先行結果は次のことを言っていることになる：上のような任意の X と Γ に対し自然数 $d(X, \Gamma)$ が存在して，任意の直線束に L で $\deg(L) \geq d(X, \Gamma)$ なるものに対し，L は Γ の忠実トロピカル化を実現可能である．

定理 1.2 は，これより強いことを主張している．実際，非負整数 g を一旦固定すれば，直線束の次数についての一様かつ具体的計算可能な下からの評価が存在して，直線束 L の次数がその評価を満たせば，種数 g の任意の射影曲線 X と任意の骨格 Γ に対して，L はその忠実トロピカル化を実現可能であると主張している．

ところで，古典的な結果と我々の主定理を見比べてみたとき，「そもそも L が非常に豊富であったら主定理の結論が自動的に出てきたりはしないのか？」と思う人もいるかもしれない．もし，仮にこのようなことが成立するならば，問 1.1 や定理 1.2 はあまり面白いものとは言えない；$\deg(L) \geq 2g+1$ ならかならず主定理の結論が言えてしまうのだから．しかし，実際にはそのようなことにはなっていおらず，射影曲線 X とその上の非常に豊富な直線束 L で，L は X^{an} のどの骨格に対してもその忠実なトロピカル化を実現できないようなものが存在する（[22] 参照）．

定理 1.2 によって問 1.1 には一つの解答が与えられたわけだが，次に気になるのは問 1.1 の $t(g)$ のうち最良のものは何かという問題であろう．定理 1.2 で与えた $t(g)$ は，$g = 0, 1, 2$ の場合には実は最良の評価となっている．しかし，$g \geq 3$ では最良かどうかは不明である．最良の評価を求めるというのは，今後の興味深い課題であろう．

忠実なトロピカル化は，高い次元の多様体でも考えることができる．Gubler–Rabinoff–Werner [16] では，任意次元の滑らかな射影多様体 X とその骨格に対し，X の零でない有理関数 $f_1, \ldots, f_N$ が存在して (1.2) がその骨格の忠実なトロピカル化を与えることを示している．それを受けて，[21] では，次元が高い場合でも直線束の大域切断を用いた忠実トロピカル化を考察している．ただし，そこでは直線束のモデルの存在に強い条件を課しているため，その主結果を曲線の場合に適用しても問 1.1 に解答を与えることには貢献しない[3]．

記号と言葉遣い． 以下，K は代数閉体で非自明な非アルキメデス的絶対値 $|\cdot|_K$ が備わっていて，この絶対値に関して完備であるもととする．$R := \{a \in K \mid |a|_K \leq 1\}$ で K の整数環を表す．$\mathfrak{m}$ で R の極大イデアル，k で剰余体を表す．$v_K : K^\times \to \mathbb{R}$ を $v_K := -\log|\cdot|_K$ で定める．$\Lambda := \{v_K(a) \in \mathbb{R} \mid a \in K^\times\}$ とおき，K の値群と呼ぶ．

K 上の代数多様体とは，K 上の有限型の被約かつ既約なスキームを意味する．次元が 1 の K 上の多様体を，曲線と呼ぶ．K 上の代数多様体 X の函数体を $K(X)$ で表す．

X は K 上の代数多様体であるとする．X のモデルとは，R 上の平坦な有限型スキーム $\pi : \mathscr{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ でその生成ファイバーと X との間の同型が備わったものをいう．さらに π が固有であるとき，それを固有モデルと呼ぶ．モデル $\mathscr{X}$ の特殊ファイバーを $\mathscr{X}_s$ で表す[4]．

L は X 上の直線束であるとする．X のモデル $\mathscr{X}$ で同型 $\mathscr{X}|_X \cong L$ が備わったものを，L のモデルと呼ぶ．組 $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ のことを (X, L) のモデルということもある．

体上の有限型スキーム Z に対し，その既約成分の集合を $\mathrm{Irr}(Z)$ で表す．Z の非正則点を Z の特異点と呼び，それの成す集合を $\mathrm{Sing}(Z)$ で表す．

2. ベルコビッチ空間と骨格

定理 1.2 は，二つの空間の間の計量同型（整構造を保つ同相）の存在であった．そこで，ここで登場する二つの空間が何物であるのかを説明する必要がある．まずは，その一つであるベルコビッチ空間の骨格とは何かを説明しよう．[5][6]

2.1. ベルコビッチ空間.

骨格はベルコビッチ空間の部分空間である．まずは，入れ物であるベルコビッチ空間を説明する．

2.1.1. ベルコビッチ空間の構成．X は K 上の代数多様体であるとする．これに付随して，ベルコビッチ空間 X^{an} が定義できる[7]．これは，非アルキメデス的な設定で解析空間を実現するものである．X^{an} の位相空間としての構造を復習しておこう．点 $x \in X$ に対し，その点での剰余体を $\kappa(x)$ で表す．$K \subset \kappa(x)$ に注意しておく．X に付随する**ベルコビッチ空間** X^{an} は，集合としては

$$X^{\mathrm{an}} := \{(x, |\cdot|) \mid x \in X \text{ で，} |\cdot| \text{ は } \kappa(x) \text{ の絶対値で } |\cdot|_K \text{ の拡張である }\}$$

である．その位相について説明するために，自然な写像 $\iota : X^{\mathrm{an}} \to X$，$\iota(x, |\cdot|) = x$ があることに注意しておく．これを使って，X^{an} には次の条件を満たす最弱の位相を入れる：任意

[3][21] で興味深いところは，忠実トロピカル化の構成に藤田予想およびその周辺に関する話題を使うところであろう．

[4]$\mathscr{X}_s$ の s は “special” の s.

[5]本節に関係する参考文献を挙げておく．ベルコビッチ空間と骨格に関するオリジナルの文献は，[7, 8, 9, 10] である．これらは大著である．[13, 14, 16] に一部ベルコビッチ空間と骨格についての説明が載っており，これは比較的読みやすい．また，曲線の場合については [4] にまとまった解説があり，本稿で用いることの大部分はここに書かれている．他にも，本稿の設定と異なり K が離散付値体の場合ではあるが，[25] にある解説は代数幾何を専門とするものにとってはわかりやすいであろう．

[6]この節の多くは [22] に第 1 節に書かれていることである．本稿では既知の事実についていちいち細かい引用をしないが，正確な引用を知りたい場合はこの論文の該当箇所を参照するのが良いであろう．

[7]ベルコビッチ空間は，K が代数閉でなくても同様に定義できる．

のザリスキ開集合 $U \subset X$ と任意の $g \in \mathcal{O}_X(U)$ に対し，写像 $\iota^{-1}(U) \to \mathbb{R}, (x, |\cdot|) \mapsto |g(x)|$ は連続である．以上が，位相空間としてのベルコビッチ空間 X^{an} である．

代数多様体 X に付随するベルコビッチ空間 X^{an} は，非常に良い性質を持った位相空間である：X^{an} はハウスドルフ空間であり，局所コンパクト，弧状連結である；また，X が K 上固有であることと X^{an} がコンパクトであることは同値である．

Y も K 上の代数多様体であるとし，$f : X \to Y$ は代数多様体の間の射であるとする．任意の $x \in X$ に対し f は体準同型 $\kappa(f(x)) \to \kappa(x)$ を誘導することに注意すると，f はベルコビッチ空間の間の写像 $f^{\mathrm{an}} : X^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ を誘導する．これは連続写像である．

X の K 点集合 $X(K)$ は，自然に X^{an} の部分集合とみなせる．実際，任意の $x \in X(K)$ に対し，自然な写像 $K \to \kappa(x)$ は同型なのでこれを通して $|\cdot|_K$ は $\kappa(x)$ の絶対値となり，$(x, |\cdot|_K)$ という X^{an} の点を与える．これらの点は**古典的点**と呼ばれる．

本稿の設定では K が代数閉体であるので，$X(K)$ は X^{an} で稠密であること注意しておく．また，代数多様体の射が誘導するベルコビッチ空間の間の写像は，古典的点を古典的点に写すことも注意しておく．

2.1.2. シロフ点. X^{an} には，古典的点以外にも多くの種類の点がある．実際，X の函数体 $K(X)$ は X の生成点での剰余体であることに注意すると，$K(X)$ 上の絶対値で $|\cdot|_K$ の拡張となっているものを与えると，X^{an} が一つ与えられる．ベルコビッチ空間を扱う上では，こうした点がしばしば重要な位置を占める[8]．

X^{an} の点で X の函数体の絶対値として登場するものの中でも特に重要なもののクラスに，シロフ点 (Shilov point) と呼ばれる，モデルに付随して定義される点のクラスがある．これについて説明しよう．いま，$\pi : \mathscr{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ が X のモデルであるとする．C は特殊ファイバ $\mathscr{X}_s$ の既約成分であるとする．いま，$\mathscr{X}_s$ は C の生成点で被約であると仮定する．このとき，$K(X)$ の絶対値 $|\cdot|_C$ で次の条件で特徴付けられるものが一意に存在する：$\xi \in \mathscr{X}$ が C の生成点であるとして，各 $f \in K(X)$ に対し，

$$|f|_C = \inf\{|a| \in \mathbb{R} \mid a \in K^{\times}, a^{-1}f \in \mathcal{O}_{\mathscr{X},\xi}\}.$$

これを，$(\mathscr{X}, C)$ に付随する**シロフ点**と呼ぶ．また，モデル $\mathscr{X}$ に対して，上のような $C \in \mathrm{Irr}(\mathscr{X}_s)$ が存在して $(\mathscr{X}, C)$ に付随するシロフ点であるような点を，$\mathscr{X}$ に関するシロフ点と呼ぶ．あるモデルに関するシロフ点を，単にシロフ点と呼ぶ．以下では，$(\mathscr{X}, C)$ に付随するシロフ点を $[C]$ という記号で表す．[9]

2.1.3. 位数. $\mathscr{X}$ は X のモデルであるとする．簡単のために $\mathscr{X}_s$ は被約であると仮定する．$C \in \mathrm{Irr}(\mathscr{X}_s)$ をとる．各 $f \in K(X)^{\times}$ に対し，$\mathrm{ord}_C(f) := -\log|f|_C$ と定め f の C での**位数**を呼ぶ．f は $\mathscr{X}$ 上の零でない有理関数ともみなせるが，位数の定義より，f が $\mathscr{X}$ 上の有理関数として C の生成点 ξ で正則であることと，$\mathrm{ord}_C(f) \geq 0$ であることは同値である．また，f が ξ で可逆であることと，$\mathrm{ord}_C(f) = 0$ は同値である．

