特別寄稿

〈数学の無尽蔵性〉と二つの哲学

——カヴァイエスとゲーデル——

中村大介

序論

前世紀初頭における数学基礎論論争は、論理主義、直観主義、形式主義の間で起こったものと一般に整理される。そして 1931 年にクルト・ゲーデル（Kurt Gödel, 1906-1978）の論文によって示されたいわゆる「不完全性定理」が、そのような数学基礎論論争の一つの中断符点をなす –– これも広く共有されている見方だろう。

本稿は、不完全性定理以降の数理思想の一断面を、よく知られた先の三つの立場とは異なった視角から描き出すことを目的とする。特に、ゲーデルがこの定理から導いた「数学の無尽蔵性（inexhaustibility）」のテーゼに着目し、この考えをめぐる二つの見解を対比させてみたい。その二つの見解のうち第一のものは、このテーゼを提示した他ならぬゲーデル自身のものである。ここでは特に、数学の現象学へと至る彼の道のりに注目する。第二の見解は、不完全性定理のインパクトを把握しつつもゲーデルとは独立に無尽蔵性の考えに至ったジャン・カヴァイエス（Jean Cavaillès, 1903-1944）のものである。カヴァイエスはゲーデルとは対照的に、現象学批判を通して数学の無際限な進展に見合った哲学を提示しようとした。本稿は、まず第 1 節でゲーデルの哲学的進展を先行研究に依りつつ整理した上で、第 2 節でカヴァイエスの博士論文における考えを、最後の第 3 節で彼が遺作で提示した着想を取り扱う。そして結論にて、両者の考えを比較してみたい。

1. ゲーデルにおける数学の現象学

不完全性定理の結果を示すことから始めよう。今日、この定理は以下の二つの部分からなるものとして提示される。

> 第一不完全性定理：自然数論を含む体系が無矛盾であれば、その体系内で証明することも反証することもできない命題が存在する。
>
> 第二不完全性定理：自然数論を含む体系が無矛盾であれば、その無矛盾性を当の体系内で証明することはできない。

周知のようにゲーデルの 1931 年の原論文では、「無矛盾性」の代わりに「ω無矛盾性」というより強い条件が使われていた。しかし 1936 年に J・B・ロッサーの手によって、この条件は無矛盾性に置き換えうることが示され、本稿でもこのより一般化された命題を採用する。ここで、本稿の通奏低音ともなる「数学の無尽蔵性」をゲーデル自身がこの定理からどのように主張したのかを、飯田のまとめに拠りつつまずは見てしまおう。いま、すべての数学が含まれるような包括的な形式体系 A があるとせよ。その体系の定理がすべて真であることを数学的に確信できるならば、「A は無矛盾である」も数学的確実さをもって同様に主張できる。そこで、A の包括性から「A の無矛盾性は A の定理である」ことになるが、これは先の第二不完全性定理に反する。かくして、数学の全体は一つの形式体系に含まれることはなく、この意味で完結せず、常に開かれたものとみなされるのである(1)。

さて、ゲーデルの哲学的議論にはライプニッツとカントからの影響も大きいが、本稿は、この無尽蔵性にかかわる着想がどのようにフッサール現象学へ合流することになるか、という点に絞って彼の数理思想の展開を跡づけることにする。まずは、不完全性定理が終わりを告げたと一般に言われるヒルベルト・プログラムについてまとめておこう。ヒルベルトが 1920 年代に展開したこの数学の基礎づけプログラムは、無限数学の理論を転写した形式体系の無矛盾性と構文論的完全性 —— 形成規則によって作られた命題は証明可能であるか反証可能であるかどちらかである —— を、記号という具体的な対象に対する感性的直観に基づいて構成された内容的数学によって証明することを目標としていた。第一不完全性定理は構文論的完全性を証明することの不可能性を、第二不完全性定理は無矛盾性を証明することの不可能性を、それぞれ示したのだとされる。しかしゲーデル自身はと言えば、この定理がヒルベルトの企てを不可能なものにしたとは見なしていなかった 。

1931 年の論文でも既に言及されていたこの見解は(2)、後年になっても堅持されている。たとえば、1947 年に出版された論文「カントールの連続体問題とは何か」では、カントールの連続体仮説 —— 連続体濃度は可算濃度の次に大きい無限濃度である —— は真であるか偽であるかどちらかでなければならないと主張されている。彼によれば、たとえこの仮説が標準的な集合論の枠組みでは決定不能であったとしても、このことが意味しているのは単に、この仮説を解くために必要な諸公理、ないしそれらを含意する根底的な概念が欠けているということに過ぎないのである(3)。実際、ゲーデルのこうした考えは、コーエンによる連続体仮説の ZF 集合論に対する独立性証明 (1963 年) の後でも変化していない(4)。

ここで、1953 年から 1959 年の間に書かれたとされる論考「数学は言語の構文論か」、その第三稿の議論を少し見ておこう。先述したヒルベルト・プログラムの目的は、言い換え

