代数多様体の族のモノドロミーと極限混合Hodge構造について

齋藤隆大
筑波大学数理物質科学研究科数学専攻
email: takahiro@math.tsukuba.ac.jp

1 導入

以下は，筑波大学数理物質系の竹内潔氏との共同研究 [10] の内容である．複素数体 $\mathbb{C}$ 係数の一変数有理関数体を $\mathbb{C}(t)$ と表す．$\mathbb{C}(t)$ 係数の n 変数多項式（resp. Laurent 多項式）$f(t,x) \in \mathbb{C}(t)[x_1,\ldots,x_n]$ (resp. $f(t,x) \in \mathbb{C}(t)[x_1^{\pm},\ldots,x_n^{\pm}]$) に対して，$\mathbb{C}$ の原点を中心とする十分小さい穴あき円盤 $B(0,\varepsilon)^*$ と複素 n-平面 $\mathbb{C}^n$ (resp. n 次元代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$) の直積 $B(0,\varepsilon)^* \times \mathbb{C}^n$ (resp. $B(0,\varepsilon)^* \times (\mathbb{C}^*)^n$) の中での $f(t,x)$ の零点集合を Y と書く．Y の $B(0,\varepsilon)^*$ への射影 $\pi_Y \colon Y \longrightarrow B(0,\varepsilon)^*$ は $B(0,\varepsilon)^*$ 上の局所自明なファイブレーションを定め，従って Y は $t \in B(0,\varepsilon)^*$ パラメータとする $\mathbb{C}^n$ (resp. $(\mathbb{C}^*)^n$) の超曲面の族を与える．任意の $t \in B(0,\varepsilon)^*$ に対して，$Y_t = \pi_Y^{-1}(t) \subset Y$ で t におけるファイバーを表す．任意に $t \in B(0,\varepsilon)^*$ を固定し，始点と終点が $t \in B(0,\varepsilon)^*$ である $B(0,\varepsilon)^*$ 内で原点を一周する路を考えると，Y_t のコンパクト台付きコホモロジー群 $H_c^j(Y_t;\mathbb{C})$ の**モノドロミー自己同型**

$$\Phi_j \colon H_c^j(Y_t;\mathbb{C}) \longrightarrow H_c^j(Y_t;\mathbb{C})$$

が定義される．これは以下で述べるような古典的ないくつかの状況を含むような一般的なクラスである．

例 1.1. $g \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ を $\mathbb{C}$ 係数の n 変数多項式とする．$\mathbb{C}(t)$ 係数の多項式を

$$f(t,x) := g(x) - t$$

と定めると，$Y_t = g^{-1}(t) \subset \mathbb{C}^n$ $(0 < t \ll 1)$ である．したがって，Φ_j は，特異ファイバー $g^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^n$ の十分近い滑らかなファイバー $g^{-1}(t) \subset \mathbb{C}^n$ のコンパクト台付きコホモロジー群に誘導されるモノドロミー自己同型に他ならない．

例 1.2. $g \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ を $\mathbb{C}$ 上の n 変数多項式とする．$\mathbb{C}(t)$ 係数の多項式を

$$f(t,x) := g(x) - 1/t$$

と定めると，$Y_t = f^{-1}(1/t) \subset \mathbb{C}^n$ $(1 \ll t)$ である．Broughton [3] によれば，写像 $g \colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ に対し，有限個の点 $p_1,\ldots,p_m \in \mathbb{C}$ があって，g を $\mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{p_1,\ldots,p_m\})$ に制限すれば $\mathbb{C} \setminus \{p_1,\ldots,p_m\}$ 上の $\mathbb{C}^\infty$ 級局所自明なファイブレーションを定める．$\{p_1,\ldots,p_m\}$ を囲むような $\mathbb{C}^*$ 内の路の持ち上げは，十分大きい $s \in \mathbb{C}^*$ 上のファイバー $g^{-1}(s)$ のコンパクト台付きコホモロジー群の自己同型を定める．これを**無限遠におけるモノドロミー自己同型**と呼ぶ．$t \in \mathbb{C}^*$ が十分小さいとき，$1/t$ は十分大きくなるので，$f(t,x) = g(x) - 1$ に対して定義される自己同型 Φ_j は，g の無限遠におけるモノドロミー自己同型に他ならない．

我々は，このモノドロミー自己同型 Φ_j を調べる．特に Φ_j の Jordan 標準形を求めるという問題を考える．Φ_j の定義は抽象的なものであるため，定義通り計算することは一般には難しい．そこで我々はまず，Φ_j の情報を部分的に持っている $H_c^j(Y_t;\mathbb{Q})$ 上の極限混合 Hodge 構造と呼ばれる混合 Hodge 構造を計算し，その後その情報から Φ_j の Jordan 標準形の情報を引き出す，という手順を取る．

2 極限混合 Hodge 構造

$f(t,x) \in \mathbb{C}(t)[x_1,\dots,x_n]$ (resp. $f(t,x) \in \mathbb{C}(t)[x_1^{\pm},\dots,x_n^{\pm}]$) を $\mathbb{C}(t)$ 係数の n 変数多項式 (resp. Laurent 多項式) とする．十分小さい $t \in B(0,\varepsilon)$ に対して，t でのファイバー $Y_t \subset \mathbb{C}^n$ (resp. $Y_t \subset (\mathbb{C}^*)^n$) のコンパクト台付きコホモロジー群 $H_c^j(Y_t;\mathbb{Q})$ には **Deligne の標準的な混合 Hodge 構造**が入る．この混合 Hodge 構造に関する Hodge フィルトレーションを $F^\bullet$, ウェイトフィルトレーションを $W_\bullet$ と表す．他方，コホモロジー群 $H_c^j(Y_t;\mathbb{Q})$ には Steenbrink-Zucker [12], El Zein [7] による**極限混合 Hodge 構造**と呼ばれるもう一つの混合 Hodge 構造が入ることが知られている．この混合 Hodge 構造に関する Hodge フィルトレーションを $F_\infty^\bullet$, ウェイトフィルトレーションを $M_\bullet$ と表し，それぞれ**極限 Hodge フィルトレーション**，**相対モノドロミーフィルトレーション**と呼ばれる．この混合 Hodge 構造は，以下で述べるような意味でモノドロミー自己同型 Φ_j の情報を部分的に持つ．

定義 2.1. V を有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間，A を $A^{r+1}=0$ となるような V 上の冪零自己順同型とする．このとき V 上の有限な増大フィルトレーション

$$V_{-1}=\{0\}\subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{2r}=V$$

で以下の条件:

(i) $A(V_k)\subset V_{k-2} \quad (k\in\mathbb{Z})$

(ii) $A^k\colon \mathrm{Gr}_{r+k}V = V_{r+k}/V_{r+k-1} \longrightarrow \mathrm{Gr}_{r-k}V = V_{r-k}/V_{r-k-1}$ が同型 $\quad (k\in\mathbb{Z})$

