Mixed Hodge structures on semistable log smooth degenerations

藤澤太郎

東京電機大学

e-mail: fujisawa@mail.dendai.ac.jp

概 要

本稿では semistable log smooth degeneration X の relative log de Rham cohomology $\mathrm{H}^i(X, \omega_{X/*})$ が自然な極限混合 Hodge 構造をもつという結果について記す．これは Green-Griffiths [7] の結果の対数幾何的アナロジーである．詳細は現在執筆中の [6] に譲り，ここでは証明の方針を概観するにとどめる．

1 動機

Green-Griffiths [7] は，次の条件をみたす複素解析空間 X を考察の対象としている：

(†) 任意の点 $x \in X$ は，単純正規交叉多様体の直積と同型な開近傍 V をもつ．言い換えれば，任意の $x \in X$ は，$\mathbb{C}^n$ のある開部分集合 U の閉部分空間

$$\{\prod_{\lambda \in \Lambda_1} x_\lambda = 0, \prod_{\lambda \in \Lambda_2} x_\lambda = 0, \dots, \prod_{\lambda \in \Lambda_k} x_\lambda = 0\} \cap U$$

と同型であるような開近傍 V をもつ．ただしここで，$x_1, x_2, \dots, x_n$ は $\mathbb{C}^n$ の座標関数，$\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k$ は $\{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合の族で互いに disjoint なもの，すなわち 任意の異なる i, j について $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset$ をみたす ものとする．

$k = 1$ の場合，X は正規交叉多様体である．また，次に述べるように，semistable 射のファイバーは条件 (†) をみたす複素解析空間の典型的な例である．

例 1.1. 複素多様体 $\mathfrak{X}$ から多重円板 Δ^k への射 $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \Delta^k$ が semistable であるとする．すなわち，Δ^k 上の正規交叉因子 $E = \{t_1 t_2 \cdots t_k = 0\}$ の引き戻し $D = f^*E$ は被約な単純正規交叉因子であり，局所的に f は，

$$f^*t_1 = \prod_{\lambda \in \Lambda_1} x_\lambda, f^*t_2 = \prod_{\lambda \in \Lambda_2} x_\lambda, \dots, f^*t_k = \prod_{\lambda \in \Lambda_k} x_\lambda$$

と表される．ただしここで，$t_1, t_2, \ldots, t_k$ は Δ^k の座標関数，$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は X 上の局所座標，$\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k$ は $\{1, 2, \ldots, n\}$ の互いに disjoint な部分集合の族である．このとき，f の原点におけるファイバー $X = f^{-1}(0)$ は条件 $(\dagger)$ をみたす複素解析空間である．

Green-Griffiths [7] はさらに，$(\dagger)$ をみたす複素解析空間 X のある種の無限小変形 $\mathfrak{X}$ を考え，次の主張を延べている．

主張 1.2 (Green-Griffiths [7])**.** 条件 $(\dagger)$ をみたす X が射影的であるとき，X および $\mathfrak{X}$ から自然に極限混合 Hodge 構造が定まる．

ここで彼らの云う極限混合 Hodge 構造とは以下のように定義される．

定義 1.3. (V, W, F) を $\mathbb{Q}$ 上定義された混合 Hodge 構造とする．巾零な $\mathbb{Q}$ 線形写像 $N : V \longrightarrow V$ および整数 a が存在して，$W = W(N)[a]$ が成立するとき，(V, W, F) は極限混合 Hodge 構造であると云う．ただし $W(N)$ は monodromy weight filtration を表し，$W(N)[a]_m = W(N)_{m-a}$ と定める．

上で述べた彼等の主張は極めて曖昧であるが，私の力不足もあり，ここではこれ以上深入りしない．正確な statement は原論文 [7] の Theorem I および Theorem I' を参照して頂きたい．

一方，Friedman [1] による d-semistable 条件をみたす正規交叉多様体という概念が，Steenbrink [15] による log deformation という概念と同値であることが，加藤文元 [9] において証明されている．そこで，Green-Griffiths [7] が考察の対象とした $(\dagger)$ をみたす複素解析空間の対数幾何的なアナロジーを考え，彼等が主張する極限混合 Hodge 構造の存在を対数幾何の枠組みで考察してみることが本稿の目的である．より詳しく述べれば，Steenbrink の log deformation の定義に倣って semistable log smooth degeneration という概念を定義し，その relative log de Rham cohomology 上に自然な極限混合 Hodge 構造を構成することを目標とする．以上をおおまかに図式にすると次のようになる [1]．

$$\begin{array}{ccc}
\text{log deformation} & \longleftrightarrow & \text{正規交叉多様体（+ d-semistability）} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{semistable log smooth degeneration} & \longleftrightarrow & (\dagger)\ \text{をみたす複素解析空間}
\end{array}$$

目標：semistable log smooth degeneration 上の自然な極限混合 Hodge 構造
= Green-Griffiths の極限混合 Hodge 構造