$\mathscr{L}$ は $\mathscr{X}$ 上の直線束であるとする．$\widetilde{s}$ は $\mathscr{L}$ の零でない有理切断であるとする．C の生成点 ξ の近傍での $\mathscr{L}$ の基底 u をとり，$\tilde{s} = fu$ と表す．ただし，f は $\mathscr{X}$ の有理関数である．これは，X の零でない有理関数でもある．そこで，$\mathrm{ord}_C(\tilde{s}) := -\log|f|_C$ と定め，$\tilde{s}$ の C での位数を呼ぶ．これは，$\tilde{s}$ のみによって定まる値である．

[8]後で定義する骨格は，こうした点からなる集合になっている．

[9]ここで述べることは K が代数閉体でない場合の話であって後で使うわけではないのだが，R が離散付値環の場合（このとき K は代数閉体ではない）には，シロフ点は次のようにも説明できる．いま，π は ξ で滑らかであるので $\mathcal{O}_{\mathscr{X},\xi}$ は離散付値環であり，$K(X)$ はその商体である．また，ϖ で R の極大イデアルの生成元をあらわすと，ϖ は $\mathcal{O}_{\mathscr{X},\xi}$ の極大イデアルを生成することに注意しておく．ここで，$\mathcal{O}_{\mathscr{X},\xi}$ の位数函数を ord_C で表すと，シロフ点を与える絶対値 $|\cdot|_C$ は，$f \in K(X)^{\times}$ に対し $|f|_C = |\varpi|^{\mathrm{ord}_C(f)}$ を満たす．

X 上の直線束 L に対しては，その零でない切断に対し ord_C は無条件には定まらない．しかし，(X, L) のモデル $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ を一つ指定すれば，L の有理切断 s は $\mathscr{L}$ の有理切断とみなせるのでその位数は意味をもつ．こうして決まる位数を $\mathrm{ord}_{C,\mathscr{L}}(s)$ と書く．

s_0 と s_1 が L の零でない切断であるときは，s_1/s_0 は自然に X の零でない有理関数であるので，$-\log|s_1/s_0|_C$ は意味を持つ．この値は，(X, L) の勝手なモデル $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ に対し，$-\log|s_1/s_0|_C = \mathrm{ord}_C(s_1/s_0) = \mathrm{ord}_{C,\mathscr{L}}(s_1) - \mathrm{ord}_{C,\mathscr{L}}(s_0)$ が成立することは，定義より直ちに従う．

2.1.4. 還元写像. X は K 上の代数多様体であるとする．X は K 上固有であると仮定する．$\mathscr{X}$ は X の固有モデルであるとする．このとき，還元写像 $X^{\mathrm{an}} \to \mathscr{X}_s$ が次のよう定義される．任意に $(p, |\cdot|) \in X^{\mathrm{an}}$ をとる．$|\cdot|$ は $\kappa(p)$ の絶対値で K の絶対値 $|\cdot|_K$ を拡張するものであった．V_p で，この絶対値 $|\cdot|$ に関する $\kappa(p)$ の整数環を表す．V_p は R を支配する付値環である．$\mathscr{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ は X のモデルなので，自然な可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\kappa(p)) & \longrightarrow & \mathscr{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(V_p) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(R) \end{array}$$

が存在する．$\mathscr{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ は固有射なので，射 $\mathrm{Spec}(V_p) \to \mathscr{X}$ で上の図式と可換なものが一意に存在する．$\mathrm{Spec}(V_p)$ の閉点のこの射による像は特殊ファイバー $\mathscr{X}_s$ の点である．その点を，モデル $\mathscr{X}$ に関する点 $x = (p, |\cdot|)$ の還元と呼び，$\mathrm{red}_{\mathscr{X}}(x)$ で表す．これによって写像 $\mathrm{red}_{\mathscr{X}} : X^{\mathrm{an}} \to \mathscr{X}_s$ が定まる．この写像を，$\mathscr{X}$ に付随する**還元写像**と呼ぶ．

還元写像を使ったシロフ点の特徴付けを紹介しておこう．$\mathscr{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ は X の固有モデルであるとする．特殊ファイバー $\mathscr{X}_s$ は被約であると仮定する．$x \in X^{\mathrm{an}}$ とする．このとき，x が $C \in \mathrm{Irr}(\mathscr{X})$ に対応するシロフ点であるためには，$\mathrm{red}_{\mathscr{X}}(x) \in \mathscr{X}_s$ が C の生成点であることが必要十分である．

2.2. **骨格**. 本稿の主要な対象である骨格について概説する．話を単純にするために，また本稿の対象は曲線に限るので，以下では X は K 上の滑らかな射影曲線であると仮定する．

$\pi : \mathscr{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ は X の固有モデルであるとする．特殊ファイバー $\mathscr{X}_s$ が被約かつ高々通常二重点（node）を特異点にもつ曲線であるとき，π（または $\mathscr{X}$）は X の**半安定モデル**と呼ばれる．さらに，$\mathscr{X}_s$ の各既約成分が滑らかであるとき，π（または $\mathscr{X}$）は**狭義半安定モデル**と呼ばれる．

X の半安定モデル $\pi : \mathscr{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ に対し，その特殊ファイバー $\mathscr{X}_s$ は被約なので，$\mathscr{X}_s$ の各既約成分 C は X^{an} のシロフ点 $[C]$ を定める．$V(\mathscr{X}) := \{[C] \in X^{\mathrm{an}} \mid C \in \mathrm{Irr}(\mathscr{X}_s)\}$ とおく．これは $\mathscr{X}$ に関するシロフ点の集合である．

X^{an} の骨格は，狭義半安定モデル $\mathscr{X}$ に応じて決まる X^{an} の部分空間である．抽象的な集合としては，それは狭義半安定モデルの特異ファイバーの双対グラフである．つまり頂点集合として $\mathscr{X}_s$ の既約成分全体の集合をとり，二つの頂点に対して対応する既約成分が交わって特異点を成しているときに，それに応じて辺が対応している．そして，その辺の長さは，対応する特異点の $\mathscr{X}$ における重複度（定義は後で与える）に応じて決まる．抽象的にはこのような非常に初等的な対象であるが，大事なことは，それは X^{an} の部分空間として自然に実現されるということである．頂点は $\mathscr{X}_s$ の既約成分であるが，それが X^{an} の点を与えることは既に見ている；$V(\mathscr{X})$ がそれである．では，頂点たちを結ぶ辺はどのように X^{an} で実現できるのか？以下ではこのことを説明していく．

2.2.1. 基本モデル. $\varpi \in K$ は $0 < |\varpi| < 1$ なるものであるとする．$\varpi \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ である．$\mathscr{S} := \mathrm{Spec}(R[x, y]/(xy - \varpi))$ とおき，**基本モデル**と呼ぶ．$\mathscr{S}_K := \mathrm{Spec}(K[x, y]/(xy - \varpi)) \cong \mathrm{Spec}(K[y^{\pm}])$ であるので，基本モデルは一次元代数的トーラス $\mathbb{G}_m^1 = \mathrm{Spec}(K[y^{\pm}])$ のモデル

である．また，その特殊ファイバーは $\mathrm{Spec}(k[x,y]/(xy))$ である．これは二つの既約成分からなりかつ被約である．さらに，これはちょうど一つの特異点を持ち，それは結節点である．

まず，ベルコビッチ空間 $\mathbb{G}_m^{1,\mathrm{an}}$ の中に，骨格 $S(\mathscr{S})$ を定義しよう．同型 $K[x,y]/(xy-\varpi)\cong K[y^{\pm}]$ を通じて，$K[x,y]/(xy-\varpi)$ の元を y のローラン多項式とみなす．任意の $v\in[0,-\log|\varpi|]$ に対し，$K[y^{\pm}]$ の上の絶対値 $|\cdot|_v$ で次の条件を満たすものが一意に存在することが知られている：任意のローラン多項式 $f=\sum_m a_m y^m$ に対し，

$$|f|_v=\max_m\{|a_m|\exp(-vm)\}.$$

この $|\cdot|_v$ は，$\mathscr{S}_K=\mathbb{G}_m^1$ の函数体の付値に拡張するので，それを同じ記号 $|\cdot|_v$ で表す．そこで，η で $\mathbb{G}_m^1$ の生成点を表すと，対応 $v\to(\eta,|\cdot|_v)$ は写像 $[0,-\log|\varpi|]\to\mathbb{G}_m^{1,\mathrm{an}}$ を定める．$\mathscr{S}$ の**骨格** $S(\mathscr{S})$ を，この写像の像として定義する．

上の写像 $[0,-\log|\varpi|]\to\mathbb{G}_m^{1,\mathrm{an}}$ は単射であることはすぐわかる．さらにこれは連続あることも示せる．$[0,-\log|\varpi|]$ はコンパクトで $\mathbb{G}_m^{1,\mathrm{an}}$ はハウスドルフであるので，$[0,-\log|\varpi|]\to S(\mathscr{S})$ は同相写像である．そして，その逆写像は

$$(\eta,|\cdot|_v)\mapsto-\log|\cdot|_v \tag{2.3}$$

で与えられる．

この同相を通じて，$S(\mathscr{S})$ には 1-単体の構造，つまり「整構造」，が入る．また言い換えると，$[0,-\log|\varpi|]$ の通常の長さから誘導される長さの構造が，$S(\mathscr{S})$ には入っている．

$S(\mathscr{S})$ の端点の集合を $\partial S(\mathscr{S})$ で表す．また，相対内部 $S(\mathscr{S})\setminus\partial S(\mathscr{S})$ を $\mathrm{relin}(S(\mathscr{S}))$ で表す．$S(\mathscr{S})$ の端点はちょうど二つあり，それらは $\mathscr{S}_s$ の既約成分に対応するシロフ点であることを注意しておく．これは，$\mathbb{G}_m^{1,\mathrm{an}}$ において，シロフ点が 1-単体で結ばれたことを意味する．