を満たすものが一意的に存在し，それを**中心 r の A-ウェイトフィルトレーション**と呼ぶ．

定義から分かるように，A-ウェイトフィルトレーションは A の Jordan 標準形の情報を復元する．即ち，任意の $1\le k\le r+1$ に対して A の Jordan 標準形における大きさ k の Jordan 細胞の個数は

$$\mathrm{dimGr}_{r+1-k}V - \mathrm{dimGr}_{r-1-k}V$$

と表すことができる．

この定義を用いて相対モノドロミーフィルトレーション $M_\bullet$ の持つ性質を表すことができる．Φ_j を半単純部分 Φ_j^s と冪単部分 Φ_j^u に分解し，さらに冪単部分の対数を $N=\log\Phi_j^u$ と置く．任意の $r\in\mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Gr}_r^W H_c^j(Y_t;\mathbb{C})$ に $M_\bullet$ が誘導するフィルトレーションを $M(r)_\bullet$, N が誘導する自己準同型を $N(r)$ と表すとき，$M(r)_\bullet$ は中心 r の $N(r)$-ウェイトフィルトレーションである．従って，ある $r_0\in\mathbb{Z}$ があって $r\neq r_0$ ならば $Gr_r^W H_c^j(Y_t;\mathbb{C})$ が消えるような場合には，フィルトレーション $M_\bullet = M(r_0)_\bullet$ が自己同型 Φ_j の情報を全て復元する．

一般にこのような集中が起こっている事は期待できないが，$H_c^j(Y_t;\mathbb{C})$ を一般固有空間に分解して考えることで，いくつかの固有値に関する部分についてはこの条件が成立している可能性がある．Φ_j の固有値 $\lambda\in\mathbb{C}^*$ に対して，$H_c^j(Y_t;\mathbb{C})_\lambda \subset H_c^j(Y_t;\mathbb{C})$ で λ に対する Φ_j の一般固有空間を表す．すると，もしある $r_0\in\mathbb{Z}$ があって，

$$\mathrm{Gr}_r^W H_c^j(Y_t;\mathbb{C})_\lambda = 0 \ (r\neq r_0) \tag{2.1}$$

が成立している場合，Φ_j の Jordan 標準形における，固有値 λ，大きさ k の Jordan 細胞の個数は，

$$\dim \mathrm{Gr}^M_{r_0+1-k} H^j_c(Y_t;\mathbb{C})_\lambda - \dim \mathrm{Gr}^M_{r_0-1-k} H^j_c(Y_t;\mathbb{C})_\lambda$$

と表せる．即ちこの場合は Φ_j の Jordan 標準形の固有値 λ に関する部分の情報が，相対ウェイトフィルトレーション $M_\bullet$ の次数付き商の次元の情報から引き出せる．従って，どのような場合に (2.1) のような Deligne のウェイトフィルトレーションの集中が起こっているか，という事を調べる事が重要になってくる．

定義 2.2. $\lambda \in \mathbb{C}^*$ に対して，二変数極限 E_λ-多項式を

$$E_\lambda(Y_t;u,v) := \sum_{p,q\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j \dim \mathrm{Gr}^p_{F_\infty} \mathrm{Gr}^M_{p+q} H^j_c(Y_t;\mathbb{C})_\lambda u^p v^q,$$

三変数極限 E_λ-多項式を

$$E_\lambda(Y_t;u,v,w) := \sum_{p,q,r\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j \dim \mathrm{Gr}^p_{F_\infty} \mathrm{Gr}^M_{p+q} \mathrm{Gr}^W_r H^j_c(Y_t;\mathbb{C})_\lambda u^p v^q w^r$$

と定義する．

ある $j_0 \in \mathbb{Z}$ があって $H^j_c(Y_t;\mathbb{C})_\lambda = 0$ $(j \neq j_0)$ が成立している場合は，$j = j_0$ に関する式 (2.1) は $E_\lambda(Y_t;u,v,w)$ の w に関する次数が r_0 次に集中しているという事と同値である．従って，ある $j_0 \in \mathbb{Z}$ があって $H^j_c(Y_t;\mathbb{C})_\lambda = 0$ $(j \neq j_0)$ が成立している事と，$E_\lambda(Y_t;u,v,w)$ の w に関する次数が r_0 次に集中しているという事の二条件が成立すれば，極限 E_λ 多項式から $H^{j_0}_c(Y_t;\mathbb{C})$ 上のモノドロミー自己同型 Φ_{j_0} の Jordan 標準形の固有値 λ に関する部分を計算することができる．

近年，Stapledon [11] がモチビック近接ファイバーの理論を用い，三変数極限 E_λ-多項式を，$f(t,x)$ の Newton 多面体の組み合わせ論的情報から定まる多項式を使って非常に具体的に記述することに成功した（定理 3.7）．さらに [11] では，いくつかの場合に $E_\lambda(Y_t;u,v,w)$ の w に関する次数の集中と，コホモロジー $H^j_c(Y_t;\mathbb{C})$ の非自明な次数の集中を証明し，Φ_j の Jordan 標準形を具体的に計算している．

Stapledon によるモチビック近接ファイバーの計算（定理 3.6）の証明はトロピカル幾何学の技術的な結果や，Steenbrink [13] によるモチビック近接ファイバーの新しい記述を用いており，Denef-Loeser [5], [6] や Guibert-Loeser-Merle [8] で行われているようなモチビック近接ファイバーの計算方法を直接用いたものではなかった．そこで我々は [10] において，古典的なトーリック幾何学と Denef-Loeser [5], [6] や Guibert-Loeser-Merle [8] で行われている計算手法を直接用いる形で，Stapledon の結果の証明を簡略化した．さらに $E_\lambda(Y_t;u,v,w)$ の w に関する次数の集中を，より幾何学的な別な手法により証明した（定理 4.4, 4.8）．これによって Stapledon が課していた $f(t,x)$ の Newton 多面体の条件を弱める事が可能となり，より広いクラスに対して Φ_j を具体的に計算することができた．さらに，一連の主張を正規交叉多様体の族に関する主張へ一般化することができた（4.3 章）．

以下で，これらの詳細を述べる．

3 モチビック近接ファイバー

3.1 モチビック近接ファイバー

二変数 E_λ 多項式 $E_\lambda(u,v)$ には $\mathbb{C}$ 上の代数多様体の Grothendieck 環 (のある局所化) の中に**モチビック近接ファイバー**と呼ばれる上部構造が存在する（定義 3.2）．これはある作

用付き代数多様体の有限個の族として表されるものであり，それらの Hodge 実現の和をとると $E_\lambda(u,v)$ となるというものである（定理 3.4）．ここで Hodge 実現とは，代数多様体の各コホモロジー群の Deligne による標準的な混合 Hodge 構造に関して E_λ 多項式を取るという意味であり，従って一旦モチビック近接ファイバーが分かれば，あとはそれを構成する各代数多様体の Deligne の混合 Hodge 構造を計算することで $E_\lambda(u,v)$ が計算できる．この概念は元々Denef-Loser [5], [6] において弧空間の理論を用いて抽象的に定義されたものであるが，ここでは Guibert-Loeser-Merle [8] により定義を拡張したものを具体的に表示する形で紹介する．

