旗領域の擬凹性

巴山竜来

この報告集では, 旗領域の擬凹性について, Alan Huckleberry 氏と Qaisar Latif 氏との共同研究で得られた最近の研究結果を紹介する. 講演では Mumford–Tate 領域について中心に話したが, この報告集ではより一般に旗領域の場合について論じる. なお Mumford–Tate 領域については [GGK1] が基本的な参考書であるが, [GGK2] は豊富な例が紹介されており分かりやすい.

1. 複素多様体の擬凹性と擬凸性

まず複素多様体の擬凹性と擬凸性, およびそれがもたらすコホモロジーの有限性定理, 消滅定理について復習する. これらの結果は Andreotti の講義録 [A2] に英語での解説がある. 複素多様体において Stein 性と compact 性は両極端の重要な性質を持つが, q 擬凹性と q 擬凸性はその 2 つの性質の間を階層分けするものとして Andreotti–Grauert[AG] によって次のように定義された.

定義 1.1. X を複素多様体, C^∞ 級の実関数 $\varphi : X \to \mathbb{R}$ をイグゾースチョン, すなわち $c < \sup \varphi$ に対し $\{\varphi(z) < c\}$ が相対コンパクトになるものとする. このときあるコンパクト集合 K が存在し, $X \setminus K$ の各点で Levi 形式 $L(\varphi)$ が少なくとも $n-q$ 個の正 (負) の固有値を持つとき, X は q **擬凸** (q **擬凹**) と呼ばれる. ここで $L(\varphi)$ は $T^{1,0}(X)$ 上の実 2 次形式で $x \in X$ に対し, 次のように定義される:

$$L_x(\varphi)(\xi) = \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(x)\xi_i \bar{\xi}_j \quad (\xi = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial z_i})$$

さらに X が q 擬凸で $K = \emptyset$ であるならば, X を q 完備という.

ここで Stein 多様体は 0 完備であることと同値である. またコンパクト複素多様体は $K = X$ とすれば, 0 擬凸かつ 0 擬凹であることが分かる. さらに Y をコンパクト複素多様体 X の余次元 2 以上の q 次元閉部分多様体とすれば, $X \setminus Y$ は q 擬凹である.

定理 1.2. *n 次元複素多様体 X 上のベクトル束 $\mathcal{F}$ に対し, 次が成り立つ:*

- *X が q 擬凸ならば, $r > q$ に対し $\dim H^r(X, \mathcal{F}) < \infty$;*
- *X が q 擬凹ならば, $r < n-q-1$ に対し $\dim H^r(X, \mathcal{F}) < \infty$;*
- *X が q 完備ならば, $r > q$ に対し $\dim H^r(X, \mathcal{F}) = 0$.*

この定理は強力であるが, イグゾースチョンを構成し, その Levi 形式を計算する必要があるため, なかなか使いづらい. Andreotti[A1] は q 擬凹性の条件を緩めた形で擬凹性を定義しており, 我々はこの弱い定義を使って旗領域の擬凹性を示す.

定義 1.3 (弱い擬凹性)**.** X の相対コンパクトな開集合 Y に対し, その全ての境界点 $y \in \partial Y$ に対し, 単位円盤 Δ 上の正則写像 $\rho : \Delta \to \bar{Y}$ で $\rho(0) = y$ かつ $\rho(\partial\Delta) \subset Y$ となるものが存在するとき, X を**擬凹**という.

X が定義 1.1 での $(n-2)$ 擬凹ならば, 定義 1.3 での擬凹であるが, 逆は成り立たない. この定義では Y の境界が滑らかであることを仮定していないことに注意してほしい. Andreotti の元の文献 ([A1], [A2]) では擬凹性の定義がこの定義と異なるが, 以下の定理は定義 1.3 の擬凹性から導くことができるため, [Hu] および我々の研究では定義 1.3 を擬凹性の定義として採用している.