2.2.2. p 識別的エタール座標．基本モデルの骨格を基に，与えらた狭義半安定モデルの特異ファイバーの各特異点に対し，それに付随した標準単体を定義したい．そのために，各特異点 $p\in\mathrm{Sing}(\mathscr{X}_s)$ に対し，p 識別的エタール座標というものを導入する．$\mathscr{X}$ が狭義半安定モデルであるということから，$p\in\mathrm{Sing}(\mathscr{X}_s)$ に対し，次の性質をもつ $\varpi\in\mathfrak{m}\setminus\{0\}$ と p の $\mathscr{X}$ における開近傍 $\mathscr{U}_p$，エタール射 $\psi_p:\mathscr{U}_p\to\mathrm{Spec}(R[x,y]/(xy-\varpi_p))$ が存在する：$\mathscr{U}_p\cap\mathscr{X}_s$ はちょうど二つの既約成分からなる；p は $\mathscr{U}_p\cap\mathscr{X}_s$ の唯一の結節点である．このような ψ_p を，p **識別的エタール座標**と呼ぶ．

$p\in\mathrm{Sing}(\mathscr{X}_s)$ に対し，上の ϖ_p をとる．$v_K(\varpi_p)=-\log|\varpi_p|$ を $\mathscr{X}$ の p での**重複度**と呼ぶ．これは，$p\in\mathscr{X}$ のみによって定まる値であり，p 識別的エタール座標の取り方によらない．$\mathscr{S}:=\mathrm{Spec}(R[x,y]/(xy-\varpi_p))$ とおく．先に，骨格 $S(\mathscr{S})$ を 1-単体として定義したが，その長さはちょうど $v_K(\varpi_p):=-\log|\varpi_p|_K$ であったことに注意しておく．

2.2.3. 標準単体と骨格．以上の準備のもと，狭義半安定モデル $\mathscr{X}\to\mathrm{Spec}(R)$ と $p\in\mathrm{Sing}(\mathscr{X}_s)$ に対し，その標準単体を定義する．p 識別的エタール座標 $\psi_p:\mathscr{U}_p\to\mathscr{S}$ をとる．ここで，$\mathscr{S}=\mathrm{Spec}(R[x,y]/(xy-\varpi_p))$，$\varpi_p\in\mathfrak{m}\setminus\{0\}$ である．$\mathscr{U}_p$ の特殊ファイバーの二つの既約成分を C_1,C_2 とおく．また，$\mathscr{S}$ の特殊ファイバーは二つの既約成分から成るが，そのうち ψ_p によって C_1 に支配されるものを D_1 とおき，C_2 に支配される方を D_2 とおく．

ψ_p が誘導するベルコビッチ空間の間の写像 $\psi_p^{\mathrm{an}}:(\mathscr{U}_p)_K^{\mathrm{an}}\to\mathscr{S}_K^{\mathrm{an}}(=\mathbb{G}_m^{1,\mathrm{an}})$ を考える．非アルキメデス的幾何に関する基本事項を使うと，ψ_p がエタール射であることよりその制限写像

$$(\psi_p^{\mathrm{an}})^{-1}(\mathrm{relin}(S(\mathscr{S})))\to\mathrm{relin}(S(\mathscr{S}))$$

は，（その定義域に関して）局所的には同相であることがわかる[10]．ここで，p が $\mathscr{U}_p$ の特殊ファイバーの唯一の結節点であるという条件から，$(\psi_p^{\mathrm{an}})^{-1}(\mathrm{relin}(S(\mathscr{S})))$ の連結成分 A で $\mathrm{relin}(S(\mathscr{S}))$ に同相で写されるものが一意に存在することが示せる．この部分集合 A の

[10]複素解析空間の場合とは異なり，エタール射は必ずしもその定義域全体で局所同相を導かない．

$(\mathscr{U}_p)_K^{\mathrm{an}}$ における閉包 Δ_p をとる．これまたベルコビッチ空間の一般論から，Δ_p はコンパクトであることが示せる[11]．したがって，ψ_p^{an} は全射連続写像 $\Delta_p \to S(\mathscr{S})$ を誘導する．

この $\Delta_p \to S(\mathscr{S})$ は同相であることを見ておく．$\Delta_p \setminus A$ の点は，$\partial S(\mathscr{S}) = \{[D_1], [D_2]\}$ の各端点の逆像に属しかつ A の境界点である．$(\mathscr{U}_p)_K^{\mathrm{an}}$ はハウスドルフであるので，$\partial S(\mathscr{S})$ の各点に対しその上にある $\Delta_p \setminus A$ の点は，それぞれ一つずつである．したがって，この写像 $\Delta_p \to S(\mathscr{S})$ は単射であり，同相写像である．

$S(\mathscr{S})$ には 1-単体の構造が入っていたので，この同相を介して Δ_p も 1-単体となる．これを，p に対応する**標準単体**と呼ぶ．実際，端点の集合について $\partial\Delta_p = \{[C_1], [C_2]\}$ が成立し，確かにこれはシロフ点 $[C_1]$ と $[C_2]$ を結ぶ 1-単体である．$\mathrm{relin}(\Delta_p)$ で Δ_p の相対内部 $\Delta_p \setminus \{[C_1], [C_2]\}$ を表す．

注意 2.1. $\lambda_p = v_K(\varpi_p)$ を p での $\mathscr{X}$ の重複度とする．$\mathscr{U}_p$ 上の正則関数 $\psi_p^*(y)$ を考える．すると，(2.3) が計量同型であったことより，写像 $-\log|\psi_p^*(y)| : \Delta_p \to \mathbb{R}$ は計量同型 $\Delta_p \to [0, \lambda_p]$ を与える．本稿では詳しくは扱わないが，構成したトロピカル化写像が計量を保つかどうかを見る上では，この計量同型は基本的なものとなる．

いよいよ，骨格を定義する．標準単体を全部合わせたもの

$$S(\mathscr{X}) := \bigcup_{p \in \mathrm{Sing}(\mathscr{X}_s)} \Delta_p$$

を考える．これを，狭義半安定モデル $\mathscr{X}$ に付随した**骨格**と呼ぶ．また，X^{an} の骨格とは，ある狭義半安定モデル $\mathscr{X}$ に付随した骨格を意味する．

$p \neq q$ ならば $\mathrm{relin}(\Delta_p) \neq \mathrm{relin}(\Delta_q)$ であることを注意しておく．骨格は，上の右辺から定まる単体複体の構造を持っている．上の構成から明らかなように，その単体複体の構造は $\mathscr{X}_s$ の双対グラフのそれそのものである．さらにこれは計量グラフでもあり，実際，各 $p \in \mathrm{Sing}(\mathscr{X}_s)$ の重複度を λ_p と書くと Δ_p の長さは λ_p となっている．

$\Gamma = S(\mathscr{X})$ が骨格であるとする．$x \in \Gamma$ とする．$v \in V(\mathscr{X})$ に対し，x と v との（Γ 内での）距離 $d(x, v)$ を考えることができるが，$d(x, v)$ が Λ に属するかどうかというのは v の取り方によらない（各標準単体の長さが Λ に属するので）．そこで，$v \in V(\mathscr{X})$ を一つ固定し，

$$\Gamma_\Lambda := \{x \in \Gamma \mid d(x, v) \in \Lambda\}$$

を考えると，これは v の取り方に依らずに定まる Γ の部分集合である．この集合の点を，Γ の **Λ-点**と呼ぶ．

注意 2.2. これまでの記述からわかるように，上の意味で骨格といったらそれはコンパクトである．しかし，しばしば骨格の概念は通常はより広い意味で使われ，一般には，しかるべき半直線を「エンド」として付け加えたものも骨格と呼んで同等に扱う．[22] では，その広い意味での骨格について論じていて，定理 1.2 はこの広い意味の骨格に対しても成立する．しかし，本稿では話を余り複雑にしたくないので，上の意味での骨格のみを扱う．

2.2.4. モデルの取り換えと骨格. 骨格は狭義半安定モデル X に付随して決まるので，狭義半安定モデルを取り換えると一般には別の骨格が出てくる．その取り換えがどう骨格に影響を与えるのかについて，少しだけ説明しておく．

$\mathscr{X}$ は X のモデルであるとする．$n = 1, 2$ とする．$\mathscr{X}$ の特殊ファイバー $\mathscr{X}_s$ の既約成分 E に対しそれが **$(-n)$-曲線**であるとは，E が射影曲線と同型かつ $\#(\mathrm{Sing}(\mathscr{X}_1) \cap E) = n$ であることをいう；最後の条件は，E が他の既約成分たちと合計 n 点で交わっているということに他ならない．

$\mathscr{X}^1$ と $\mathscr{X}^2$ は，K 上の滑らかな射影曲線 X の半安定モデルであるとする．$\mu : \mathscr{X}^2 \to \mathscr{X}^1$ は X の恒等射を延長するモデルの間の射であるとする（$\mathscr{X}^2$ は $\mathscr{X}^1$ を支配するという）．

[11]実際，A はアフィノイド空間と呼ばれるコンパクト部分空間の部分集合である．

このとき，$C \in \mathrm{Irr}(\mathscr{X}_s^2)$ に対し，μ の制限 $C \to \mu(C)$ は双有理射であるか，$\mu(C)$ が一点集合となるかの，どちらかが成立する．$\mu(C)$ が一点集合となるとき，μ は C を収縮する．μ が収縮する特殊ファイバーの既約成分は，(-1)-曲線か (-2)-曲線に限る．μ が収縮する既約成分は (-2)-曲線に限るとき，μ は (-2)-収縮であるという．

さて，X^{an} の骨格 Γ をとる．狭義半安定モデル $\mathscr{X}$ を使って $\Gamma = S(\mathscr{X})$ と表す．$\mathscr{X}'$ も X の狭義半安定モデルで，X の恒等射を延長する射 $\mu : \mathscr{X}' \to \mathscr{X}$ が存在するものとする．いま，μ は (-2)-収縮であると仮定する．このとき，$S(\mathscr{X}') = \Gamma$ が成立することが知られている．さらに，$p \in \mathrm{Sing}(\mathscr{X}_s)$ とし，$E_1, \ldots, E_r$ が $\mathscr{X}'_s$ の (-2)-曲線で μ で p に収縮するもの全てであるとき，次のことが成立する：

- $E_1 \cup \cdots \cup E_r$ は非特異有理曲線の鎖である；
- $[E_1], \ldots, [E_r] \in \mathrm{relin}(\Delta_p) \cap \Gamma_\Lambda$ である；
- $\mathrm{Irr}(\mathscr{X}'_s) \setminus \{E_1, \ldots, E_r\}$ で $E_1 \cup \cdots \cup E_r$ との共通部分が空でないものがちょうど二つ存在し，それらを C_1, C_2 とすると，$[C_1]$ と $[C_2]$ は Δ_p の端点である．