$\mathbb{C}$ 上の代数多様体 S に対し，S 上の代数多様体の Grothendieck 環を $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_S)$ と表し，S 上の代数多様体 $V \longrightarrow S$ で代表される $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_S)$ の元を $[V \longrightarrow S]$ と書く．$\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_S)$ を $\mathbb{L} := [S \times \mathbb{C}^n]$ で局所化したもの $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_S)[\mathbb{L}^{-1}]$ を $\mathcal{M}_S$ と書く．一点から成る多様体 $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ で代表される $\mathcal{M}_S$ の元を 1 で表す．さらにこれを作用付きで考えたものを次のように定義する．$d \in \mathbb{Z}$ に対して μ^d で 1 の d 乗根よりなる群を表し，それらの射影極限 $\varprojlim_d \mu_d$ を $\hat{\mu}$ と書く．以下で登場する $\hat{\mu}$ の代数多様体上の作用は，全てある有限群 μ_d の作用から誘導された $\hat{\mu}$ の作用であるとする．また，代数多様体上の $\hat{\mu}$ 作用が**良い**とは各 $\hat{\mu}$ 軌道があるアファイン開集合に含まれている事であるとする．$\mathbb{C}$ 上の代数多様体 S に対して S 上の良い $\hat{\mu}$ 作用を持つ代数多様体の Grothendieck 環を $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_S^{\hat{\mu}})$ で表す．さらに，$Y \in \mathrm{Var}_S^{\hat{\mu}}$ に対し，Y 上の $\hat{\mu}$ 作用を延長した $Y \times \mathbb{C}^n$ 上の $\hat{\mu}$ の延長で，各 $y \in Y$ に対して $\{y\} \times \mathbb{C}^n$ のアファイン作用を誘導するようなものを考える．このような $Y \times \mathbb{C}^n$ 上の $\hat{\mu}$ 作用を持つ $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_S^{\hat{\mu}})$ の元を全て同一視し，さらに $\mathbb{L} := [\mathbb{C} \times S]$ で表される $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_S^{\hat{\mu}})$ の元（$\hat{\mu}$ 作用は自明なもの）で $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_S^{\hat{\mu}})$ を局所化したものを $\mathcal{M}_S^{\hat{\mu}}$ と表す．

Z を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな代数多様体，$U \subset Z$ を Z の Zariski 開集合で $D := Z \setminus U$ が正規交叉因子になるようなものとする．$f\colon Z \longrightarrow \mathbb{C}$ を正則写像で $f^{-1}(0) \subset D$ となるものとする．$\Omega := \mathrm{Int}(U \cup f^{-1}(0))$ とし，正規交叉因子 $\Omega \cap f^{-1}(0)$ の既約分解を $E_1 \cup E_2 \cdots \cup E_k$ と表す．各 $1 \leq i \leq k$ に対して既約因子 E_i に沿った f の零の次数を $b_i > 0$ とする．任意の空でない部分集合 $I \subset \{1,\ldots,k\}$ に対して，

$$E_I := \bigcap_{i\in I} E_i, \quad E_I^\circ := E_I \setminus \bigcup_{i\notin I} E_i,$$

さらに $d_I = \gcd(b_i)_{i\in I}$ と定める．$I \subset \{1,\ldots,k\}$ を一つ固定する．各点 $p \in E_I^\circ$ に対し，p の $\Omega \setminus \cup_{i\notin I} E_i$ の中でのアファイン近傍 W と各 $i \in I$ に対して W 上の正則関数 ξ_i で $E_i \cap W = \{\xi_i = 0\}$ なるようなものをとる．W 上の正則関数を $f_{1,W} := f\prod_{i\in I}\xi_i^{-b_i}$, $f_{2,W} := \prod_{i\in I}\xi_i^{b_i/d_I}$ と定めると，W 上で $f = f_{1,W}(f_{2,W})^{d_I}$ が成立する．そして，$W \cap E_I^\circ$ の d_I 重被覆を

$$\widetilde{E_{I,W}^\circ} = \{(t,z) \in \mathbb{C}^* \times (E_I^\circ \cap W) \mid t^{d_I} = (f_{1,W})^{-1}(z)\}$$

で定義する．さらに μ_{d_I} の生成元 ζ_{d_I} に対して $(t,z) \longmapsto (t, \zeta_{d_I} z)$ という写像を考えることで $E_{I,W}^\circ$ に良い $\hat{\mu}$ 作用が定義される．各 $p \in E_I^\circ$ ごとにこのような被覆を構成し，それを貼り合わせることで E_I° 上の被覆 $\widetilde{E_I^\circ}$ が構成できる．これは良い $\hat{\mu}$ 作用を持ち，$[\widetilde{E_I^\circ}]$ で表される $\mathcal{M}_{f^{-1}(0)}^{\hat{\mu}}$ の元を定義する．そして，$\mathcal{M}_{f^{-1}(0)}^{\hat{\mu}}$ の元 $\mathcal{S}_{f,U}$ を $\mathcal{S}_{f,U} := \sum_{I\neq\emptyset}(1-\mathbb{L})^{|I|-1}\cdot[\widetilde{E_I^\circ}] \in \mathcal{M}_{f^{-1}(0)}^{\hat{\mu}}$ と定義する．

定理 3.1. ([8]) X を $\mathbb{C}$ 上の代数多様体，$g\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ を X 上の正則写像とする．このとき，群準同型

$$\psi_g\colon \mathcal{M}_X \longrightarrow \mathcal{M}_{g^{-1}(0)}^{\hat{\mu}}$$

が定義され，次の性質を満たす：任意の固有写像 $\pi\colon Z \longrightarrow X$ と Z の Zariski 開集合 U で，$D := Z \setminus U$ は Z の正規交叉因子であり $(g \circ \pi)^{-1}(0)$ を含むようなものに対して $\mathcal{M}^{\hat{\mu}}_{g^{-1}(0)}$ 上で

$$\psi_g([U \longrightarrow X]) = (\pi|_{(g\circ\pi)^{-1}(0)})_!(\mathcal{S}_{g\circ\pi,U})$$

となる．ただし，$(\pi|_{(g\circ\pi)^{-1}(0)})_!$ は自然な準同型

$$(\pi|_{(g\circ\pi)^{-1}(0)})_! \colon \mathcal{M}^{\hat{\mu}}_{(g\circ\pi)^{-1}(0)} \longrightarrow \mathcal{M}^{\hat{\mu}}_{g^{-1}(0)}$$

を表す．

定義 3.2. 定理 3.1 の状況で，$[Y \longrightarrow X] \in \mathcal{M}_X$ に対して $\psi_g([Y]) := \psi_g([Y \longrightarrow X]) \in \mathcal{M}^{\hat{\mu}}_{g^{-1}(0)}$ を Y の g による**モチビック近接ファイバー**と呼ぶ．

注意 3.3. 定理 3.1 の状況で，$\psi_g([X \longrightarrow X]) \in \mathcal{M}^{\hat{\mu}}_{g^{-1}(0)} = \mathcal{S}_{g,X}$ は Denef-Loser [5], [6] で定義されている**モチビック Milnor ファイバー**と呼ばれるものになっている．

次にモチビック近接ファイバーの Hodge 実現について述べる．$\mathbb{C}$ 上の代数多様体 X に対して，MHM_X で X 上の混合 Hodge 加群のアーベル圏を表す．準同型 $H_X\colon \mathcal{M}_X \longrightarrow \mathrm{K}_0(\mathrm{MHM}_X)$ で，任意の滑らかな代数多様体 Z と射 $\pi\colon Z \longrightarrow X$ に対して

$$H_X([Z \longrightarrow X]) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j [H^j R\pi_!(\mathbb{Q}_Z)]$$