[1] ただし，$(\dagger)$ をみたす複素解析空間に関する d-semistability に対応する条件が何であるべきかについては，ほとんど調べられていない状況だと思われる．

2 Semistable log smooth degeneration の定義

定義 2.1. X を複素多様体，D を X 上の有効因子とし，開埋め込み $X \setminus D \longrightarrow X$ を j で表す．このとき X 上の対数構造 $M_X(D)$ が

$$M_X(D) = j_*\mathcal{O}^*_{X\setminus D} \cap \mathcal{O}_X$$

によって定まる．

定義 2.2. 正整数 k に対して k 重対数的点 $*^k$ を，対数構造付きの点として

$$*^k = ((\operatorname{Spec}\mathbb{C})_{\mathrm{an}}, \mathbb{N}^k \oplus \mathbb{C}^*)$$

と定義する．また，$k=1$ の場合 $*^1$ を簡単に $*$ とかく．

注意 2.3. 多重円板 Δ^k 上の正規交叉因子 $E = \{t_1t_2\cdots t_k = 0\}$ は，定義 2.1 により Δ^k 上に対数構造 $M_{\Delta^k}(E)$ を定めるが，k 重対数的点 $*^k$ は，多重円板 Δ^k の原点にこの対数構造の pull back を付加した対数構造付き点に他ならない．従って，対数的複素解析空間としての自然な射

$$*^k \longrightarrow \Delta^k$$

が存在する．この射の対数構造を忘れたものが，原点の Δ^k への閉埋め込み $\{0\} \longrightarrow \Delta^k$ に他ならない．

注意 2.4. 複素多様体 U から多重円板 Δ^k への射 $g : U \longrightarrow \Delta^k$ が semistable（例 1.1）であるとする．このとき Δ^k 上の単純正規交叉因子 E の g による引き戻し $D = g^*E$ は，U 上の単純正規交叉因子である．そこで，U および Δ^k に対数構造 $M_U(D)$ および $M_{\Delta^k}(E)$ を付加すれば，g は対数的複素解析空間としての射になり，さらに log smooth と呼ばれる性質をみたす．詳細は [10] 等，対数幾何の文献を参照されたい．

定義 2.5. 正整数 k を固定し，$*^k$ を上述の k 重対数的点，$f : X \longrightarrow *^k$ を対数的複素解析空間 X から $*^k$ への対数的複素解析空間としての射とする．このとき f が semistable log smooth degeneration であるとは，任意の $x \in X$ に対して，x の開近傍 V と複素多様体の射 $g : U \longrightarrow \Delta^k$ が存在して次の二条件をみたすことである．

(2.5.1) g は semistable（例 1.1）である．

(2.5.2) 対数的複素解析空間としての Cartesian diagram

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g} \\ *^k & \longrightarrow & \Delta^k \end{array}$$

が存在する．

注意 2.6. Steenbrink が [15] において定義した log deformation は，$k=1$ の semistable log smooth degeneration $X \longrightarrow *$ に他ならない．一方，上で定義した semistable log smooth degeneration は，[3] において定義した log smooth degeneration の特別な場合である．

注意 2.7. 対数的複素解析空間の射 $X \longrightarrow *^k$ が semistable log smooth degeneration であるならば，例 1.1 から X が条件 $(\dagger)$ をみたすことは明らかである．さらに semistable log smooth degeneration $X \longrightarrow *^k$ を与えることと，データ $(X, M_X, t_1, t_2, \ldots, t_k)$ で以下の性質をもつものを与えることが同値である．

(2.7.1) X は条件 $(\dagger)$ をみたす複素解析空間である．

(2.7.2) M_X は X 上の対数構造で，条件 $(\dagger)$ によって各点の開近傍 V を

$$V \simeq \{\prod_{\lambda\in\Lambda_1} x_\lambda = 0, \prod_{\lambda\in\Lambda_2} x_\lambda = 0, \ldots, \prod_{\lambda\in\Lambda_k} x_\lambda = 0\} \cap U$$

と同一視したとき

$$M_X|_V \simeq \mathcal{O}_V^* \cdot \prod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda^{\mathbb{N}}$$

が成り立つ．ここで $\Lambda = \coprod_{i=1}^k \Lambda_i$ とする．

(2.7.3) $t_i \in \Gamma(X, M_X)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ であり，上述のように V をとるとき $\Gamma(V, M_X)$ の元として

$$t_i = \prod_{\lambda\in\Lambda_i} x_\lambda \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

が成り立つ．

そこで，以後，semistable log smooth degeneration $X \longrightarrow *^k$ と云うかわりに，semistable log smooth degeneration $(X, M_X, t_1, t_2, \ldots, t_k)$，あるいは簡単に semistable log smooth degeneration X と云うこともある．