実際，$\mathrm{Sing}(\mathscr{X}'_s) \cap \mu^{-1}(p) = \{q_0, \ldots, q_r\}$ とおくと，$\mathrm{Sing}(\mathscr{X}'_s) \cap (E_1 \cup \cdots \cup E_r \cup C_1 \cup C_2) = \{q_0, \ldots, q_r\}$ であり，さらに $\Delta_p = \bigcup_{j=0}^r \Delta_{q_j}$ が成立する．したがって，$V(\mathscr{X}') \supset V(\mathscr{X})$ であり，$S(\mathscr{X}') = \bigcup_{q \in \mathrm{Sing}(\mathscr{X}'_s)} \Delta_q$ で与えられる Γ の単体複体の構造は，$S(\mathscr{X}) = \bigcup_{p \in \mathrm{Sing}(\mathscr{X}_s)} \Delta_p$ で与えられるそれの，$V(\mathscr{X}') \subset \Gamma_\Lambda$ による細分を与える．

実は，この「逆」のこともできる：V は Γ_Λ の部分集合で $V \supset V(\mathscr{X})$ であるものとする．このとき，X のモデル $\mathscr{X}'$ が存在して $V = V(\mathscr{X}')$ が成立する．しかも，射 $\mu : \mathscr{X}' \to \mathscr{X}$ で X の恒等射を延長するものが存在し，μ で潰される $\mathscr{X}'_s$ の既約成分は (-2)-曲線である．

この，Γ の（しかるべき）Λ-点の集合を指定することと，X の（狭義）半安定モデルを与えることの等価性は，骨格を扱う上で基本的事項となる．

2.2.5. 変形レトラクト．X^{an} の任意の骨格 Γ に対し，変形レトラクト $\tau_\Gamma : X^{\mathrm{an}} \to \Gamma$，つまり，$\tau_\Gamma : X^{\mathrm{an}} \to \Gamma$ は連続写像で X^{an} の恒等写像とホモトピー同値であり，$\tau_\Gamma|_\Gamma$ は恒等写像であるものが存在する．τ_Γ を，Γ に付随する**変形レトラクト**と呼ぶ．この写像は，次のように記述される．任意に $x \in X^{\mathrm{an}}$ をとる．$x \in \Gamma$ ならば $\tau_\Gamma(x) = x$ である．$x \notin \Gamma$ であるとする．このとき，$x' \in \Gamma_\lambda$ で，$\Gamma \setminus \{x'\}$ の既約成分で x が属するものを B_x と書くと $B_x \cap \Gamma = \emptyset$ となるものが一意に存在する．このとき，$B_x \cup \{x'\}$ は一点集合 $\{x'\}$ に可縮であることが証明される．そして，$\tau_\Gamma(x) = x'$ である．なお，$\tau_\Gamma(X(K)) \subset \Gamma_\Lambda$ であるであることが知られている．

古典的点では，骨格の変形レトラクトと還元写像は次のように関連する．任意に古典的点 $x \in X(K)$ をとる．$\Gamma = S(\mathscr{X})$ となるような狭義半安定モデル $\mathscr{X}$ を一つ取る．Γ_Λ の部分集合 V で $V(\mathscr{X}) \cup \{\tau_\Gamma(x)\}$ なるものが存在する．上で述べた骨格の細分についての話から，X の狭義半安定モデル $\mathscr{X}'$ で $S(\mathscr{X}') = \Gamma$ であり，さらに $V(\mathscr{X}') = V$ なるものが存在する．$\tau_\Gamma(x) \in V(\mathscr{X}')$ なので，$C \in \mathrm{Irr}(\mathscr{X}')$ で $\tau_\Gamma(x) = [C]$ なるものが存在する．このとき，実は $\mathrm{red}_{\mathscr{X}'}(x) \in C \setminus \mathrm{Sing}(\mathscr{X}'_s)$ が成立する．つまり，$\tau_\Gamma(x) \in V(\mathscr{X}')$ である限り，$\tau_\Gamma(x)$ は $\mathrm{red}_{\mathscr{X}'}(x) \in C$ なる C に付随するシロフ点として特徴付けられる．

2.2.6. 極小骨格．X は K 上の滑らかな射影曲線であり，その種数を g で表す．X^{an} の骨格は X の狭義半安定モデルの応じて決まる対象であるが，その中でも「極小なもの」が存在しそれは重要な位置を占める．ここで，X^{an} の骨格 Γ が**極小**であるとは，X^{an} の任意の骨格 Γ' に対し，$\Gamma' \subset \Gamma$ ならば $\Gamma' = \Gamma$ が成立することをいう．

極小骨格について少し説明するために，いくつか言葉の導入と基礎事項の復習をしておく．$\mathscr{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ は X のモデルであるとする．これが，**Deligne–Mumford 半安定**であるとは，半安定モデルでありかつ相対双対化層 $\omega_{\mathscr{X}/R}$ がネフであることを意味する．Deligne–Mumford 半安定モデルは，X の種数が 1 以上のときかつそのときに限り存在することが知

られている[12]．半安定モデル $\mathscr{X}$ が Deligne–Mumford 半安定かどうかの判定は，(-1)-曲線の存在の有無で判定できる；$\mathscr{X}$ が Deligne–Mumford 半安定であるためには，$g \geq 1$ かつ特殊ファイバーが (-1)-曲線を持たないことが必要十分である．

モデル $\mathscr{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ が Deligne–Mumford 半安定かつ狭義半安定であるとき，**Deligne–Mumford 狭義半安定**であるといわれる．Deligne–Mumford 狭義半安定モデル $\mathscr{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ に付随する骨格 $S(\mathscr{X})$ を考える．すると，任意の骨格 Γ に対し，$S(\mathscr{X}) \subset \Gamma$ が成立する，つまり，$S(\mathscr{X})$ は X^{an} の唯一つの極小骨格であることがわかる．．それは，任意の狭義半安定モデルはある Deligne–Mumford 狭義半安定モデルを支配するという事実[13]と，勝手な二つの Deligne–Mumford 半安定モデルはある共通の Deligne–Mumford 狭義半安定モデルによって支配されるという事実に注意すれば，§ 2.2.4 で述べたことからわかる．

$g \geq 1$ と仮定する．一意に存在する極小骨格 Γ には，その Deligne–Mumford 狭義半安定モデルに応じて単体複体の構造が入り，それは有限グラフともみなせる．しかし，そのグラフ構造は Deligne–Mumford 狭義安定モデルの取り方に依存し一意に定まるものではない．

ところが，$g \geq 2$ であれば，X の安定モデルが一意に存在し，そのシロフ点の集合が定める有限グラフの構造が標準的に定まる．このことを説明しておこう．X のモデル $\mathscr{X}$ が**安定**であるとは，それが半安定かつ $\omega_{\mathscr{X}/R}$ が豊富であることをいう．安定モデルは，$g \geq 2$ のときかつそのときに限り存在することが知られている．また，存在すれば一意的であることも知られている．実際，任意の半安定モデルは安定モデルを支配する．以下では，安定モデルを $\mathscr{X}^{\mathrm{st}}$ で表す．すると，$V(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ は Γ_Λ の部分集合である．しかも，$V(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ によって Γ を分割することにより，Γ には $V(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ をその頂点集合とする有限グラフの構造が入る．$E(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ でこの有限グラフ構造における辺の集合を表す．この有限グラフ構造は，$\mathscr{X}_s^{\mathrm{st}}$ の双対グラフそのものであることを付言しておく．

狭義半安定モデルから決まる有限グラフ構造（単体複体の構造）においては，1-単体は全て閉区間と同型であった．しかし，この $\mathscr{X}^{\mathrm{st}}$ から決まる有限グラフ構造においては，$E(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ には一般には閉路 (円に同相な辺) が存在することを注意しておく．

$g \geq 2$ で Γ が極小骨格である場合，Γ の**頂点**と言ったら $V(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ の元のことをいうものとする．また，Γ の**辺**と言ったら $E(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ の元のことをいうものとする．各 $e \in E(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ に対し，e 上にある頂点を e の端頂点と呼ぶ．また，e からその端頂点を除いたものを $\mathrm{relin}(e)$ で表す．e が閉線分の場合は $\mathrm{relin}(e)$ はその相対内部であり，e が閉路の場合は，$\mathrm{relin}(e)$ は e から一点を除いたものである．

3. トロピカル化と忠実トロピカル化

本節では，トロピカル化に関する基礎事項を復習したあと，忠実トロピカル化の定義を与える．[14]

3.1. トロピカル化． $z_1, \ldots, z_N$ は不定元であるとして，K 上の N 次元代数トーラス $\mathbb{G}_m^N = \mathrm{Spec}(K[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_1^{\pm 1}])$ を考える．$\mathbb{G}_m^{N,\mathrm{an}}$ の点は，組 $(p, |\cdot|)$ で $p \in \mathbb{G}_m^N$ と p での剰余体 $\kappa(p)$ の絶対値 $|\cdot|$ の組であたえられていたことを思い出しておこう．そこで，$\mathbb{G}_m^{N,\mathrm{an}}$ の標準トロピカル化写像 $\mathrm{trop}_{\mathbb{G}_m^N} : \mathbb{G}_m^{N,\mathrm{an}} \to \mathbb{R}^N$ を

$$\mathrm{trop}_{\mathbb{G}_m^N} : p = (p, |\cdot|) \mapsto (-\log|z_1(p)|, \ldots, -\log|z_N(p)|)$$

で定める．この写像は連続かつ全射である．

標準トロピカル化写像を，K 上の射影空間からトロピカル射影空間への写像へ拡張しよう．§ 1 と同じく，$\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ とおき N 次元トロピカル射影空間 $\mathbb{TP}^N := (\mathbb{T}^{N+1} \setminus$

---

[12] 非ネターな環上での（半）安定還元定理は，[11] で論じられている．

[13] (-1)-曲線を順次収縮することによって得られる．

[14] トロピカル幾何およびトロピカル化の基本文献として，例えば [15, 23] を挙げておく．

$\{(+\infty,\dots,+\infty)\})/\sim$ を考える[15]．$(x_0,\dots,x_N)\in\mathbb{T}^{N+1}\setminus\{(+\infty,\dots,+\infty)\}$ が属する同値類の与える $\mathbb{TP}^N$ の点を $(x_0:\cdots:x_N)$ であらわす．$\mathbb{P}^N$ で K 上の N 次元射影空間を表し，その斉次座標を $X_0,\dots,X_N$ で表す．さらに，そのベルコビッチ解析空間を $\mathbb{P}^{N,\mathrm{an}}$ であらわす．このとき，$\mathbb{P}^{N,\mathrm{an}}$ の標準トロピカル化写像を

$$\mathrm{trop}:\mathbb{P}^{N,\mathrm{an}}\to\mathbb{TP}^N,\qquad p=(p,|\cdot|)\mapsto(-\log|X_0(p)|:\cdots:-\log|X_N(p)|) \tag{3.4}$$