が成り立つようなものが存在する．ここで $\mathbb{Q}_Z$ は Z 上の自明な Hodge 加群を表す．さらに，$\mathrm{MHM}^{\mathrm{mon}}_X$ で有限な自己同型を持つ混合 Hodge 加群のアーベル圏を表すと，同様に準同型 $H_X\colon \mathcal{M}^{\hat{\mu}}_X \longrightarrow \mathrm{K}_0(\mathrm{MHM}^{\mathrm{mon}}_X)$ が定義される．特に $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ の場合には，$\mathrm{MHM}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{C})}$ は偏極可能な混合 Hodge 構造の圏 SHM^p であり，$\mathbb{C}$ 上の代数多様体 Y に対し，$H_X([Y \longrightarrow X])$ は各コンパクト台付きコホモロジー群 $H^j_c(Y;\mathbb{Q})$ の Deligne の混合 Hodge 構造の交代和

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j [H^j_c(Y;\mathbb{Q})] \in \mathrm{K}_0(\mathrm{SHM}^p)$$

となる．また，Hodge 加群の近接サイクル函手 ψ_g より誘導される準同型 $\Psi_g\colon \mathrm{K}_0(\mathrm{MHM}_X) \longrightarrow \mathrm{K}_0(\mathrm{MHM}^{\mathrm{mon}}_{g^{-1}(0)})$ を $M \in \mathrm{MHM}_X$ に対して，$\sum_j (-1)^j [H^j(\psi_g M)] \in \mathrm{K}_0(\mathrm{MHM}^{\mathrm{mon}}_{g^{-1}(0)})$ で定義する．以下の定理が“モチビック近接ファイバー”の名称を正当化する．この定理は，Hodge 加群の近接サイクル函手の理論を用いた深い議論によって示される．

定理 3.4. ([8]) 定理 3.1 の状況で，以下の図式は可換になる：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_X \arrow[r, "\psi_g"] \arrow[d, "H_X"'] & \mathcal{M}^{\hat{\mu}}_{g^{-1}(0)} \arrow[d, "H^{\mathrm{mon}}_{g^{-1}(0)}"] \\
\mathrm{K}_0(\mathrm{MHM}_X) \arrow[r, "\Psi_g"'] & \mathrm{K}_0(\mathrm{MHM}^{\mathrm{mon}}_{g^{-1}(0)}).
\end{tikzcd}$$

特に，$X = \mathbb{C}$, $g = t\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ の場合を考える．ここで t は $\mathbb{C}$ の座標関数を表す．$f\colon (\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 上の多項式写像とする．2 章で述べたように十分小さい $t \in \mathbb{C}^*$ に対して，$H^j_c(f^{-1}(t);\mathbb{Q})$ には極限混合 Hodge 構造と呼ばれる混合 Hodge 構造が入る．$\mathcal{M}_X$ の元 $[f\colon (\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow \mathbb{C}] \in \mathcal{M}_X$ に $\Psi_g \circ H_X$ を施すと，$\sum_j (-1)^j [H^j(\psi_t(Rf_!\mathbb{Q}_{(\mathbb{C}^*)^n}))] =$

$\sum_j (-1)^j [H_c^j(f^{-1}(t);\mathbb{Q})] \in \mathrm{K}_0(\mathrm{SHM}^{\mathrm{mon}})$ となる．ここで $[H_c^j(f^{-1}(t);\mathbb{Q})]$ には極限混合Hodge構造が入っている．したがって，この最後の式の作用付きの混合Hodge構造としての E_λ 多項式をとると，それはまさしく2章で定義した二変数極限 E_λ 多項式と一致している．よって極限 E_λ 多項式を計算するためには $\psi_t([(\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow \mathbb{C}]) \in \mathcal{M}^{\hat{\mu}}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{C})}$ を計算すればよいことになる．

3.2 モチビック近接ファイバーの計算

次にモチビック近接ファイバーの計算公式を述べる．$f(t,x) = \sum_{v\in\mathbb{Z}^n} a_v(t)x^v \in \mathbb{C}(t)[x_1^{\pm},\ldots,x_n^{\pm}]$ $(a_v(t) \in \mathbb{C}(t))$ を n 変数 $\mathbb{C}(t)$ 係数のLaurent多項式とする．$a_v(t)$ の $0 \in \mathbb{C}$ の近くでのLaurent展開を $a_v(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{v,j}t^j$ $(a_{v,j} \in \mathbb{C})$ とし，$o(v) := \mathrm{ord}_t\, a_v(t) = \min\{j \mid a_{v,j} \neq 0\}$ と定める．ただし $a_v(t) = 0$ のときは $o(v) = +\infty$ と定める．このとき，$\mathbb{R}^{n+1}$ 内の多面集合 UH_f を

$$\mathrm{UH}_f := \mathrm{Conv}\left[\bigcup_{v\in\mathbb{Z}^n}\{(v,s)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid s \geq o(v)\}\right] \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

と定める．ここで $\mathrm{Conv}(*)$ は凸包を表す．$\mathbb{R}^{n+1}$ から $\mathbb{R}^n$ への射影を $p\colon \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ と表し，$\mathbb{R}^n$ 内の多面体を $P := p(\mathrm{UH}_f)$ で定義する．以下では $\dim P = n$ を常に仮定しておく．UH_f のコンパクトな面 $\widetilde{F}$ に対し，その射影 $p(\widetilde{F})$ は P に含まれる多面体であり，全ての UH_f のコンパクトな面の射影を考えることで，P の多面体としての細分 $\mathcal{S}$ が定義される．また，UH_f の境界 $\partial\mathrm{UH}_f$ は P 上の $\mathbb{R}$ 値関数 $\nu_f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ を定め，その関数の各 $F \in \mathcal{S}$ 上への制限はアファイン写像である．各 $F \in \mathcal{S}$ に対して，対応する UH_f の面を $\widetilde{F}$ とするとき，$\mathbb{C}$ 係数のLaurent多項式 $I_f^F(x) \in \mathbb{C}[x_1^{\pm},\ldots,x_n^{\pm}]$ を

$$I_f^F(x) = \sum_{(v,j)\in\widetilde{F}} a_{v,j}x^v \in \mathbb{C}[x_1^{\pm},\ldots,x_n^{\pm}]$$

で定める．$\mathrm{Aff}(F)$ で F が生成するアファイン部分空間を表す．必要なら $\mathrm{Aff}(F)\cap\mathbb{Z}^n$ を適当に平行移動して群とみなしておき，$\mathbb{C}[\mathrm{Aff}(F)\cap\mathbb{Z}^n]$ でそれが生成する $\mathbb{C}$ 代数を表す．$I_f^F(x) \in \mathbb{C}[\mathrm{Aff}(F)\cap\mathbb{Z}^n]$ とみなせるため，$I_f^F(x)$ は $\dim F$ 次元代数的トーラス $T_F := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathrm{Aff}(F)\cap\mathbb{Z}^n]) \simeq (\mathbb{C}^*)^{\dim F}$ 上の正則関数とみなすことができる．T_F 内の超曲面 $V_F \subset T_F$ を正則関数 $I_f^F(x)$ の零点集合として定義する．$\mathrm{Aff}(F)$ 上の線形写像 $\nu_F\colon \mathrm{Aff}(F) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\nu_f|_F$ の延長として定義する．$\mathrm{Aff}(F)\cap\mathbb{Z}^n$ から $\mathbb{C}^*$ への群準同型を

$$e_F(v) := \exp(-2\pi\sqrt{-1}\nu_F(v)) \quad (v \in \mathrm{Aff}(F)\cap\mathbb{Z}^n)$$