定理 1.4. *X が擬凹ならば, $H^0(X, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$. さらにベクトル束 $\mathcal{F}$ に対し, $\dim H^0(X, \mathcal{F}) < \infty$.*

大域的な関数が定値関数のみであることは, 最大値原理から従う. 大域切断の有限性は Y の境界点を含むある多重円柱を使うが, これは定義 1.3 の単位円盤の存在が本質的である.

2. 非古典的旗領域の擬凹性

以降, 旗領域について考える. 旗領域とそのサイクル空間についての基本的な性質は [FHW] にまとまっている.

2.1. **q 完備性.** G を半単純連結複素 Lie 群, G_0 をその実形, P を G の放物型部分群とする. 旗多様体 G/P に対し, G/P の G_0 軌道は高々有限個しかないことが知られている. この G_0 軌道のうち, G/P の開集合となっているものを旗領域と呼ぶ. D を旗領域とし, $o \in D$ を基点として選ぶ. このとき P は o での安定化群 $\{g \in G \mid go = o\}$ としてよい. すなわち D は次のように書ける:

$$D = G_0.o \cong G_0/(G_0 \cap P).$$

ここで我々は $G_0 \cap P$ がコンパクト群であることを仮定する. このような旗領域は measurable と呼ばれ, 旗領域の中では特別なクラスに属するが, 周期領域や Mumford–Tate 領域など Hodge 理論で現れる旗領域はこの条件を満たす. いま $K_0 \subset G_0$ を $G_0 \cap P$ を含む極大コンパクト部分群とする. K_0 の複素化を K とすると, o での K_0 軌道 $C_0 = K_0.o$ は $C_0 = K.o$ となり, D のコンパクト部分多様体となることが知られている. さらに Schmid–Wolf[SW] により次のことが知られている:

定理 2.1. *$q = \dim C_0$ とする. D は q 完備である.*

彼らは D のイグゾースチョンを構成し, その Levi 形式が D で少なくとも $n-q$ 個の正の固有値を持つことを示した.

2.2. **古典的領域と非古典的領域.** 旗領域 D は次の 3 つの場合に分類できることが知られている:

(i) G_0/K_0 がエルミート対称領域で, 商写像 $D \to G_0/K_0$ が正則;
(ii) G_0/K_0 がエルミート対称領域で, 商写像 $D \to G_0/K_0$ が正則ではない;
(iii) G_0/K_0 がエルミート対称領域ではない.

ここで (i) の場合, D を**古典的領域**と呼び, (ii) と (iii) の場合, D を**非古典的領域**と呼ぶ. D が古典的領域である場合, $D \cong C_0 \times G_0/K_0$ となり, D は擬凸, とくに D の Schmid–Wolf イグゾースチョンは多重劣調和関数である. 一方, D が非古典的領域の場合は $\mathcal{O}(D)=\mathbb{C}$ であることが知られている.

例 2.2. D が重さ -1, Hodge 数 $\{h^{p,-p-1}\}$ の Hodge 構造の周期領域のとき, $n=\sum_{p\geq 0} h^{p,-p-1}$ とすれば,

$$G_0 = Sp(2n,\mathbb{R}), \quad K_0 \cong U(n) \quad G_0 \cap P \cong \prod_{p\geq 0} U(h^{p,-p-1})$$

このとき $K_0 = G_0 \cap P$ ならば D は古典的領域, $K_0 \neq G_0 \cap P$ ならば D は (ii) の非古典的領域である.

我々は現在準備中の論文で次のことを示した

定理 2.3. 非古典的領域 D は擬凹である.