と定義する．$\mathbb{TP}^N$ の定義より，この定義が意味を成すことは容易にわかる．

$\mathbb{P}^{N,\mathrm{an}}$ の標準トロピカル化写像は，$\mathbb{G}_m^{N,\mathrm{an}}$ の標準トロピカル化写像の拡張になっていることを確認しておこう．まず，$\mathbb{TP}^N$ は $(N+1)$ 個の開部分空間 $U_i:=\{x=(x_0:\cdots:x_N)\in\mathbb{TP}^N\mid x_i\neq\infty\}$ を持っていることに注意する．そこで，$E:=\bigcap_{i=0}^N U_i$ とおく．各 $i=0,\dots,N$ に対し，同相写像

$$\phi_i:\mathbb{R}^N\to E,\quad (u_1,\dots,u_N)\mapsto(u_1:\cdots:u_{i-1}:0:u_i:\cdots:u_N).$$

が存在する．特に，E は N 次元ユークリッド空間で $\mathbb{TP}^N$ に開埋め込みされている．一方，各 $i=0,\dots,N$ に対し，写像

$$\psi_i:\mathbb{G}_m^N\hookrightarrow\mathbb{P}^N,\quad (z_1,\dots,z_N)\mapsto(z_1:\cdots:z_{i-1}:1:z_i\cdots:z_N)$$

は開埋め込みである．そして，$\mathrm{trop}\circ\psi_i=\phi_i\circ\mathrm{trop}_{\mathbb{G}_m^N}$ が成立する．この意味で，(3.4) の標準トロピカル化写像は，確かに $\mathbb{G}_m^{N,\mathrm{an}}$ の標準トロピカル化写像の拡張である．各 $i=0,\dots,N$ について，$\mathrm{trop}^{-1}(E)=\psi_i(\mathbb{G}_m^N)$ が成立していることも注意しておく．

注意 3.1. 自然に $\mathbb{Z}^N\subset\mathbb{R}^N$ とみなす．すると，勝手な $i,j\in\{0,1,\dots,N\}$ に対し，$\phi_j^{-1}\circ\phi_i:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ は $\mathbb{Z}^N$ から $\mathbb{Z}^N$ への $\mathbb{Z}$-加群としての同型を誘導する，つまり，$\phi_j^{-1}\circ\phi_i$ は $\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$ 元を掛けるという形で与えられる．

$Y\subset\mathbb{P}^N$ は閉部分多様体であるとする．$i=0,\dots,N$ を固定する．このとき，$Y_i^\circ:=\psi_i^{-1}(Y)$ は $\mathbb{G}_m^N$ の閉部分多様体である．Bieri–Groves の結果と Speyer–Sturmfels の結果（[23] および [15, Theorem 3.3] を参照）によると，$\mathrm{trop}_{\mathbb{G}_m^N}(Y_i^{\circ,\mathrm{an}})$ には自然に多面体的構造が入る．$\dim(Y_i^\circ)=1$ の場合に限って，このことを簡単に復習しておこう：有限集合 $V\subset\mathrm{trop}_{\mathbb{G}_m^N}(Y_i^{\circ,\mathrm{an}})\cap\Lambda^N$ が存在して，Σ で $\mathrm{trop}_{\mathbb{G}_m^N}(Y_i^{\circ,\mathrm{an}})\setminus V$ の連結成分の閉包からなる集合を表すとき，各 $\Delta\in\Sigma$ は，

(i) ある $\ell\in\Lambda\cap\mathbb{R}_{>0}$ について $\Delta=\{y+tz\mid t\in[0,\ell]\}$，または
(ii) $\Delta=\{y+tz\mid t\in[0,\infty)\}$

と表される；ただし，$y\in\Lambda^N$，$z=(z_1,\dots,z_N)\in\mathbb{Z}^N$ であり $\gcd(z_1,\dots,z_N)=1$ を満たす．ここで出てきたベクトル z は，Δ の原始ベクトルと呼ばれる．これは，Δ に対して，符号の違いを除いて一意的に定まる．

多面体的構造が入っているという意味で，$\mathrm{trop}_{\mathbb{G}_m^N}(Y_i^{\circ,\mathrm{an}})$ には「整構造」が入っている．この「整構造」を使うと，次のようにして $\mathrm{trop}_{\mathbb{G}_m^N}(Y_i^{\circ,\mathrm{an}})$ に自然に計量（長さの概念）が入る：$\mathbb{R}$ の閉区間には通常の計量が入っている；もし $\Delta\in\Sigma$ が上の (i) の形（または (ii) の形）ならば，Δ と $[0,\ell]$ （または $[0,+\infty)$）を $y+tz\mapsto t$ で同一視して Δ に計量を入れる; $\mathrm{trop}_{\mathbb{G}_m^N}(Y_i^{\circ,\mathrm{an}})=\bigcup_\Delta\Delta$ なので，これで $\mathrm{trop}_{\mathbb{G}_m^N}(Y_i^{\circ,\mathrm{an}})$ に計量が入り，計量空間となる．この計量は，Δ の原始ベクトル（格子）を単位として入れているので，格子計量とも呼ばれる．

さらに，このように与えられた $\mathrm{trop}_{\mathbb{G}_m^N}(Y_i^{\circ,\mathrm{an}})$ の計量は，$\mathrm{trop}(Y^{\mathrm{an}})\cap E$ の計量となる．というのも，各 $i=0,\dots,N$ について，$\mathrm{trop}^{-1}(E)=\psi_i(\mathbb{G}_m^N)$ なので同相 $\phi_i|_{\mathrm{trop}_{\mathbb{G}_m^N}(Y_i^{\circ,\mathrm{an}})}:\mathrm{trop}_{\mathbb{G}_m^N}(Y_i^{\circ,\mathrm{an}})\to\mathrm{trop}(Y^{\mathrm{an}})\cap E$ が存在するが，$\mathrm{trop}_{\mathbb{G}_m^N}(Y_i^{\circ,\mathrm{an}})$ には計量が入っているのでこの同型を通じて $\mathrm{trop}(Y^{\mathrm{an}})\cap E$ に計量が入る．$\mathrm{trop}_{\mathbb{G}_m^N}(Y_i^{\circ,\mathrm{an}})$ に入っている計量は格子計量

[15] 定義は § 1 参照．

であったので，注意 3.1 によって $\mathrm{trop}(Y^{\mathrm{an}}) \cap E$ の計量は i によらずに定まることがわかる．こうして $\mathrm{trop}(Y^{\mathrm{an}}) \cap E$ には計量が入った．

3.2. **忠実なトロピカル化.** X は K 上の滑らかな射影曲線であり，L は X 上の直線束であるとする．零でない大域切断の系 $s_0, s_1, \ldots, s_N \in H^0(X, L)$ が与えられたとする．このとき，これに付随した写像 $\varphi : X^{\mathrm{an}} \to \mathbb{TP}^N$ を次で定義する：$\varphi' : X^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathbb{P}^{N,\mathrm{an}}$ を代数多様体の射 $p \mapsto (s_0(p) : \cdots : s_N(p))$ に付随するベルコビッチ空間の間の写像，trop を (3.4) で与えられた標準トロピカル化写像とし，$\varphi : X^{\mathrm{an}} \to \mathbb{TP}^N$ を $\varphi := \mathrm{trop} \circ \varphi'$ で定める．この写像は，

$$\varphi : X^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathbb{TP}^N, \quad p = (p, |\cdot|) \mapsto (-\log|s_0(p)| : \cdots : -\log|s_N(p)|) \tag{3.5}$$

とも表される．

前小節の通り，E は N 次元ユークリッド空間で $\mathbb{TR}^N$ に埋め込まれたものである．ここで，$\varphi(X^{\mathrm{an}} \setminus X(K)) \subset \varphi(X^{\mathrm{an}}) \cap E$ であることを確認しておこう．実際，各 s_i は X^{an} 上の直線束の大域切断と自然にみなせるが，いま s_i は零切断ではないので，X^{an} 上の切断としての零点は $X(K)$ の点に限ることがわかる．よって，任意の $x = (p, |\cdot|) \in X^{\mathrm{an}} \setminus X(K)$ に対し $-\log|s_i(p)| \neq \infty$ であるので，$\varphi(X^{\mathrm{an}} \setminus X(K)) \subset E$ である．

写像 $\varphi|_{X^{\mathrm{an}} \setminus X(K)}$ を，同相 $\phi_i : \mathbb{R}^N \to E$ によって入る E の座標を使って記述しておこう．$i = 0$ の場合を考える．ϕ_0 を通じて $E = \mathbb{R}^N$ と同一視する．すると，その座標で

$$\varphi|_{X^{\mathrm{an}} \setminus X(K)} = \left(-\log\left|\frac{s_1}{s_0}\right|, \ldots, -\log\left|\frac{s_N}{s_0}\right|\right) \tag{3.6}$$

である．他の i の場合も同様である．

$\Gamma = S(\mathscr{X})$ を X^{an} の骨格とする．ここで，$\mathscr{X}$ は X の狭義半安定曲線である．$\Gamma = \bigcup_{q \in \mathrm{Sing}(\mathscr{X}_s)} \Delta_q$ と $\mathscr{X}$ から決まる標準単体に分解しておく．λ_q で，$\mathscr{X}$ の $q \in \mathrm{Sing}(\mathscr{X}_s)$ での重複度（§ 2.2.2 参照）を表す．標準的な同相 $\Delta_q \cong [0, \lambda_q]$ を通じて Δ_q には計量が入っており，Γ にも計量が入っていた．先に述べたように $\Gamma \subset X^{\mathrm{an}} \setminus X(K)$ である．また，$\varphi(X^{\mathrm{an}} \setminus X(K)) \subset \varphi(X^{\mathrm{an}}) \cap E$ であった．したがって，φ は計量空間の間の写像 $\Gamma \to \varphi(X^{\mathrm{an}}) \cap E$ を誘導する．そこで，この写像 $\Gamma \to \varphi(X^{\mathrm{an}}) \cap E$ が計量を保つかどうかを問うことができる．この写像が区分的に計量を保つとき，これをユニモジュラートロピカル化と呼ぶ．正確には，次のように定義する．