と定義する．これは，$T_F = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathrm{Aff}(F)\cap\mathbb{Z}^n]) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{group}}(\mathrm{Aff}(F)\cap\mathbb{Z}^n, \mathbb{C}^*)$ の点を定める．そこで，T_F 上に e_F との積をとる自己同型が定義できる．すぐに確かめられるように，これは V_F 上の自己同型を誘導する．これによって V_F に $\hat{\mu}$ 作用が定義され，$\mathcal{M}^{\hat{\mu}}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{C})}$ の元 $[V_F \circlearrowleft \hat{\mu}]$ が定まる．

1章で述べたように，$f(t,x)$ が定義する $\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^*)^n$ 内の超曲面を Y で表す．射影 $\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow \mathbb{C}^*$ の Y への制限 $Y \longrightarrow \mathbb{C}^*$ を $\pi_Y\colon Y \longrightarrow \mathbb{C}^*$ と表す．十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して，π_Y は穴あき円盤 $B(0,\varepsilon)^*$ 上の $(\mathbb{C}^*)^n$ 内の超曲面の族を定義する．

定義 3.5. 超曲面の族 Y がschönであるとは，任意の $F \in \mathcal{S}$ に対して T_F 内の超曲面 $V_F \subset T_F$ が滑らかかつ被約であることである．

t で $\mathbb{C}$ の座標関数 $t\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ を表す．次のモチビック近接ファイバーの公式は，最初に Stapledon が証明した．

定理 3.6. ([11],[10]) Y が schön であるとする．このとき，$\mathcal{M}^{\hat{\mu}}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{C})}$ において

$$\psi_t([Y \longrightarrow \mathbb{C}]) = \sum_{\mathrm{rel.int}F \subset \mathrm{Int}P} [V_F \circlearrowright \hat{\mu}] \cdot (1-\mathbb{L})^{n-\dim F}$$

が成立する．

先述したように我々はこの定理の証明の簡略化を与えた．定理 3.1 を使用するために，射影 π_Y の固有射への拡張を得るため，UH_f の双対扇の滑らかな細分に対応するトーリック多様体を考える．この中で Y の閉包上に π_Y は固有射として拡張できる．これを用いて定理 3.1 に従い $\psi_t([Y \longrightarrow \mathbb{C}])$ を具体的に計算していくことで定理 3.6 の右辺が得られる．

定理 3.4 とその下の注意に従うと，定理 3.6 の右辺の Deligne の混合 Hodge 構造に関する E_λ 多項式をとると，それは $(\mathbb{C}^*)^n$ の超曲面の族に対する二変数極限 E_λ 多項式である．その為には各 $F \in \mathcal{S}$ に対する $[V_F \circlearrowright \hat{\mu}]$ の Hodge 実現を計算すればよい．作用を無視した場合，代数的トーラスの非退化な超曲面の（Deligne の混合 Hodge 構造に関する）混合 Hodge 数，特に E 多項式は Danilov-Khovanskii [4] のアルゴリズムによって完全に計算可能である．このアルゴリズムの拡張として，Batylev-Borisov [1] において E 多項式の閉じた公式が作られており，その結果を基にして Katz と Stapledon は [9], [11] において Ehrhart 理論における多項式を利用し，多面集合 UH_f から定まるいくつかの多項式：$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$l_P(\mathcal{S};F;t) \in \mathbb{Z}[t]$, $h^*_\lambda(P;\nu_f;u) \in \mathbb{Z}[u]$, $l^*_\lambda(P;\nu_f;u) \in \mathbb{Z}[u]$, $h^*_\lambda(P,\nu_f;u,v) \in \mathbb{Z}[u,v]$, $l^*_\lambda(P;\nu_f;u,v) \in \mathbb{Z}[u,v]$, $h^*_\lambda(P,\nu_f;u,v) \in \mathbb{Z}[u,v,w]$ 等を定義した．定義の詳細は [11], [10] を見よ．これらは完全に UH_f の情報のみから決定され，与えられた f に対して具体的に計算可能であることに注意せよ．これらの多項式の組み合わせ論的性質を駆使した計算を行う事により，定理 3.6 の右辺の Hodge 実現として得られる二変数極限 E_λ 多項式はこれらの多項式の組み合わせで表示できる．さらに Batylev-Borisov [1] や Borisov-Mavlyutov [2] で用いられた交叉コホモロジーのウェイトに関する純性を利用した計算方法を適用することにより，三変数極限 E_λ 多項式について以下のように記述できる．

定理 3.7. ([11]) Y は schön であるとする．$\lambda \in \mathbb{C}^*$ に対し，

$$uvw^2 E_\lambda(Y_t;u,v,w) = \varepsilon(\lambda) \cdot (uvw^2-1)^n + (-1)^{n-1} h^*_\lambda(P,\nu_f;u,v,w) \tag{3.1}$$

が成立する．ただし，$\varepsilon(\lambda) \in \{0,1\}$ を

$$\varepsilon(\lambda) = \begin{cases} 1 & (\lambda = 1) \\ 0 & (\lambda = 0) \end{cases}$$

とおいた．

4 モノドロミー自己同型の計算

4.1 $(\mathbb{C}^*)^n$ 内の超曲面の族の場合

$f(t,x) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^n} a_v(t) x^v \in \mathbb{C}(t)[x_1^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}]$ $(a_v(t) \in \mathbb{C}(t))$ を n 変数 $\mathbb{C}(t)$ 係数の Laurent 多項式とし，$f(t,x)$ が定義する $(\mathbb{C}^*)^n$ 内の超曲面の族 $Y \subset (\mathbb{C}^*) \times (\mathbb{C}^*)^n$ は schön とする．定

理 3.7 によって三変数極限 E_λ 多項式は計算できたので，次はこの結果を用いて 1 章で定義したモノドロミー自己同型 $\Phi_j\colon H_c^j(Y_t;\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H_c^j(Y_t;\mathbb{C})$ を計算する．2 章で述べたように，極限 E_λ 多項式からモノドロミー自己同型 Φ_j の Jordan 標準形の情報を引き出す為には，三変数 E_λ 多項式の w の次数が集中している事と，$H_c^j(Y_t;\mathbb{C})_\lambda$ が一つの次数以外の次数で消えている事，の二つの条件が必要なのであった．一般には全ての固有値 $\lambda \in \mathbb{C}^*$ に対してこのような条件が成立していることは期待できないため，この条件が成り立つ一つの十分条件を与える固有値の集合 R_f を以下のように定義する．各 $F \in \mathcal{S}$ に対して，

$$m_F := [\nu_F(\mathrm{Aff}(F) \cap \mathbb{Z}^n) : \nu_F(\mathrm{Aff}(F) \cap \mathbb{Z}^n) \cap \mathbb{Z}] > 0$$