対数幾何の一般論により semistable log smooth degeneration X に対して，その log differential form の層 ω_X^p および log de Rham 複体 ω_X が定まる．さらに射 $X \longrightarrow *^k$ が存在することから，relative log differential form の層 $\omega_{X/*^k}^p$ および relative log de Rham 複体 $\omega_{X/*^k}$ が定義される．上述の (2.7.2) に現れるような V に対して

$$\omega_X^p|_V \simeq \mathcal{O}_V \otimes \Omega_U^p(\log D),$$

が成り立つ．また

$$\omega_{X/*^k}^p = \omega_X^p \Big/ \sum_{i=1}^k \mathrm{dlog}\, t_i \wedge \omega_X^{p-1}$$

も分かる．詳しくは [10] [11] 等を参照されたい．

3 主結果

前節の定義の下，本稿の主結果は次の定理である．

定理 3.1. 射影的な semistable log smooth degeneration X の relative log de Rham cohomology $\mathrm{H}^i(X, \omega_{X/*^k})$ は極限混合 Hodge 構造をもつ．

既知の結果

ここで既知の結果を簡単に整理しておく．従前（特に対数幾何以前？）は semistable log smooth degeneration 上の混合 Hodge 理論としてではなく，semistable 射 $f:\mathfrak{X}\longrightarrow\Delta^k$ から得られる Hodge 構造の変動の極限として，ファイバー $X=f^{-1}(0)$ に関するコホモロジー群 $\mathrm{H}^i(X,\mathcal{O}_X\otimes\Omega_{\mathfrak{X}/\Delta^k}(\log D))$ 上の混合 Hodge 構造が考察されていた．そこで semistable 射の場合と，semistable log smooth degeneration の場合に分け，さらに $k=1$ の場合と $k\geq 2$ の場合に分けて表にする．（さらに semistable 射 $f:\mathfrak{X}\longrightarrow\Delta^k$ は固有射，semistable log smooth degeneration はコンパクトと仮定し，適切なケーラー条件の下で考える．さらに，極限混合 Hodge 構造について考察するときには，射影的であることを仮定する．）

	$k=1$	$k\geq 2$
$f:\mathfrak{X}\longrightarrow\Delta^k$: semistable	MHS: Steenbrink [14],	MHS: 藤澤 [2] 川又 [12]
	LMHS: Guillen-Navarro Aznar [8], Saito [13], Usui [16]	LMHS: 藤澤 [5]
semistable log smooth degeneration	MHS: Steenbrink [15]	MHS: 藤澤 [3]
	LMHS: Steenbrink [15]	LMHS:

表中の MHS は混合 Hodge 構造を，LMHS は極限混合 Hodge 構造を表す．本稿の主題は，この表の右下隅を埋めることに他ならない．

4 証明の方針

定理 3.1 を証明するには，relative log de Rham cohomology に適切な $\mathbb{Q}$ 構造を与えることは必須である．しかしながら，煩雑さを避けるため，本稿では $\mathbb{C}$ 構造のみを考察することにする．詳細は [6] を参照して頂きたい．

以下，X（あるいは $X\longrightarrow *^k$）は semistable log smooth degeneration とし，必要ならば射影的であると仮定する．

さて，定理 3.1 の証明は大きく次の三つのステップに分かれる．

(1) X 上の cohomological $\mathbb{Q}$-mixed Hodge complex $(A,L,F)=((A_{\mathbb{Q}},L),(A_{\mathbb{C}},L,F),\alpha)$ で

$$\omega_{X/*^k}\simeq A_{\mathbb{C}}\quad\text{(quasi-isomorphism)}$$

をみたすものを構成する．

(2) 巾零な射

$$N:\mathrm{H}^i(X,A)\longrightarrow\mathrm{H}^i(X,A)$$

を構成する．

(3) $\mathrm{H}^i(X, A)$ 上の filtration L が monodromy weight filtration $W(N)$ に一致することを証明する．

ただし，X が semistable 射のファイバーであるときには，(1) で構成される混合 Hodge 構造および，(2) で構成される射は，[2] および [5] で構成されたものに一致していることを要請する．

これらのステップのそれぞれを概観する前に，以後しばしば現われる幾つかの記号について確認しておく．

記号 4.1. 有限集合 A の元の個数を $|A|$ で表す．

記号 4.2. 集合 $\mathbb{N}^k$ 上に半順序 $\leq$ を

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \leq (b_1, b_2, \ldots, b_k) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{すべての } i \text{ について } a_i \leq b_i \text{ が成り立つ}$$

として定める．また $r = (r_1, r_2, \ldots, r_k) \in \mathbb{N}^k$ に対して，$|r| = r_1 + r_2 + \cdots + r_k$ とする [2]．一方 $\mathbb{N}^k$ の第 i 基本ベクトルを e_i で表す．すなわち $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$（第 i 成分のみが 1）とする．また $e = \sum_{i=1}^{k} e_i = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^k$ と記す．