2.3. **サイクル連結性と擬凹性.** 定理 2.3 の擬凹性の証明では以下に述べるサイクル空間の性質が重要な役割を果たす. まず旗領域 D の基点 o とその K_0 軌道 C_0 を固定する. このとき

$$\mathcal{M}_D = \{gC_0 \mid g \in G,\ gC_0 \subset D\}$$

をサイクル空間と呼ぶ. ここで $\mathcal{M}_D$ は G 等質空間 $\{gC_0 \mid g \in G\}$ の開集合である. いま D が mesurable であることを仮定しているため, $\mathcal{M}_D$ は Stein 空間となる. とくに D が古典的領域ならば, $\mathcal{M}_D \cong D$ であり, D が (ii) の非古典的領域ならば $\mathcal{M}_D \cong \mathcal{B} \times \bar{\mathcal{B}}$ である (ここで $\mathcal{B}$ は $\mathcal{B} \cong G_0/K_0$ となるエルミート対称領域).

いま D の任意の 2 点 z, z' は $\mathcal{M}_D$ のサイクルの鎖で結ばれているとき, D は**サイクル連結**と呼ばれる. すなわちサイクル連結な D に対して, 次を満たす $[C_1], \cdots, [C_n] \in \mathcal{M}_D$ が存在する:

$$z \in C_1, \quad z' \in C_n, \quad C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$$

このとき Huckleberry[Hu] によって次のことが知られている:

命題 2.4. D が非古典的領域であることとサイクル連結であることは同値である.

さらに Huckleberry[Hu] は D にサイクル連結性に関するある条件 (1 連結性) を仮定したうえで擬凹性を示した. それは次の定義で与えられる強い意味でのサイクル連結性である:

定義 2.5. D の相対コンパクト開集合 U で次を満たすものが存在するとき, D は 1 **連結**と呼ばれる:

$$U \supset C_0 \text{ であり}, \ {}^{\forall} z \in \bar{U} \text{ に対して},$$
$$z \in C \subset \bar{U}, \quad C \cap C_0 \neq \emptyset \text{ を満たす } [C] \in \mathcal{M}_D \text{ が存在する}.$$

これは, $\bar{U}$ が C_0 と連結なサイクルによって埋め尽くされていることを意味する.

命題 2.6. 1 連結な旗領域 D は擬凹である.

この証明について簡単に述べると, まず 1 連結性より次のことがいえる:

(2.1)
$${}^{\forall} z \in \partial U \text{ に対し}, \ z \in C \subset \bar{U}, \ U \cap C \neq \emptyset \text{ となる } [C] \in \mathcal{M}_D \text{が存在する}$$

ここで $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong Y \subset C$ かつ $U \cap Y \neq \emptyset$ となる Y が取れ, $z' \in U \cap Y$ を中心とする単位閉円盤 $\bar{\Delta} \subset U \cap Y$ を取ると, $Y \setminus \bar{\Delta}$ の存在は D の擬凹性を導く.

Huckleberry[Hu] は $G_0 = SL(n, \mathbb{R})$ ならば, D は 1 連結であることを示している. さらに筆者 [Ha] は G の Lie 環のルート系がある条件を満たせば, D は 1 連結であることを示した.

2.4. **定理 2.3 の証明の概略.** 命題 2.6 の証明では (2.1) を満たす相対コンパクト開集合 U の存在が重要であり, そのために 1 連結性を導入した. しかし 1 連結性を仮定せずとも, 全ての非古典的領域 D に対してそのような U は構成可能であることを示す.

まず $\mathcal{X} = \{(z, [C]) \mid z \in C\} \subset D \times \mathcal{M}_D$ に対し, 2 つの自然な射影により, 次のファイブレーションを得る

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X} \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ D & & \mathcal{M}_D \end{tikzcd}$$

ここで ν は固有写像であり μ は開写像であることが分かる. ゆえに $\mathcal{M}_D$ の相対コンパクト開集合 V を取れば, $U = \nu(\mu^{-1}(V))$ は D の相対コンパクト開集合となる. ここで $U = \bigcup_{[C] \in V} C$ である. 境界点 $z \in \partial U$ に対し, $z \in C$ となる $[C] \in \partial V$ が存在する. このとき, 次の Key Lemma が成り立つ:

Key Lemma 2.7. $[gC] \in V$, $gC \cap C \neq \emptyset$ となる $g \in G$ が存在する.