定義 3.2 (ユニモジュラートロピカル化). X，L，Γ は上の通りとする．また，$s_0, s_1, \ldots, s_N$ は L の大域切断で零でないものであるとし，$\varphi : X^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathbb{TP}^N$ は (3.5) であたえられるトロピカル化写像であるとする．このとき，φ が Γ **のユニモジュラートロピカル化**であるとは，有限集合 $V \subset \Gamma_\Lambda$ が存在して，$\Gamma \setminus V$ の各連結成分の閉包 Δ に対し，そこに制限した写像 $\varphi|_\Delta : \Delta \to \varphi(\Delta)$ が計量同型であることをいう．

注意 3.3. $s_0, \ldots, s_M, s_{M+1}, \ldots, s_N$ は L の零でない大域切断であるとする（$N \geq M + 1$）．$\varphi_1 : X^{\mathrm{an}} \to \mathbb{TP}^M$ は (3.5) で与えられる $s_0, \ldots, s_M$ に付随する写像，$\varphi_2 : X^{\mathrm{an}} \to \mathbb{TP}^N$ は (3.5) で与えられる $s_0, \ldots, s_N$ に付随する写像とする．e は Γ 内の 1-単体であるとする．いま，$\varphi_1|_e$ は計量を保つと仮定する．このとき，$\varphi_2|_e$ も計量を保つ．というのも，(3.6) の表示で $\varphi_1|_e = \left(-\log\left|\frac{s_1}{s_0}\right|, \ldots, -\log\left|\frac{s_M}{s_0}\right|\right)$ と $\varphi_2|_e = \left(\varphi_1|_e, -\log\left|\frac{s_{M+1}}{s_0}\right|, \ldots, -\log\left|\frac{s_N}{s_0}\right|\right)$ が成立しているが，トロピカル化の像は「格子計量」で長さを入れていたので，その定義より，$\varphi_1(e)$ の長さと $\varphi_2(e)$ の長さは等しいからである．

定義 3.4 (忠実なトロピカル化). 同じ記号 X，L，Γ，$\varphi : X^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathbb{TP}^N$ の下，φ が Γ **の忠実なトロピカル化**であるとは，φ が Γ のユニモジュラートロピカル化でありかつ単射であることをいう．

つまり，φ が忠実なトロピカル化であるとは，これが計量同型 $\Gamma \to \varphi(\Gamma)$ を誘導することをいうのである．

注意 3.5. § 1 では，忠実なトロピカル化を「『整構造』を保つ」単射なトロピカル化と説明したが，上では「計量を保つ」という言い方をしている．我々は一次元の場合しか考えていないので，先にも説明した通りこれらは同じことである．

4. 証明のアイデア

定理 1.2 の証明のアイデアを説明しよう．この説明では，X は K 上の滑らかな射影曲線で種数 $g \geq 2$ であるものとし，Γ は X^{an} の極小骨格（一意に存在する）であると仮定する．$\mathscr{X}^{\mathrm{st}}$ は X の安定モデルを表す．そのシロフ点集合 $V(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ は Γ に有限グラフの構造を与えた．その有限グラフとしての辺集合は $E(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ はで表された．$V(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ と $E(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ は，X のみによって定まる有限集合である．

4.1. **欲しい大域切断の型.** L は X 上の直線束であるとする．我々の方針では，L の大域切断で次のようなものを作ることを目指す：

(i) 任意の $e \in E(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ に対し，$s_0^{e,uni}, s_1^{e,uni} \in H^0(X,L) \setminus \{0\}$ で，写像
$$-\log|s_1^{e,uni}/s_0^{e,uni}| : e \to \mathbb{R}$$
がユニモジュラー[16]であるもの；

(ii) さらに $s_0^{e,sep}, s_1^{e,sep} \in H^0(X,L) \setminus \{0\}$ で，写像
$$(-\log|s_1^{e,uni}/s_0^{e,uni}|, -\log|s_1^{e,sep}/s_0^{e,sep}|) : \mathrm{relin}(e) \to \mathbb{R}^2$$
が単射となるもの；

(iii) 任意の $e, f \in E(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ で $e \neq f$ なるものに対し，$s_0^{(e,f)}, s_1^{(e,f)} \in H^0(X,L) \setminus \{0\}$ で，任意の $x \in \mathrm{relin}(e)$ と $y \in f$ に対し
$$-\log\left|\left(s_1^{(e,f)}/s_0^{(e,f)}\right)(x)\right| \neq -\log\left|\left(s_1^{(e,f)}/s_0^{(e,f)}\right)(y)\right|$$
なるもの；

(iv) 任意の $v, w \in V(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ で $v \neq w$ なるものに対し，$s_0^{(v,w)}, s_1^{(v,w)} \in H^0(X,L) \setminus \{0\}$ で，
$$-\log\left|\left(s_1^{(v,w)}/s_0^{(v,w)}\right)(v)\right| \neq -\log\left|\left(s_1^{(v,w)}/s_0^{(v,w)}\right)(w)\right|$$
なるもの．

実際，上のような全ての辺（$E(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ の元）や頂点（$V(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ の元）に対しそれに応じて上の条件を満たす L の大域切断をとり，それらを全て並べたものを $s_0, \ldots, s_N$ と書き，これらから (3.5) で作られるトロピカル化写像 φ を考える．すると，φ は Γ の忠実なトロピカル化になっている．というのも，勝手な e に対し (i) にあるような二つの大域切断が $s_0, \ldots, s_N$ の中にあるので，それらを s_i, s_j とすると $-\log|s_i/s_j| : e \to \mathbb{R}$ はユニモジュラーである．注意 3.3 より，これは φ が e 上ユニモジュラーであることを意味する．e は任意にとったので，φ は Γ 上ユニモジュラーである．また，(ii) より，各 $e \in E(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ に対し $\mathrm{relin}(e)$ において φ は単射であり，(iii) より，相異なる二つの辺に対し，一方の辺の相対内部の点と他方の辺の点は φ で同じ点に写ることはない．ここまでで，相異なる $x, y \in \Gamma$ に対して，$x, y \in V(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ でない限り $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ が言えた．最後に，(iv) より，$x, y \in V(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ であっても $x \neq y$ であるならば $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ であることが従う．こうして φ は Γ の忠実なトロピカル化を与えることが言える．

---

[16] つまり，区分的に像への計量同型であるが e 全体で単射かは問わない．

4.2. **モデルの大域切断の構成法.** 問題は，上のような大域切断を構成することである．我々の構成方法では，上に挙げた目的に応じて (X, L) のモデル $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ をうまく作り，目標の L 大域切断を $\mathscr{L}$ の大域切断を X に制限したものとして構成する．その $\mathscr{L}$ の大域切断は，$\mathscr{L}|_{\mathscr{X}_s}$ の然るべき大域切断を作りそれを制限写像 $\mathscr{L} \to \mathscr{L}|_{\mathscr{X}_s}$ で引き戻すという方法で行われる．

例えば，相異なる $v, w \in V(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ に対して，(iv) ような大域切断をどう作るか？任意に $(v, w) \in V(\mathscr{X}^{\mathrm{st}}) \times V(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ で $v \neq w$ なるものをとる．それに応じて「然るべき」$(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ を構成するわけだが，それは，例えば次のことが要求される：C_v と C_w は $\mathscr{X}_s$ の既約成分で，$[C_v] = v$，$[C_w] = w$ なるものとする[17]；このとき，

(a) $h^1\left(\mathscr{L}|_{\mathscr{X}_s}\right) = 0$ であり，

(b) （必要なら v と w を入れ替えることによって）$\mathscr{L}|_{\mathscr{X}_s}$ の大域切断 η_v と η_w で，$\eta_v|_{C_v} = 0$，$\eta_v|_{C_w} \neq 0$，$\eta_w|_{C_v} \neq 0$（それぞれ $\mathscr{L}|_{C_v}$，$\mathscr{L}|_{C_w}$，$\mathscr{L}|_{C_v}$ の大域切断として）なるものが存在する．

$(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ に対し，$\mathscr{L}|_{\mathscr{X}_s}$ が仮に上のような η_v と η_w を大域切断として持っていると仮定しよう．(a) の条件に注意すると，base-change theorem より $\tilde{s}_0, \tilde{s}_1 \in H^0(\mathscr{L})$ が存在して $\tilde{s}_0|_{\mathscr{X}_s} = \eta_v$，$\tilde{s}_1|_{\mathscr{X}_s} = \eta_w$ が成立する．このとき，(b) の条件から，$\mathrm{ord}_{C_v}(\tilde{s}_0) > 0$，$\mathrm{ord}_{C_v}(\tilde{s}_1) = 0$，$\mathrm{ord}_{C_w}(\tilde{s}_0) = 0$，$\mathrm{ord}_{C_w}(\tilde{s}_1) \geq 0$ であることに注意する（§ 2.1.3 参照）．すると，$s_0^{(v,w)} := \tilde{s}_0|_X$，$s_1^{(v,w)} := \tilde{s}_1|_X$ とおけば，§ 2.1.3 より

$$-\log\left|\frac{s_1^{(v,w)}}{s_0^{(v,w)}}(v)\right| = \mathrm{ord}_{C_v}(\tilde{s}_1) - \mathrm{ord}_{C_v}(\tilde{s}_0) < 0$$

と

$$-\log\left|\frac{s_1^{(v,w)}}{s_0^{(v,w)}}(w)\right| = \mathrm{ord}_{C_w}(\tilde{s}_1) - \mathrm{ord}_{C_w}(\tilde{s}_0) \geq 0$$

が得られる．こうして，(iv) の状況で欲しい L の大域切断が得られた．

上の (iv) の議論に出てくる条件 (a) と (b) はどのようにして担保されるのか？これらの条件は，$\mathscr{L}$ またはそれを少し加工したものを，特殊ファイバー $\mathscr{X}_s$ またはその中の（一般には可約な）曲線に制限したものを考えたとき，その 1 次コホモロジーの消滅と密接に関連する．そのコホモロジーの消滅を言うためには，セール双対性に注意すれば $\mathscr{M} := \mathscr{L} \otimes \omega_{\mathscr{X}/R}^{\otimes -1}$ が垂直的にネフ（つまり $\mathscr{X}_s$ に制限するとネフ）であることと，そして，例えば（必要ならば v と w を入れ替えることによって）$\mathscr{M}$ の次数が C_w 上正であることが，大事な要請となる[18]．