4.1 CMHC (A, L, F) の構成

まず log de Rham 複体 ω_X と relative log de Rham 複体 $\omega_{X/*^k}$ 上に，stupid filtration F を以下のように定義する．

定義 4.3. 任意の n, p に対して

$$F^p \omega_X^n = \begin{cases} 0 & n < p \text{ のとき} \\ \omega_X^n & n \geq p \text{ のとき} \end{cases}$$

と定めることにより ω_X 上に，また

$$F^p \omega_{X/*^k}^n = \begin{cases} 0 & n < p \text{ のとき} \\ \omega_{X/*^k}^n & n \geq p \text{ のとき} \end{cases}$$

とすることにより $\omega_{X/*^k}$ 上に，有限減少 filtration F が定まる．

次に，X の log de Rham complex ω_X 上に increasing filtration W を次のように定める．

定義 4.4. 任意の m, n に対して

$$W_m \omega_X^n = \mathrm{Image}(\bigwedge^{n-m} \Omega_X^1 \otimes \omega_X^m \longrightarrow \omega_X^n)$$

と定める．ただし，Ω_X^1 は X の Kähler differential の層であり，右辺の射は外積をとることによって定まるものとする．

[2] これら $|A|$ と $|r|$ とが混乱する恐れは，まず無いと思う．

定義から，semistable log smooth degeneration X は，局所的には semistable 射のファイバーとみなすことができる．従って semistable 射に関して [2] で行なった構成を X に対して局所的に実行することは可能である．すると，この局所的な構成が X 全体で上手く定義できれば，と期待するのは自然な考えだが，対数構造が存在していることを用いれば，これを実際に実行することが可能である．次の補題はその一例である．

補題 4.5. $X \longrightarrow *^k$ を semistable log smooth degeneration とする．任意の $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ に対し，X の log de Rham 複体 ω_X 上の finite increasing filtration $W(i)$ で，次の性質をもつものが存在する：

(2.7.2) および (2.7.3) をみたす任意の開集合 V に対して，同型

$$\omega_X^n|_V \simeq \mathcal{O}_V \otimes \Omega_U^n(\log D)$$

の下，

$$W(i)_m \omega_X^n|_V \simeq \mathrm{Image}(W(D_i)_m \Omega_U^n(\log D) \longrightarrow \mathcal{O}_V \otimes \Omega_U^n(\log D)) \qquad (4.5.1)$$

が任意の m, n に対して成り立つ．ただし U は (2.7.2) に現われる $\mathbb{C}^n$ の開集合，$D = \{\prod_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = 0\}$, かつ $D_i = \{\prod_{\lambda \in \Lambda_i} x_\lambda = 0\}$ とする．

証明. 同型 (4.5.1) によって V 上で定まる $W(i)$ が，V のとり方によらないことを見れば良い．そこで，W を (2.7.2) および (2.7.3) をみたすもう一つの開集合とする．すなわち

$$W \simeq \{\prod_{\gamma \in \Gamma_1} y_\gamma = 0, \prod_{\gamma \in \Gamma_2} y_\gamma = 0, \dots, \prod_{\gamma \in \Gamma_k} y_\gamma = 0\}$$
$$t_i = \prod_{\gamma \in \Gamma_i} y_\gamma \qquad (i = 1, 2, \dots, k)$$

が成り立っているとする．さらに，簡単のため，ある点 $p \in V \cap W$ が V および W 双方の原点に対応していると仮定する．このとき $\Gamma = \coprod_{i=1}^k \Gamma_i$ とおいて，

$$(M_X/\mathcal{O}_X^*)_p \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{N}[x_\lambda] \simeq \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{N}[y_\gamma]$$

および

$$t_i = \prod_{\lambda \in \Lambda_i} x_\lambda = \prod_{\gamma \in \Gamma_i} y_\gamma \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

が成立することから，ある全単射 $\varphi : \Lambda \longrightarrow \Gamma$ で次の性質をみたすものが存在する．

- 任意の $i = 1, 2, \dots, k$ に対して $\varphi(\Lambda_i) = \Gamma_i$.
- 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して，ある $a_\lambda \in \mathcal{O}_{X,p}^*$ が存在して $x_\lambda = a_\lambda y_{\varphi(\lambda)}$

このことから，stalk $\omega_{X,p}$ 上で $W(i)$ が V のとり方によらないことは容易に分る． □

次の補題も同様に，局所的な構成を対数構造を用いて貼り合せることによって示される．(証明は省略する．)

補題 4.6. X を semistable log smooth degeneration とする．任意の $r = (r_1, r_2 \dots, r_k) \in \mathbb{N}^k$ に対して，次の性質をもつ複素解析空間 X_r および有限射 $a_r : X_r \longrightarrow X$ が存在する．