と定め，$\mathbb{C}$ の有限部分集合 R_f を

$$R_f := \bigcup_{\substack{F \in \mathcal{S} \\ F \subset \partial P}} \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda^{m_F} = 1\} \subset \mathbb{C}$$

と定義する．式 (3.1) の右辺を具体的に計算することにより次を得る．

定理 4.1. ([11], [10]) $(\mathbb{C}^*)^n$ 内の超曲面の族 Y は schön であるとする．この時，任意の $\lambda \notin R_f$ に対して三変数極限 E_λ 多項式における w の次数は $n-1$ に集中している．具体的には

$$E_\lambda(Y_t; u, v, w) = (-1)^{n-1}\frac{w^{n-1}}{uv} l_\lambda^*(P, \nu_f; u, v)$$

が成立する．

次に $H_\lambda^j(Y_t;\mathbb{C})$ の非自明な次数について調べる．

命題 4.2. Y は schön であるとする．この時，十分小さい $t \in \mathbb{C}^*$ に対して

$$H_c^j(Y_t;\mathbb{C}) \simeq 0 \quad (j < n-1)$$

が成立し，さらに包含写像 $Y_t \hookrightarrow (\mathbb{C}^*)^n$ の誘導する Gysin 準同型

$$H_c^j(Y_t;\mathbb{C}) \longrightarrow H_c^{j+2}((\mathbb{C}^*)^n;\mathbb{C})$$

は $j > n-1$ の時同型になり，$j = n-1$ の時全射になる．さらにこの同型を用いると，$j > n-1$ の時モノドロミー自己同型 $\Phi_j\colon H_c^j(Y_t;\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H_c^j(Y_t;\mathbb{C})$ は恒等写像になる．

この命題 4.2 により $\lambda \neq 1$ に対しては $H_c^j(Y_t;\mathbb{C})_\lambda = 0$ $(j \neq n-1)$ となる．定理 4.1 と命題 4.2 を合わせることで，2 章で述べたように三変数極限 E_λ 多項式から Φ_{n-1} の Jordan 標準形の固有値 λ に関する部分の情報を復元することができる．具体的には，Φ_{n-1} の Jordan 標準形の固有値 λ に関する大きさ m の Jordan 細胞の個数を $J_{\lambda,m}$ と書くとき，式 (3.1) を用いることで，$J_{\lambda,m}$ は次のような式で表現される．

定理 4.3. Y は schön であるとする．この時，$\lambda \notin R_f$ に対し，一変数多項式環 $\mathbb{Z}[s]$ における等式として，

$$\sum_{m=0}^{n-1} J_{\lambda,n-m} s^{m+2} = \sum_{F \in \mathcal{S}} s^{\dim F} l_\lambda^*(F, \nu_f|_F; 1) \cdot \widetilde{l}_P(\mathcal{S}, F; s^2)$$

が成立する．ここで多項式 $\widetilde{l}_P(\mathcal{S}, F; t)$ は多項式 $l_P(\mathcal{S}, F; t)$ の各項の係数を用いて定義される $\mathbb{Z}$ 係数の多項式である（[10] を見よ）．

この計算を行うために重要な役割を果たした定理 4.1 であるが，元々の証明は式 (3.1) の計算を具体的に実行すると三変数極限 E_λ 多項式の w に関する次数が集中しているというものであり，幾何学的な証明であるとは言い難い．以下でこの定理 4.1 の幾何学的な意味づけを考える．$\pi\colon Y \longrightarrow \mathbb{C}^*$ を射影，$j\colon \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ を包含写像とする．$\mathbb{C}_Y$ で Y 上の $\mathbb{C}$ 係数の定数層を，$R\pi_*$, $R\pi_!$ で π の導来順像と導来固有順像函手を表す．$\mathbb{C}$ 上の座標関数 t と $\lambda \in \mathbb{C}^*$ に対し，$\psi_{t,\lambda}$ で固有値 λ に関する近接サイクル函手を表す．

定理 4.4. ([10]) $(\mathbb{C}^*)^n$ 内の代数多様体の族 Y は schön であるとする．この時，任意の $\lambda \notin R_f$ に対して自然な射 $R\pi_!\mathbb{C}_Y \longrightarrow R\pi_*\mathbb{C}_Y$ の誘導する射

$$\psi_{t,\lambda}(j_!R\pi_!\mathbb{C}_Y) \longrightarrow \psi_{t,\lambda}(j_!R\pi_*\mathbb{C}_Y)$$

は同型写像である．

この定理は混合 Hodge 加群の理論における近接サイクル函手の原始分解定理と呼ばれるものを利用して示され，定理 3.1 の計算結果を用いずに証明される事に注意しておく．任意の $j \in \mathbb{Z}$ と十分小さい $t \in \mathbb{C}^*$ に対して，

$$H^j\psi_{t,\lambda}(j_!R\pi_!\mathbb{C}_Y) \simeq H_c^j(Y_t;\mathbb{C})$$
$$H^j\psi_{t,\lambda}(j_!R\pi_*\mathbb{C}_Y) \simeq H^j(Y_t;\mathbb{C})$$

である．従って定理 4.4 によると，$\lambda \notin R_f$ に対し，

$$H_c^j(Y_t;\mathbb{C})_\lambda \xrightarrow{\sim} H^j(Y_t;\mathbb{C})_\lambda \quad (j \in \mathbb{Z}) \tag{4.1}$$

は同型になる．Y_t は $n-1$ 次元の滑らかなアファイン多様体であるから $H^j(Y_t;\mathbb{C}) = 0$ $(j > n-1)$ が成立する．従って命題 4.2 と合わせることで $\lambda \notin R_f$ に対し，

$$H_c^j(Y_t;\mathbb{C})_\lambda \simeq 0 \quad (j \neq n-1)$$

が成立する．さらに，よく知られているように $H_c^{n-1}(Y_t;\mathbb{C})$ の Deligne のウェイトフィルトレーションに関する次数付き商 $\mathrm{Gr}_r^W H_c^{n-1}(Y_t;\mathbb{C})$ は r が n 以上の時に消えており，他方 $\mathrm{Gr}_r^W H^{n-1}(Y_t;\mathbb{C})$ は r が $n-2$ 以下の時に消えている．従って同型 (4.1) より $\lambda \notin R_f$ に対し，

$$\mathrm{Gr}_r^W H_c^{n-1}(Y_t;\mathbb{C})_\lambda \simeq 0 \quad (r \neq n-1)$$

となっているから，定理 4.1 の三変数極限 E_λ 多項式の w に関する次数の集中に関する主張の幾何学的な別証明が得られた．

4.2 $\mathbb{C}^n$ 内の超曲面の族の場合

$f(t,x) = \sum_{v\in\mathbb{Z}^n} a_v(t)x^v \in \mathbb{C}(t)[x_1,\dots,x_n]$ $(a_v(t) \in \mathbb{C}(t))$ を n 変数 $\mathbb{C}(t)$ 係数の多項式とする．4.1 節の場合とまったく同様に $\mathrm{UH}_f, P, \nu_f, \mathcal{S}$ や schön 性を定義する．以下 $f(t,x)$ が定義する $\mathbb{C}^n$ 内の超曲面の族 $Y \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$ は schön とする．部分集合 $I \subset \{1,\dots,n\}$（空集合も許す）に対して，

$$T^I := \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_i = 0\ (i \notin I), x_i \neq 0\ (i \in I)\} \simeq (\mathbb{C}^*)^{|I|}$$