これ以上詳しいことは省略するが，この種の議論は，(iv) の場合における大域切断の構成だけでなく，(i)，(ii)，(iii) の場合共通に決定的な役割を果たす．つまり，我々の議論においては，「$\mathscr{M}$ の垂直的ネフ性」と，「それぞれの目的に応じて指定される $V(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ のある元に対応する $\mathscr{X}_s$ の既約成分において，$\mathscr{M}$ の次数が正であること」が，決定的な問題となる．

4.3. **モデルの構成法.** では，それぞれの目的に応じて，$\mathscr{M} := \mathscr{L} \otimes \omega_{\mathscr{X}/R}^{\otimes -1}$ が必要となる正値性を持つモデル $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ はどう作られるのか？そこで重要となる道具は，最近発展著しい「計量付きグラフにおける因子理論」である．細かい定義は省いて，ごく大雑把に説明しよう．[19]

骨格 Γ を有限計量グラフとみなす．グラフ Γ の因子とは，Γ の元で生成された自由 $\mathbb{Z}$ 加群である．ここでは，実際にはより狭い概念の Λ-因子を使う；Γ 上の Λ-因子とは，Γ_Λ の元

[17] $\mathscr{X}$ は $\mathscr{X}^{\mathrm{st}}$ を支配するので，このような既約成分はいつでも存在する．

[18] 要請はこれだけではないが，とりあえず．

[19] 参考文献としては，たとえば [1, 2, 3, 12, 17, 18, 24] を挙げておく．

で生成された自由 $\mathbb{Z}$-加群である．Γ 上の Λ-因子のなす群を $\mathrm{Div}_\Lambda(\Gamma)$ で表す．通常の代数曲線における因子理論と同様，Λ-因子が有効（Γ_Λ の点の非負整数の線型結合）であるとか，主因子であるとか，二つの Λ-因子が線型同値であるとか，Λ-因子 D が定める線型系 $|D|$（D に線型同値な有効因子全体）であるとか，$|D|$ の次元（グラフ上の因子論では階数と呼ばれる）であるとか，リーマン・ロッホの定理とかいった，グラフ上の Λ-因子に関する基本的な概念・定理が，最近構築されてきている．さらに，滑らかな射影曲線の場合と同様に，**リーマンの不等式**と呼ばれる「$\deg(D) \geq g(\Gamma)$ ならば $|D| \neq \emptyset$」という事実も成立することが知られている；ただし，$g(\Gamma)$ は Γ の 1 次ベッチ数で，しばしば Γ の種数と呼ばれる．Γ は種数 g の曲線の骨格であることから，$g(\Gamma) \leq g$ が成立することを注意しておく．

グラフ Γ 上の Λ-因子の理論は単に Γ 上だけの話ではなく，曲線 X の因子やその半安定モデルの直線束の話と結びつくことが重要である．たとえば，X のモデル $\mathscr{X}$ とその上の直線束 $\mathscr{M}$ が与えれれたとき，Γ 上の因子 $D_{\mathscr{M}}$ を

$$D_{\mathscr{M}} := \sum_{C \in \mathrm{Irr}(\mathscr{X}_s)} \deg\left(\mathscr{M}|_C\right)[C]$$

で定義することができる．そして，$\mathscr{M}$ が垂直的にネフであるというのは $D_{\mathscr{M}}$ が有効因子であるということであり，C で次数が正であるというのは $[C]$ の係数が正であるということに他ならない．また，X 上の因子との関係を見るために，§ 2.2.5 で変形レトラクト $\tau_\Gamma : X^{\mathrm{an}} \to \Gamma$ が出てきたことを思い出しておこう．これによって，$(\tau_\Gamma)_* : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Div}_\Lambda(\Gamma)$ が自然に誘導される；実際，$(\tau_\Gamma)_*\left(\sum_x n_x x\right) := \sum_x n_x \tau_\Gamma(x)$ である．この $(\tau_\Gamma)_*$ は次数を保つ．また，線型同値も保つ．

では，$\deg(L) \geq 3g-1$ であると仮定する．$w \in V(\mathscr{X}^{\mathrm{st}})$ が指定されたとして，(X, L) のモデル $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ で $\mathscr{M} := \mathscr{L} \otimes \omega_{\mathscr{X}/R}^{\otimes -1}$ が垂直的にネフでありかつ w に対応する既約成分上で $\mathscr{M}$ の次数が正であるようなものが欲しいと仮定して，その構成原理を簡単に説明しよう．$M := L \otimes \omega_X^{\otimes -1}$ とおき，さらに X の因子 $\tilde{D}$ で $M \cong \mathcal{O}_X(\tilde{D})$ なるものを一つとる．すると，$\deg(\tilde{D}) \geq g+1$ である．いま，変形レトラクト τ_Γ によって Γ 上の因子 $(\tau_\Gamma)_*(\tilde{D})$ が得られる．$\deg((\tau_\Gamma)_*(\tilde{D}) - w) \geq g \geq g(\Gamma)$ なので，グラフ Γ 上のリーマンの不等式より $|\tau_*(\tilde{D}) - w| \neq \emptyset$，つまり，$(\tau_\Gamma)_*(\tilde{D}) - w$ に線型同値で有効な $E \in \mathrm{Div}_\Lambda(\Gamma)$ が存在する．$(\tau_\Gamma)_*(\tilde{D})$ と $E + w$ は線型同値である，すなわち，それらの差は主因子である．ここで，「Raynaud の定理」と呼ばれる，$(\tau_\Gamma)_*$ が主因子群の間の全射を誘導するという結果を使うと，$\tilde{D}_1 \in \mathrm{Div}(X)$ で $\tilde{D}$ に線型同値かつ $(\tau_\Gamma)_*(\tilde{D}_1) = E + w$ であるものが取れる．$\mathrm{Supp}(E+w) \subset \Gamma_\Lambda$ であることより，X の狭義半安定モデル $\mathscr{X}$ で $\mathrm{Supp}(E+w) \subset V(\mathscr{X})$ なるものが存在する（§ 2.2.4 参照）．ここで，$\tilde{D}_1 = \sum_{i=1}^{\ell} n_i P_i$ と書く．ただし，n_i は正の整数で $P_i \in X(K)$ である．$\tau_\Gamma(P_i) \in V(\mathscr{X})$ なので，$\mathrm{red}_{\mathscr{X}}(P_i) \in \mathscr{X}_s \setminus \mathrm{Sing}(\mathscr{X}_s)$ である（§ 2.2.5 参照）．一方，$\mathscr{X}$ における P_i のザリスキ閉包を σ_i で表すと，$\mathrm{red}_{\mathscr{X}}$ の構成法から $\sigma_i \cap \mathscr{X}_s = \{\mathrm{red}_{\mathscr{X}}(P_i)\}$ である．したがって，$\sigma_i \cap \mathscr{X}_s$ は $\mathscr{X}_s$ のカルティエ因子であり，このことから σ_i は $\mathscr{X}$ のカルティエ因子となることがわかる．そこで，$\mathscr{M} := \mathcal{O}_{\mathscr{X}}\left(\sum_i^{\ell} n_i \sigma_i\right)$ と定める．作り方から，$\mathscr{M}|_X = M = L \otimes \omega_X^{\otimes -1}$，$D_{\mathscr{M}} = E + w$ である．特に，$D_{\mathscr{M}}$ は有効因子なので $\mathscr{M}$ は垂直的にネフであり，E が有効因子なので w に対応する $\mathscr{X}_s$ の既約成分では $\mathscr{M}$ の次数は正である．最後に，$\mathscr{L} := \mathscr{M} \otimes \omega_{\mathscr{X}/R}$ とおけば，$(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ は (X, L) のモデルであり，必要な用件を満たしていることがわかる．これで欲しかったモデルが作られた．

上の議論で一つ注意すべきは，グラフ上でリーマンの不等式を使うために $\deg(\tilde{D}) \geq g+1$ が必要であるという点である．これに由来して，我々の主定理では「$\deg(L) \geq 3g-1$ ならば」という仮定が出てくるのである．

5. 付録

母語で書く気楽さも手伝ってか，付録と称して楽屋話を少し書いておきたくなった．以下では，考える曲線は種数 $g \geq 2$ の場合に限ることにする．

5.1. **公開までの経緯.** 本研究については，これまでいろいろ講演の機会を頂きお話ししてきた．例えば，平成 28 年 1 月 “Arithmetic and Algebraic Geometry 2016”（講演者：川口）; 3 月 “Tropical Geometry and Related Topics”（講演者：山木）; 9 月 “Conference on Arakelov Geometry — Archimedean and Non-Archimedean Aspects”（講演者：川口）; そして 10 月の城崎代数幾何シンポジウム（講演者：山木）等がある．これらの機会でお話したものにはいくつかバージョンがあり，実のところ，主結果の結論である $\deg(L)$ の下からの評価は，徐々に良くなってきている．また，このことと関連してそうなったのだが，論文 [22] の公開が最初の講演の時から存外に遅くなってしまった．これらの事情について，少し述べておきたい．

川口周氏との本共同研究は，平成 27 年の立春の頃に始まった．当初は本稿で述べたものとは少し異なり,「離散付値環が存在して，X と L はその分数体である離散付値体上定義可能であり，さらに骨格 Γ はその離散付値環上定義可能な半安定モデルに付随する」という強い条件の下で考察していた．当初の我々の方法では，技術的な理由で，X のモデルとして離散付値環上の正則な狭義半安定モデルをとる必要があったためである．同年の立冬の頃，この条件下であるが一定の結果が得られた．ただし，ここで得られた $\deg(L)$ についての評価式は，現在得られている定理 1.2 のそれよりも悪く,「$\deg(L) \geq 5g-4$ ならば忠実なトロピカル化が得られる」というものであったが.