これが成り立てば, $gC \subset U$ より $C \cap U \neq \emptyset$ である. この C の存在により, U は (2.1) を満たす.

2.5. **高次の擬凹性に向けて.** 我々はさらに Andreotti の擬凹性 (定義 1.3) を拡張し, 次の不変量を定義する.

定義 2.8. 複素多様体 X の相対コンパクトな開集合 U に対し, その全ての境界点 $z \in \partial U$ に対し, 正則写像 $\rho : \Delta^q \to \bar{U}$ で $\rho(0) = z$ かつ $\rho(\partial\Delta^q) \subset U$ なるものが存在するとき, とり得る q の最大値を $c(X)$ と定義する.

この定義が高次コホモロジーの有限性定理を与えるのではないかと期待している. 定理 2.3 の証明で用いた技法を使って, 我々はいくつかの例に対し, この不変量の評価を与えた. 以下の例では P が極大の場合を扱っているが, P が一般の場合も, この場合へ帰着させることができる.

例 2.9. $G_0 = SU(p,q)$ とする. P が極大放物部分群であるとき G/P は Grassmann 多様体 $\mathrm{Grass}(k, \mathbb{C}^{p+q})$ である. $r + s = k$ とし, $D_{r,s}$ を符号 (r,s) の部分空間がなす G/P の部分空間とすると, $D_{r,s}$ は G_0 軌道である. このとき, $c(D_{r,s}) \geq \min\{r+q-s, p-r+s\}$.

例 2.10. $G_0 = Sp(2n, \mathbb{R})$ とする. P が極大放物部分群であるとき G/P は k 次元等方的部分空間 $(k < n)$ のなす $\mathrm{Grass}(k, \mathbb{C}^{2n})$ の部分空間である. $r+s = k$ とし, $D_{r,s}$ を符号 (r,s) の部分空間がなす G/P の部分空間とすると, $D_{r,s}$ は G_0 軌道である. このとき, $c(D_{r,s}) \geq \min\{n-p, n-q\}$.

References

[A1] A. Andreotti, *Théorèmes de dépendance algébrique sur les espaces complexes pseudo-concaves*, Bull. Soc. Math. France **91** 1-38, 1963.

[A2] A. Andreotti, *Nine lectures on complex analysis*, Complex analysis (Centro Internaz. Mat. Estivo C.I.M.E., I Ciclo, Bressanone, 1973), 1–175. Edizioni Cremonese, Rome, 1974.

[AG] A. Andreotti and H. Grauert, *Théorème de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. France, **90**, 193–259, 1962.

[FHW] G. Fels, A. Huckleberry and J. A. Wolf, *Cycle Spaces of Flag Domains: A Complex Geometric Viewpoint*, Progress in Mathematics **45**. Birkhäuser Boston, Inc., 2006.

[GGK1] M. Green, P. Griffiths and M. Kerr, *Mumford-Tate groups and domains: their geometry and arithmetic*, Annals of Math Studies, **183**. Princeton University Press, 2012.

[GGK2] M. Green, P. Griffiths and M. Kerr, *Hodge theory, complex geometry, and representation theory*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **118**. American Mathematical Society, 2013.

[Ha] T. Hayama, *Cycle connectivity and pseudoconcavity of flag domains*, arXiv:1501.01768

[Hu] A. Huckleberry, *Remarks on homogeneous complex manifolds satisfying Levi conditions*. Boll. Unione Mat. Ital. (9) 3, no. 1, 1–23, 2010

[SW] W. Schmid and J. A. Wolf, *A vanishing theorem for open orbits on complex flag manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **92**, no. 3, 461–464, 1984.

専修大学経営学部
E-mail address: hayama@isc.senshu-u.ac.jp