と定義する．すると，$\mathbb{C}^n = \bigsqcup_{I\subset\{1,\dots,n\}} T^I$ という $\mathbb{C}^n$ の分解を得る．また，$I \subset \{1,\dots,n\}$ に対して $f_I \in \mathbb{C}(t)[(x_i)_{i\in I}]$ を f の各 x_i $(i \notin I)$ に 0 を代入してできる $|I|$ 変数の多項式とす

る．このとき f_I は T^I 内の超曲面の族 Y^I を定める．Y^I も schön になることに注意する．Y の三変数極限 E_λ 多項式は，$\mathbb{C}^n$ の T^I らの分解に従って

$$E_\lambda(Y_t;u,v,w)=\sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}}E_\lambda(Y_t^I;u,v,w) \tag{4.2}$$

と分解することができる．定理 3.7 によって schön な代数的トーラス内の超曲面の族に対する三変数極限 E_λ 多項式は計算することができたので，式 (4.2) の右辺に定理 3.7 を適用することで $E_\lambda(Y_t;u,v,w)$ も UH_f から定まる多項式を用いることで計算可能である．

4.1 節の場合と同様，$E_\lambda(Y_t;u,v,w)$ からモノドロミー自己同型 Φ_j の Jordan 標準形の情報を復元するためには $E_\lambda(Y_t;u,v,w)$ の w に関する次数が集中している事と，$H_c^j(Y_t;\mathbb{C})_\lambda$ の非自明な次数が一か所のみである事が必要である．

∂P の部分集合 P_∞ を $P_\infty:=\overline{\partial P\cap \mathrm{Int}\mathbb{R}_+^n}\subset\partial P$ で定義する．そして，$R_f\subset\mathbb{C}$ を

$$R_f:=\bigcup_{\substack{F\in\mathcal{S}\\ F\subset P_\infty}}\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\lambda^{m_F}=1\}\subset\mathbb{C}$$

で定義する．$\mathbb{C}^n$ 内の超曲面の族に対しても，定理 4.1 に相当する定理が成立する．

定理 4.5. ([10]）$\mathbb{C}^n$ 内の超曲面の族 Y は schön であるとする．この時，任意の $\lambda\notin R_f$ に対して三変数極限 E_λ 多項式における w の次数は $n-1$ に集中している．具体的には

$$E_\lambda(Y_t;u,v,w)=(-1)^{n-1}\frac{w^{n-1}}{uv}l_\lambda^*(P,\nu_f;u,v)$$

が成立する．

次に $H_c^j(Y_t;\mathbb{C})_\lambda$ の非自明な次数が一か所のみであるような λ について考える．

定義 4.6. $f(t,x)$ がコンビニエントであるとは，任意の $\mathbb{R}^n$ のいくつかの座標軸で生成される部分空間 $H\subset\mathbb{R}^n$ に対して，$\mathrm{dim}P\cap H=\mathrm{dim}H$ となる事である．

特に P は $\mathbb{R}^n$ の原点を含んでいる．f がこの性質を満たしている場合には，次の命題が示すように 1 でない λ に対しては $H_c^j(Y_t;\mathbb{C})_\lambda$ の非自明な次数は一か所のみである．

命題 4.7. $\mathbb{C}^n$ 内の超曲面の族 Y は schön であり，さらに f はコンビニエントであるとする．この時，十分小さい $t\in\mathbb{C}^*$ に対して

$$H_c^j(Y_t;\mathbb{C})\simeq 0\quad(j<n-1)$$

が成立し，さらに包含写像 $Y_t\hookrightarrow\mathbb{C}^n$ の誘導するギシン準同型

$$H_c^j(Y_t;\mathbb{C})\longrightarrow H_c^{j+2}(\mathbb{C}^n;\mathbb{C})$$

は $j>n-1$ の時同型になり，$j=n-1$ の時全射になる．さらにこの同型を用いると，$j>n-1$ の時モノドロミー自己同型 $\Phi_j\colon H_c^j(Y_t;\mathbb{C})\xrightarrow{\sim}H_c^j(Y_t;\mathbb{C})$ は恒等写像になる．

この命題により f がコンビニエントならば特に $H_c^j(Y_t;\mathbb{C})\simeq 0$ $(j=n-1,2(n-1))$ が成立し，$\lambda\neq 1$ に対して $H_c^j(Y_t;\mathbb{C})_\lambda=0$ $(j\neq n-1)$ が成立する．故に定理 4.5 と合わせれば Φ_{n-1} の Jordan 標準形の固有値 $\lambda\notin R_f$ に関する部分の情報が三変数極限 $E_\lambda(Y_t;u,v,w)$ を用いて具体的に計算することができる．

f がコンビニエントという条件は幾分強いものであり例えば例 1.1 のような状況の場合，f が schön かつコンビニエントを仮定すると，中心のファイバー $g^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^n$ は原点 $0 \in \mathbb{C}^n$ を高々孤立特異点に持つ．中心のファイバーが孤立していないような特異点を持つ場合も扱えるようにするために，このコンビニエントという条件を外す．鍵となるのは定理 4.4 の型の定理である．

$\mathbb{R}^n_+$ の第一象限の面 $\sigma \prec \mathbb{R}^n_+$ で $(P \setminus P_\infty) \cap \sigma \neq \emptyset$ となるようなものを全て集め，各 σ の双対推のなす扇に対応したトーリック多様体 Ω_0 は $\mathbb{C}^n$ の Zariski 開集合になっている（ただし，一般にこれはアファインであるとは限らない）．$Y^\circ := Y \cap (\mathbb{C}^* \times \Omega_0) \subset \mathbb{C}^* \times \Omega_0$ と定め，$\pi^\circ \colon Y^\circ \longrightarrow \mathbb{C}^*$ を射影とする．4.1 節と同様に，$\pi \colon Y \longrightarrow \mathbb{C}^*$ を射影，$j \colon \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ を包含写像，$\mathbb{C}_Y$, $\mathbb{C}_{Y^\circ}$ はそれぞれ Y, Y° 上の係数が $\mathbb{C}$ の定数層とする．この時，次のような定理 4.4 の型の定理を得る．以下の定理ではコンビニエントという条件は課していない事に注意せよ．

定理 4.8. ([10]) $\mathbb{C}^n$ 内の代数多様体の族 Y は schön であるとする．任意の $\lambda \notin R_f$ に対して $\mathbb{C}_{Y^\circ} \longrightarrow \mathbb{C}_Y$ の誘導する射

$$\psi_{t,\lambda}(j_! R\pi_! \mathbb{C}_{Y^\circ}) \longrightarrow \psi_{t,\lambda}(j_! R\pi_! \mathbb{C}_Y)$$