- (2.7.2)–(2.7.3) が成り立つような X の開集合 V に対して
$$a_r^{-1}(V) \simeq \coprod_{\substack{\Gamma\subset\Lambda \\ |\Gamma\cap\Lambda_i|=r_i}} (\bigcap_{\lambda\in\Gamma}\{x_\lambda = 0\} \cap V)$$
である．

さらに X_r 上の階数 1 の局所定数 $\mathbb{Z}$ 層 ε_r で次の性質をもつものが存在する．

- (2.7.2)–(2.7.3) が成り立つような X の開集合 V に対して，$a_r^{-1}(V)$ の連結成分 $\bigcap_{\lambda\in\Gamma}\{x_\lambda = 0\} \cap X$ 上で
$$(\epsilon_r|_{a_r^{-1}(V)})|_{\bigcap_{\lambda\in\Gamma}\{x_\lambda=0\}\cap X} = \bigwedge^{|\Gamma|} \mathbb{Z}^\Gamma_{\bigcap_{\lambda\in\Gamma}\{x_\lambda=0\}\cap X}$$
である．ここで $\mathbb{Z}^\Gamma_{\bigcap_{\lambda\in\Gamma}\{x_\lambda=0\}\cap X}$ は階数 $|\Gamma|$ の定数 $\mathbb{Z}$ 層を表す．

このとき，自然な同型
$$\varepsilon_r \otimes \varepsilon_r \simeq \mathbb{Z}_{X_r}$$
が存在し，これが対称で正定値な双線型形式を与える．

注意 4.7. 射 $a_r : X_r \longrightarrow X$ が有限射であるから，X が射影的ならば X_r も射影的である．また $r \geq e$ ならば，X_r は非特異である．

以上を準備した上で CMHC (A, L, F) の $\mathbb{C}$ 構造 $(A_\mathbb{C}, L, F)$ を次のように定義する．

定義 4.8. 任意の $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^k$ に対して
$$A^{p,q}_\mathbb{C} = \omega_X^{p+|q|+k} \Big/ \sum_{i=1}^k W(i)_{q_i}$$
とし，
$$d_0 : A^{p,q}_\mathbb{C} \longrightarrow A^{p+1,q}_\mathbb{C}$$
を微分形式の外微分 d から引き起される射，
$$\mathrm{dlog}\, t_i \wedge : A^{p,q}_\mathbb{C} \longrightarrow A^{p,q+e_i}_\mathbb{C}$$
を 1 次微分形式 $\mathrm{dlog}\, t_i$ を（左から）外積することによって定まる射とする．そこで
$$A^n_\mathbb{C} = \bigoplus_{p+|q|=n} A^{p,q}_\mathbb{C} = \bigoplus_{q\in\mathbb{N}^k} (\omega_X^{n+k} \Big/ \sum_{i=1}^k W(i)_{q_i})$$

とおき，その微分を

$$d = (-1)^k(d_0 + \sum_{i=1}^{k} \operatorname{dlog} t_i \wedge)$$

と定めることにより複体 $A_{\mathbb{C}}$ が定義される．さらに

$$L_m A_{\mathbb{C}}^n = \bigoplus_{q \in \mathbb{N}} (W_{m+2|q|+k}\omega_X^{n+k} \Big/ \sum_{i=1}^{k} W(i)_{q_i})$$

$$F^p A_{\mathbb{C}}^n = \bigoplus_{|q| \leq n-p} (\omega_X^{n+k} \Big/ \sum_{i=1}^{k} W(i)_{q_i})$$

と定義することにより，$A_{\mathbb{C}}$ 上に有限増大 filtration L と有限減少 filtration F とが定まる．

注意 4.9. X が semistable 射 $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \Delta^k$ により $X = f^{-1}(0)$ となっているとき，ここで定義された CMHC (A, L, F) は [2] で定義されたものと一致する．

このように定義するとき，次の補題および定理を証明することができる．

補題 4.10. 微分形式 $\operatorname{dlog} t_1 \wedge \operatorname{dlog} t_2 \wedge \cdots \wedge \operatorname{dlog} t_k$ を左から外積する射 $\omega_X^p \longrightarrow \omega_X^{p+k}$ は filtration F に関する filtered quasi-isomorphism

$$(\omega_{X/*^k}, F) \xrightarrow{\simeq} (A_{\mathbb{C}}, F)$$

を引き起こす．

証明. 局所的な問題であるから，[2] と同様． □

定理 4.11. X 上の $\mathbb{Q}$ 層の複体 $A_{\mathbb{Q}}$ とその上の有限増大 filtration L，および filtration を保つ射 $\alpha : (A_{\mathbb{Q}}, L) \longrightarrow (A_{\mathbb{C}}, L)$ が存在し，X が射影的な semistable log smooth degeneration ならば

$$(A, L, F) = ((A_{\mathbb{Q}}, L), (A_{\mathbb{C}}, L, F))$$

は X 上の CMHC である．

証明. 先にも述べたように，$\mathbb{C}$ 構造のみについて記す．任意の m について，同型

$$(\mathrm{Gr}_m^L A_{\mathbb{C}}, F) \simeq \bigoplus_{q \in \mathbb{N}^k} \bigoplus_{\substack{r \in \mathbb{N}^k \\ r \geq q+e \\ |r|=m+2|q|+k}} (\varepsilon_r \otimes \Omega_{X_r}^{\bullet}[-m-2|q|], F[-m-|q|]) \tag{4.11.1}$$