川口氏が 1 月に開催される “Arithmetic and Algebraic Geometry 2016” で講演する機会を得ていたので，その機会にこの結果を講演で公にすることにした．我々は，それまでには論文をアーカイブに公開しておきたいと考えていたのでそのつもりで原稿の執筆をしていたが，書き上げるには思った以上に時間がかかってしまい，それはかなわなかった．その原稿がほぼ書きあがったのは，平成 28 年の立春を過ぎたことだったと記憶している．少し原稿を休ませてからもう一度全体を読み直し修正を入れてからアーカイブで公開しようという話になっていた．しかし，2 月後半から 3 月初めにかけては著者の二人とも忙しく，結局その時期の公開には至らなかった．

そんな中，3 月前半に京都で研究集会 “Tropical Geometry and Related Topics” が開催され，本研究の内容について講演する機会を山木が頂いた．そこでは，上の「離散付値体（環）上定義可能」という条件の下で話をしたわけだが，その際聴衆の方から，なぜその仮定が要るのかという質問を受けた．その質問をしてくれた一人が，Antoine Ducros 氏である．講演の後彼と少し話したところ，より弱い「付値の有理階数が 1」という条件の下でも基本的に同じ方法で証明できそうだということに我々は気が付いた[20].

そこで，ほぼ出来上がっていた原稿を改訂することとなった．この改訂では議論の柱に変更ななかったが，正則スキーム上でカルティエ因子とヴェイユ因子を区別することなく自由に使っていた箇所を，非ネターな設定でのカルティエ因子の言葉に置き換えなければならず，作業には多少時間がかかった．

さらに，その改訂作業をしばらく行っておおむねそれが終了したころ，論文の一部で大域的に行っていた議論を局所的な議論で置き換えることによって,「付値の有理階数が 1」という仮定も不要ではないか，つまり完全に一般の場合でも結論が得られのではないか，ということに気が付いた．実際それは正しいことが程なくわかり，我々は再度改訂を行うことになった．平成 28 年の立秋の少し前に，K には条件無しで「$\deg(L) \geq 5g-4$ で OK」の原稿が，ようやく出来上がった．

ある日のこと，これでもう完成という段階になったとき，グラフの因子に関する少し別の話題について，我々の間で議論となった．その議論が一段落したころ，この議論から触発されたアイデアを使えば $\deg(L) \geq 5g-4$ という評価がもっとよくなるのではないかというこ

[20]議論に付き合ってくれた Ducros 氏には感謝している．

とに我々は気が付てしまった．議論を精査してみると，$\deg(L) \geq 3g+1$ で OK のようだ，という結論になった．

基本的アイデアは，やはり良いモデルをとってその大域切断として欲しいものを作るというものであり，その点は同じである．違う点は，こまでは一つの良いモデルを考えてその大域切断として欲しいものを構成していたが，今度は本稿で説明した方法でもある「『目的』に応じてモデルを取り替える」という点である．これは議論全体に影響する大きな変更であって，改訂作業はそれなりに大変であった．9 月半ばに，なんとかこの版の草稿はできあがった．[21]

さて，この「$\deg(L) \geq 3g+1$」で結論が得られるというはそれはそれで良いのだが，一つ新たな問題が生じる．$g=2$ のとき，この新しい評価は「$\deg(L) \geq 5g-4$」より悪いものとなってしまうのだ．なので，最良の結果を論文に書くためには，$g=2$ の場合は昔の議論を復活させるか，または他の方法で良い評価を証明する必要がある．新しい議論は昔の議論をするには設定が大きく違いすぎたので，新しい議論の枠組みでの別の証明を考えることにした．その証明は，種数が 2 で出てくる極小骨格の形が非常に限られるため，困難無く得られた．

この種数 2 の部分を書いてようやく完成か，と思った頃，どうやらこの種数 2 の場合の別証明を考えたことに誘発されたようで，「$\deg(L) \geq 3g+1$」はもっと改良できるのではないかという気がしてきてしまった．すぐに，「$\deg(L) \geq 3g$ で OK」は確信できた．さらに，「$\deg(L) \geq 3g-1$」で行けそうではないか，という話になってきた．これは，骨格をグラフとみなした上で，それまでになかった新しい議論を幾つか要するもので少々困難を伴ったが，無事証明を付けることができた．それは 10 月半ば，講演させて頂いた城崎シンポジウムの少し前のことであった．幸い，城崎ではこの結果をお話させて頂くことができた．

「$\deg(L) \geq 3g-1$」の版では新しい議論が必要であったため，改訂は多くの箇所にわたった．また，学期の真っ最中で著者の二人とも忙しく，そのために改訂には時間を要した．ようやく，何とか読める形になったであろうというものを書き上げ，平成 28 年 12 月 4 日にアーカイブでの公開に至ったのである．以上が，本研究の公開までの経緯である．

5.2. **その後**. 12 月 4 日に [22] を公開すると同時に，「忠実トロピカル化界隈」の数学者何人かに，メールでその原稿を送付した．すると，その中の一人から，少々やっかいな指摘を受けた．ある論文 A（指摘者の論文ではない．また出版もされてはいない．アーカイブにはある．）の結果を使うと，滑らかな射影曲線 X 上の直線束 L が非常に豊富でありさえすれば，X^{an} のどんな骨格に対しても，$s_0, \ldots, s_N \in H^0(X.L) \setminus \{0\}$ をうまく取って φ が作れば，φ は Γ 上では単射になることが示せるというのである．実際，論文 A の結果を認めるとそのようなものが作れるという彼の論理は正しかった．

我々にとって，これは一大事である．もし論文 A が正しければ，我々の議論の少なくない部分，少なくとも計量（整構造）とは関係ない単射性の部分，は既知の話で無用となる．それは，我々にとっては嬉しい状況ではない．しかし一方で，我々はその研究議論の過程で，そのようなことは到底期待できないという感触を得ていたので，論文 A の結果はどうも腑に落ちなかった．とにかく，この論文を精査しないといけない．というわけで，我々はその論文を読み始めた．

ページを捲ってみると，それはとても読めたものではなかった．議論に行間が大きいとかいう話ではなく，証明には明確な間違いが散見された．我々の間で「どうもこれは怪しいぞ」という話でまとまるまでに，それほど時間はかからなかった．そして，その論文の主結果の反例を考えたら，思いの外簡単に作れた．それでこの騒動には無事決着がついた．

---

[21] “Conference on Arakelov Geometry — Archimedean and Non-Archimedean Aspects” での講演は，この「$\deg(L) \geq 3g+1$ 版」であった．

現在，その騒動の副産物 (?) として，当初期待していなかった方向に研究が進展しつつある[22]．次の改訂では，これについても触れる予定で，現在平成 28 年 12 月末.その作業を進行中である．というわけで，論文 [22] の完成には，もう少し時間を要することになった[23]．

References

[1] O. Amini and L. Caporaso, *Riemann–Roch theory for weighted graphs and tropical curves*, Adv. Math. **240** (2013), 1–23.

[2] M. Baker, *Specialization of linear systems from curves to graphs, with an appendix by Brian Conrad*, Algebra Number Theory **2** (2008), 613–653.

[3] M. Baker and S. Norine, *Riemann–Roch and Abel–Jacobi theory on a finite graph*, Adv. Math. **215** (2007), 766–788.

[4] M. Baker, S. Payne, J. Rabinoff, *On the structure of non-Archimedean analytic curves*, Tropical and non-Archimedean geometry, 93–121, Contemp. Math., **605**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.

[5] M. Baker, S. Payne and J. Rabinoff, *Nonarchimedean geometry, tropicalization, and metrics on curves*, Algebr. Geom. **3** (2016), 63–105.

[6] M. Baker and J. Rabinoff, *The skeleton of the Jacobian, the Jacobian of the skeleton, and lifting meromorphic functions from tropical to algebraic curves*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2015**, no. 16, 7436–7472.

[7] V. Berkovich, *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. **33**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[8] V. G. Berkovich, *Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **78** (1993), 5–161.

[9] V. G. Berkovich, *Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible*, Invent. Math. **137** (1999), no. 1, 1–84.

[10] V. G. Berkovich, *Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible. II.*, Geometric aspects of Dwork theory, Walter de Gruyter and Co. KG, Berlin, 2004, pp. 293–370.

[11] S. Bosch, W. Lütkebohmert, Stable reduction and uniformization of abelian varieties I, Math. Ann. **270** (1985), no. 3, 349–379.

[12] A. Gathmann and M. Kerber, *A Riemann-Roch theorem in tropical geometry*, Math. Z. **259** (2008), no. 1, 217–230.

[13] W. Gubler, *Tropical varieties for non-archimedean analytic spaces*, Invent. Math. **169** (2007), no. 2, 321–376.

[14] W. Gubler, *Non-archimedean canonical measures on abelian varieties*, Compositio Math. **146** (2010), 683–730.

[15] W. Gubler, *A Guide to Tropicalizations*, Algebraic and Combinatorial Aspects of Tropical Geometry, Contemp. Math., **589**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, 125–189.

[16] W. Gubler, J. Rabinoff, and A. Werner, *Skeletons and tropicalizations*, Adv. Math. **294** (2016), 150–215.

[17] C. Haase, G. Musiker, and J. Yu, *Linear systems on tropical curves*, Math. Z. **270** (2012), no. 3-4, 1111–1140.

[18] J. Hladký, D. Kráľ, and S. Norine, *Rank of divisors on tropical curves*, J. Combin. Theory Ser. A **120** (2013), no. 7, 1521–1538.

[19] E. Katz, H. Markwig, and T. Markwig, *The j-invariant of a plane tropical cubic*, J. Algebra **320** (2012), 853–875.

[20] E. Katz, H. Markwig, and T. Markwig, *The tropical j-invariant*, LMS J. Comput. Math. **12** (2009), 275–294.

[21] S. Kawaguchi, and K. Yamaki, *Effective faithful tropicalizations associated to adjoint line bundles*, preprint 2016, available at arxiv.

[22] S. Kawaguchi, and K. Yamaki, *Effective faithful tropicalizations associated to linear systems on curves*, preprint 2016, arXiv:1612.01098.

[23] D. Maclagan and B. Sturmfelds, *Introduction to Tropical Geoemtry*, Graduate Studies in Mathematics, **161**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[24] G. Mikhalkin and I. Zharkov, *Tropical curves, their Jacobians and theta functions*, Curves and abelian varieties, 203–230, Contemp. Math., **465**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[22]論文 A のことを知らせてくれた方には非常に感謝している．

[23]平成 29 年 1 月半ばには，改訂版をアーカイブに上げたいと思っているが ⋯．

[25] J. Nicaise, *Berkovich skeleta and birational geometry*, preprint available at http://arxiv.org/abs/1409.5229.

E-mail address: yamaki.kazuhiko.6r@kyoto-u.ac.jp