は同型写像である．さらに，自然な射 $R(\pi^\circ)_! \mathbb{C}_{Y^\circ} \longrightarrow R(\pi^\circ)_* \mathbb{C}_{Y^\circ}$ の誘導する射

$$\psi_{t,\lambda}(j_! R(\pi^\circ)_! \mathbb{C}_{Y^\circ}) \longrightarrow \psi_{t,\lambda}(j_! (\pi^\circ)_* \mathbb{C}_{Y^\circ})$$

は同型写像である．

この定理 4.8 によって，$\lambda \notin R_f$ に対して

$$H^j_c(Y^\circ_t; \mathbb{C})_\lambda \xrightarrow{\sim} H^j_c(Y_t; \mathbb{C})_\lambda \tag{4.3}$$

及び

$$H^j_c(Y^\circ_t; \mathbb{C})_\lambda \xrightarrow{\sim} H^j(Y^\circ_t; \mathbb{C})_\lambda \tag{4.4}$$

は同型になる．この同型 (4.4) を用いると，定理 4.4 の下の議論と同様にして

$$\mathrm{Gr}^W_r H^j_c(Y^\circ_t; \mathbb{C})_\lambda = 0 \quad (r \neq j)$$

が分かる．これと定理 4.5 の三変数極限 E_λ 多項式の w に関する次数の集中を用いれば，

$$H^j_c(Y^\circ_t; \mathbb{C})_\lambda \quad (j \neq n-1)$$

が得られる．よって，同型 (4.3) より

$$H^j_c(Y_t; \mathbb{C})_\lambda \simeq 0 \quad (j \neq n-1)$$

が成立する．この結果と定理 4.5 を合わせれば，$\lambda \notin R_f$ に対して 4.1 節のように三変数極限 E_λ 多項式からモノドロミー自己同型 Φ_{n-1} の Jordan 標準形の固有値 λ に関する各大きさの Jordan 細胞の個数を UH_f で決定される多項式を用いて具体的に記述することができる．

4.3 $(\mathbb{C}^*)^n$ 及び $\mathbb{C}^n$ 内の完全交叉多様体の族の場合

ここまでの結果は全て完全交叉多様体の族の場合に拡張することができる．$f_1(t,x),\dots,f_k(t,x)\in\mathbb{C}(t)[x_1^{\pm},\dots,x_n^{\pm}]$ (resp. $f_1(t,x),\dots,f_k(t,x)\in\mathbb{C}(t)[x_1,\dots,x_n]$) を $\mathbb{C}(t)$ 係数の n 変数 Laurent 多項式（resp. 多項式）の有限個の族とする．このとき，十分小さい $\varepsilon\in\mathbb{C}^*$ に対して，$B(0,\epsilon)^*\times(\mathbb{C}^*)^n$ (resp. $B(0,\epsilon)^*\times\mathbb{C}^n$) 内の $f_i(t,x)$ $(1\le i\le k)$ らの共通零点 Y は適切な条件下で $(\mathbb{C}^*)^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) 内の完全交叉多様体の族を定める．超曲面の族の場合と同様，十分小さい $t\in\mathbb{C}^*$ に対して Y_t をその t におけるファイバーを表し，そのコンパクト台付きコホモロジー群上のモノドロミー自己同型 $\Phi_j\colon H_c^j(Y_t;\mathbb{C})\xrightarrow{\sim}H_c^j(Y_t;\mathbb{C})$ を定めることができる．各極限 E_λ 多項式等は超曲面の場合と全く同様に定義される．

この場合も超曲面の族に対して定義された UH_f に相当するものが定義され，schön という性質を定義することができる．この条件の下でまず極限 E_λ 多項式を計算する．この為には Danilov-Khovanskii [4] において用いられた Cayley トリックと呼ばれる手法を多項式の族の場合に応用し極限 E_λ 多項式をいくつかの超曲面の族に対する極限 E_λ 多項式を用いて表現し，定理 3.7 に帰着させるという方法を用いる．これによって，各 $f_i(t,x)$ に対する多面集合 UH_{f_i} の組み合わせ論的な情報のみから計算できる多項式を用いて完全交叉多様体の族に対する極限 E_λ 多項式を記述することができる．

そして，この場合においても $\mathbb{C}$ の有限部分集合 $R_f\subset\mathbb{C}$ を適切に定義することができ，$\lambda\notin R_f$ の場合三変数極限 E_λ 多項式の w に関する次数が集中しているという定理 4.1, 4.5 型の主張を示す事ができる（この状況の場合，w に関する次数は $n-k$ 次に集中する）．

最後に，$\lambda\notin R_f$ に対して $H_c^j(Y_t;\mathbb{C})$ の非自明な次数が集中しているという定理 4.4, 4.8 型の主張を示すことができる（この場合，$j=n-k$ 次のみが非自明なコホモロジー群である）．

以上を合わせることで 4.1, 4.2 節と同様に，$H_c^{n-k}(Y_t;\mathbb{C})$ のモノドロミー自己同型 Φ_{n-k} の Jordan 標準形における固有値 $\lambda\notin R_f$ に関する各大きさの Jordan 細胞の個数を，多面集合 UH_{f_i} の組み合わせ論的な情報のみから計算できる多項式を用いて具体的に記述することができる．

謝辞

代数幾何学城崎シンポジウム 2016 での講演の機会を下さった，世話人の藤野修先生，小林正典先生，大川新之介先生に深く感謝します．

References

[1] Batyrev, V. and Borisov, L. “Mirror duality and string-theoretic Hodge numbers”, *Invent. Math.*, 126 (1996): 183-203.

[2] Borisov, L. and Mavlyutov, A. “String cohomology of Calabi-Yau hypersurfaces in mirror symmetry”, *Adv. in Math.*, 180 (2003): 335-390.

[3] Broughton, S. A. “Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces”, *Invent. Math.*, 92 (1988): 217-241.

[4] Danilov, V. I. and Khovanskii, A. G. “Newton polyhedra and an algorithm for computing Hodge-Deligne numbers”, *Math. Ussr Izvestiya*, 29 (1987): 279-298.

[5] Denef, J. and Loeser, F. "Motivic Igusa zeta functions", *J. Alg. Geom.*, 7 (1998): 505-537.

[6] Denef, J. and Loeser, F. "Geometry on arc spaces of algebraic varieties", *Progr. Math.*, 201 (2001): 327-348.

[7] El Zein, F. "Théorie de Hodge des cycles évanescents", *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 19 (1986): 107-184.

[8] Guibert, G., Loeser, F. and Merle, M. "Iterated vanishing cycles, convolution, and a motivic analogue of a conjecture of Steenbrink", *Duke Math. J.*, 132 (2006): 409-457.

[9] Katz, E. and Stapledon, A. "Local h-polynomials, invariants of subdivisions, and mixed Ehrhart theory", *Adv. in Math.*, 286 (2016): 181-239.

[10] Saito, T. and Takeuchi, K. "On the monodromies and the limit mixed Hodge structures of families of algebraic varieties", arXiv:1603.00702.

[11] Stapledon, A. "Formulas for monodromy", arXiv:1405.5355.

[12] Steenbrink, J. H. M. and Zucker, S. "Variation of mixed Hodge structure I", *Invent. Math.*, 80 (1985): 489-542.

[13] Steenbrink, J. "Motivic Milnor fibre for nondegenerate function germs on toric singularities", arXiv:1310.6914.