が存在する．ここで X_r が射影的であることから，右辺は weight が

$$-m - 2|q| - 2(-m - |q|) = m$$

の CHC である． □

これら二つを合せて，次の結果を得る．

定理 4.12. X を射影的な semistable log smooth degeneration とする．このとき，任意の i について

$$((\mathrm{H}^i(X, A_{\mathbb{Q}}), L), (\mathrm{H}^i(X, A_{\mathbb{C}}), L, F), \mathrm{H}^i(X, \alpha))$$

は混合 Hodge 構造であり，自然な同型

$$\mathrm{Gr}_F^p \mathrm{H}^i(X, A_{\mathbb{C}}) \simeq \mathrm{Gr}_F^p \mathrm{H}^i(X, \omega_{X/*^k}) \simeq \mathrm{H}^{i-p}(X, \omega_{X/*^k}^p)$$

が，任意の p について存在する．さらに $(A_{\mathbb{Q}}, L)$ および $(A_{\mathbb{C}}, L)$ が定めるスペクトル系列は E_2 項で退化する．すなわち

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}_m^L \mathrm{H}^i(X, A_{\mathbb{Q}}) &\simeq E_2^{-m, i+m}(A_{\mathbb{Q}}, L) \\ \mathrm{Gr}_m^L \mathrm{H}^i(X, A_{\mathbb{C}}) &\simeq E_2^{-m, i+m}(A_{\mathbb{C}}, L) \end{aligned} \tag{4.12.1}$$

が成り立つ．

4.2 巾零射 N の構成

実際には，k 個の射 N_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ を構成し，$N = \sum_{j=1}^k N_j$ として N を定義する．

定義 4.13. 自然な射

$$A_{\mathbb{C}}^{p,q} = \omega_X^{p+|q|+k} \Big/ \sum_{i=1}^k W(i)_{q_i} \longrightarrow \omega_X^{p+|q|+k} \Big/ (\sum_{i \neq j}^k W(i)_{q_i} + W(j)_{q_j+1}) = A_{\mathbb{C}}^{p-1, q+e_j}$$

は複体の射 $A_{\mathbb{C}} \longrightarrow A_{\mathbb{C}}$ を定める．これを $\nu_j : A_{\mathbb{C}} \longrightarrow A_{\mathbb{C}}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ で表す．さらに $\nu = \sum_{j=1}^k \nu_j$ とする．任意の i について

$$N_j = \mathrm{H}^i(X, \nu_j) : \mathrm{H}^i(X, A_{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X, A_{\mathbb{C}}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

とし，さらに

$$N = \sum_{j=1}^k N_j : \mathrm{H}^i(X, A_{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X, A_{\mathbb{C}})$$

と定める．定義から $N = \mathrm{H}^i(X, \nu)$ が成り立つ．

注意 4.14. 実は ν_j は $\mathbb{Q}$ 上定義される．すなわち，$\mathbb{Q}$ 構造 $A_{\mathbb{Q}}$ 上で定義された射の係数拡大と一致する．

注意 4.15. 任意の $j = 1, 2, \ldots, k$ に対して

$$\nu_j(L_m A_{\mathbb{C}}) \subset L_{m-2} A_{\mathbb{C}}, \quad \nu_j(F^p A_{\mathbb{C}}) \subset F^{p-1} A_{\mathbb{C}}$$

が成り立つことが，定義から容易に分る．これから

$$N(L_m \mathrm{H}^i(X, A_{\mathbb{C}})) \subset L_{m-2} \mathrm{H}^i(X, A_{\mathbb{C}})$$

を得る．さらにこれから N が巾零であることも分る．

注意 4.16. X が semistable 射 $f:\mathfrak{X}\longrightarrow\Delta^k$ によって $X=f^{-1}(0)$ と与えられているとき，上で定義した複体の射 ν_j は，[5] で定義されたものと一致する．従って，X_s を f の general fiber，すなわち $s\in(\Delta^*)^n=\Delta^k\setminus E$ のファイバー $X_s=f^{-1}(s)$ とするとき，適切な同一視

$$\mathrm{H}^i(X,A_{\mathbb{C}})\simeq\mathrm{H}^i(X_s,\mathbb{C})$$

の下で，上で定義した N_j $(j=1,2,\ldots,k)$ と座標平面 $t_j=0$ のまわりの monodromy automorphism $T_j:\mathrm{H}^i(X_s,\mathbb{C})\longrightarrow\mathrm{H}^i(X_s,\mathbb{C})$ は

$$T_j=\exp(-2\pi\sqrt{-1}N_j)\quad(j=1,2,\ldots,k)$$

をみたす．

4.3 $L=W(N)$ の証明

最後のステップは $L=W(N)$ を示すことである．そのためには，任意の非負整数 l に対して，射 N^l が同型

$$\mathrm{Gr}_l^L\mathrm{H}^i(X,A_{\mathbb{C}})\xrightarrow{\simeq}\mathrm{Gr}_{-l}^L\mathrm{H}^i(X,A_{\mathbb{C}})$$

を引き起すことを証明すれば良い．ここで，$(A_{\mathbb{C}},L)$ が定めるスペクトル系列の E_2 退化，すなわち同型 (4.12.1) によれば，射 ν が同型

$$E_2^{-l,i+l}(A_{\mathbb{C}},L)\xrightarrow{\simeq}E_2^{l,i-l}(A_{\mathbb{C}},L)$$

を引き起すことを示せば良い．そのために，まずは E_1 項を調べる．

補題 4.17. X が射影的であるとき，有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間

$$E_1(A_{\mathbb{C}},L)=\bigoplus_{a,b}E_1^{a,b}(A_{\mathbb{C}},L)$$

への $SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})$ の作用

$$\rho:SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})\longrightarrow\mathrm{Aut}(E_1(A_{\mathbb{C}},L))$$

で，それが引き起す射 $\rho_*:\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\longrightarrow\mathrm{End}(E_1(A_{\mathbb{C}},L))$ が

$$\rho_*(0,\mathfrak{n})=E_1(\nu)\tag{4.17.1}$$

をみたすようなものが存在する．ここで

$$\mathfrak{n}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\in\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$$

であり，$E_1(\nu)$ は射 $\nu:A_{\mathbb{C}}\longrightarrow A_{\mathbb{C}}$ が E_1 項に引き起す射（の直和）を表す．

証明．同型 (4.11.1) から容易に，同型

$$E_1(A_{\mathbb{C}}, L) \simeq \bigoplus_{r \in \mathbb{N}^k} \mathrm{H}^*(X_r, \varepsilon_r \otimes \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[u_1, u_2, \dots, u_k]/(u_1^{r_1}, u_2^{r_2}, \dots, u_k^{r_k}) \tag{4.17.2}$$

を得る．一般に多項式環の商環 $\mathbb{C}[u]/(u^{n+1})$ は，二変数 n 次斉次多項式全体の空間と同一視することにより，自然に $SL(2, \mathbb{C})$ の作用をもつから，

$$\mathbb{C}[u_1, u_2, \dots, u_k]/(u_1^{r_1}, u_2^{r_2}, \dots, u_k^{r_k}) = \mathbb{C}[u_1]/(u_1^{r_1}) \otimes \mathbb{C}[u_2]/(u_2^{r_2}) \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}[u_k]/(u_k^{r_k})$$

は自然に $(SL(2, \mathbb{C}))^k$ の作用をもつ．従って diagonal $SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow (SL(2, \mathbb{C}))^k$ によって，$SL(2, \mathbb{C})$ が $\mathbb{C}[u_1, u_2, \dots, u_k]/(u_1^{r_1}, u_2^{r_2}, \dots, u_k^{r_k})$ に作用する．一方，Hard Lefschetz 定理から

$$\mathrm{H}^*(X_r, \varepsilon_r \otimes \mathbb{C}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{H}^i(X_r, \varepsilon_r \otimes \mathbb{C})$$

には $SL(2, \mathbb{C})$ が作用する．従って $E_1(A_{\mathbb{C}}, L)$ への $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ の作用を得る．このとき (4.17.1) が成立することは，同型 (4.17.2) を良く見ることで分る． □

注意 4.18. 同型 (4.11.1) の類似が $\mathbb{Q}$ 構造 $(A_{\mathbb{Q}}, L)$ に対しても成立し，同型 (4.17.2) の類似が $E_1(A_{\mathbb{Q}}, L)$ に対しても成立する．これから，上述の $E_1(A_{\mathbb{C}}, L)$ への $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ 作用が，実は $\mathbb{Q}$ 上定義されていることが分る．

補題 4.19. X は射影的であるとする．このとき，任意の正整数 l について，射 $\nu^l : A_{\mathbb{C}} \longrightarrow A_{\mathbb{C}}$ は同型

$$E_2^{-l, i+l}(A_{\mathbb{C}}, L) \xrightarrow{\simeq} E_2^{l, i-l}(A_{\mathbb{C}}, L)$$

を引き起す．

証明．補題 4.17 により，$E_1(A_{\mathbb{C}}, L)$ には $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ の作用がある．これに Guillen-Navarro Aznar [8] の議論を適用することにより，この作用が $E_2(A_{\mathbb{C}}, L)$ への $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ の作用を引き起すことを示すことができ，これから結論を得る． □

定理 4.12 および補題 4.19 を合せて，本稿の主結果を得る．

定理 4.20. X は射影的な semistable log smooth degeneration であるとする．このとき，任意の i および正整数 l について，N^l は同型

$$\mathrm{Gr}_l^L \mathrm{H}^i(X, A_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Gr}_{-l}^L \mathrm{H}^i(X, A_{\mathbb{C}})$$

を引き起す．すなわち $\mathrm{H}^i(X, A_{\mathbb{C}})$ 上 $L = W(N)$ が成り立つ．よって任意の i について $\mathrm{H}^i(X, \omega_{X/*^k})$ は極限混合 Hodge 構造をもつ．

5　残された問い

上述のように，射影的な semistable log smooth degeneration X の relative log de Rham cohomology $\mathrm{H}^i(X, \omega_{X/*^k})$ が極限混合 Hodge 構造をもつことが示された．一方で，[3] において，$\mathrm{H}^i(X, \omega_{X/*^k})$ が混合 Hodge 構造をもつことが既に証明されていた．そこで，次の問いが自然に生じる：

(Q1) 定理 3.1 において構成された混合 Hodge 構造と，[3] において構成された混合 Hodge 構造は一致するか？

元々，本来の目標は，[3] で構成された混合 Hodge 構造が極限混合 Hodge 構造であることを証明することであった．しかし，それを直接証明することが困難であるため，別の方法で改めて混合 Hodge 構造を構成し，それが極限混合 Hodge 構造であることを示す，というのが本稿で述べた内容である．従って，この (Q1) を肯定的に解決して始めて，本来の目標が達成できたと言うことができる．

次に，冒頭でも述べた Green-Griffiths [7] に関連して次の問いが考えられる：

(Q2) 定理 3.1 において構成された極限混合 Hodge 構造と，[7] において構成された極限混合 Hodge 構造は一致するか？

さらに，本稿の結果を踏まえて次に考えるべき問いは，混合 Hodge 構造の偏極についてであろう．

(Q3) 定理 3.1 において構成された極限混合 Hodge 構造は，混合 Hodge 構造としての偏極をもつか？

$k = 1$ の場合，すなわち log deformation の場合には，[4] で解決済みであるが，かなり煩雑な計算が必要であった．$k \geq 2$ の場合に同様の手法が適用可能であったとしても，非常に面倒な計算が必要であると思われる．

参考文献

[1] R. Friedman, *Global smoothings of varieties with normal crossings*, Ann. of Math. (2) **118** (1983), 75–114.

[2] T. Fujisawa, *Limits of Hodge structures in several variables*, Compositio Math. **115** (1999), 129–183.

[3] ———, *Mixed Hodge structures on log smooth degenerations*, Tohoku Math. J. (2) **60** (2008), no. 1, 71–100.

[4] ———, *Polarizations on limiting mixed Hodge structures*, Journal of Singularities **8** (2014), 146–193.

[5] ______, *Limits of Hodge structures in several variables,* II, arXiv:1506.02271, June 2015.

[6] ______, *Mixed Hodge structures on semistable log smooth degenerations*, in preparation.

[7] M. Green and P. Griffiths, *Deformation theory and limiting mixed Hodge structures*, Recent Advances in Hodge Theory (Matt Kerr and Gregory Pearlstein, eds.), London Mathematical Society Lecture Note Series, no. 427, Cambridge University Press, 2016, pp. 88–133.

[8] F. Guillén and V. Navarro Aznar, *Sur le théorème local des cycles invariants*, Duke Math. J. **61** (1990), 133–155.

[9] F. Kato, *Log smooth deformation theory*, Tohoku Math. J. (2) **48** (1996), no. 3, 317–354.

[10] K. Kato, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory (J.-I. Igusa, ed.), Johns Hopkins Univ., 1988, pp. 191–224.

[11] K. Kato and C. Nakayama, *Log Betti cohomology, log étale cohomology, and log de Rham cohomology of log schemes over* $\mathbb{C}$, Kodai Math. J. **22** (1999), 191–224.

[12] Y. Kawamata, *On algebraic fiber spaces*, Contemporary trends in algebraic geometry and algebraic topology (S.-S. Chern, L. Fu, and R. Hain, eds.), Nankai Tracts in Mathematics, vol. 5, World Scientific Publishing, 2002.

[13] M. Saito, *Modules de Hodge Polarisable*, Publ. RIMS. **24** (1988), 849–921.

[14] J. Steenbrink, *Limits of Hodge Structures*, Invent. Math. **31** (1976), 229–257.

[15] ______, *Logarithmic embeddings of varieties with normal crossings and mixed Hodge structures*, Math. Ann. **301** (1995), 105–118.

[16] S. Usui, *Mixed Torelli problem for Todorov surfaces*, Osaka J. Math. **28** (1991), 697–735.