れば、無限に関わるあらゆる概念の内容を記号の有限列に関する規則に還元することにあった。だが第二不完全性定理が示したのは逆に、そのような有限列には還元不可能な、抽象的かつ超限的な概念が数学には必要であるということであった(5)。そこで前段の内容と併せれば、以下の問いが浮上することになる。数学の仮説を証明し、問題を解いていくために新たな超限的概念が必要であるのだとしたら、そのような概念はどのようにして見出され、また明確化されるのか。

新たな概念を明確化する方法、ゲーデルがそれを発見した先こそフッサール現象学である。彼は 1959 年以降、フッサールに集中的に取り組み、本質直観あるいは抽象的な概念に対する直観に一つの手がかりを見出すようになる。以下は 1961 年の草稿の一節である。

> 実際、意味のそのような明確化のための体系的な方法を有すると主張する学問が現在始まっている。それはフッサールによって創始された現象学である。ここで、意味の明確化は、我々の注意をある仕方で方向付けることによって、当該の概念に対しより鋭く焦点化することにある。ある仕方で、と今述べたが、注意の方向づけは特に、これらの概念を使用している我々自身の作用に対して、または作用を遂行している我々の力等々に対してなされるのである。(Gödel, 1995a, p. 383)

ゲーデルが現象学に見出したのは、こうした方法論上の重要性だけに留まらない。概念に対するこうした本質直観が、志向性の上に成立するという認識論的な機構も彼にとって決定的であった。これは、ゲーデルのいわゆる「プラトニズム」に関わる問題である。先述した連続体仮説に関する論攷で、ゲーデルが数学的対象のプラトニズムを主張していることはよく知られているが、彼の立場はまた、こうした対象を記述する概念に関する「概念実在論」と呼べるものでもあった。Cassou-Noguès (2005, p. 213) によれば 1920 年代にまで遡るこうしたプラトニズムはしかし、長らく安定した主張の上にもたらされることはなかった 。たとえば、1933 年の講演では、ゲーデルはプラトニズムを当時の数学の状況から導いているが、同時にその着想の不合理性も認めていた(6)。van Atten & Kennedy (2003, pp. 430–434) の指摘に従えば、数学者として確信を抱くプラトニズムと、それを正当化するための哲学的着想を要求する合理性との間で、ゲーデルは袋小路に陥っていたのである。

この袋小路からの脱出口となったもの、それが現象学であった。志向的な相関関係が、概念のプラトニズムの要求とこの着想の正当化との和解をもたらすことになったのである。現象学によれば、意識とは何ものかについての意識である。そして、意味の世界に実在する本質的概念についての意識である限り、意識の志向性はプラトニズムを正当化してくれ

る。ゲーデルがなぜ現象学に依拠することになったのか、その理由を今や二点にまとめることができよう。第一に、不完全性定理は数学に新たな超限概念を導入し続けることを要求するが、本質直観がそうした概念を発見するための手立てを与えてくれる。第二に、志向性が、こうした概念が実在するというプラトニズムを正当化する役割を果たす。方法論の面からも認識論的正当化の面からも、現象学は〈数学の無尽蔵性〉を支える思想を、ゲーデルに提供したと言えるだろう。

2. メタ数学による数学の基礎づけから両者の交錯へ：カヴァイエスと不完全性定理（1）

ジャン・カヴァイエスはフランスの数理哲学者であり、数学基礎論を扱った『公理的方法と形式主義』、集合論の形成を論じた『抽象集合論の形成』、二つの博士論文を執筆し、1938 年に出版した。それらはいずれも 19 世紀以来の数学史の中に集合論の進展と基礎論の問題を位置づける、大きな射程を備えた著作であり、エピステモロジー（科学認識論）の系譜において範例的な価値をもつ仕事とさえ言える。また、対独レジスタンス活動 ―― この活動の結果彼はナチスに捕らえられ銃殺されることになる ―― のさなかに書かれた遺作『論理学と学知の理論について』(1947) は、その末尾における「概念の哲学」の提唱と共に、構造主義やフーコーなど、エピステモロジーの枠を超えて戦後フランス哲学に大きな影響を与えた。本稿では、数学基礎論の文脈における彼の不完全性定理についての評価を見た後で、次節において、不完全性定理をフッサール現象学批判と連結する、遺作における彼の議論を俎上に乗せたい。

博士主論文にあたる『公理的方法と形式主義』は、19 世紀初頭以来の幾何学の公理化と解析学・数論の形式化、二つの数学の運動の合流点としてヒルベルト・プログラムを位置付けた後で、この基礎づけ計画の様々な試みを描く「無矛盾性証明」の章に至る。ゲーデルの業績はそこで、アッケルマン、フォン・ノイマン、エルブランといった論理学者の仕事の後で取り扱われる。ポイントを絞り込んだ不完全性定理に対するカヴァイエスの読解は、その後の歴史を考えてみたとき、示唆に富んだものである。

彼は通例通り、この定理がヒルベルト・プログラムの核心に決定的な打撃を加えたことを認めつつも、むしろこの定理を積極的に評価しようとする。まず、ゲーデルに代表される無矛盾性証明の試みはヒルベルトの考えを明確にするものである。

> ヒルベルトは直観的なゾーンの外的な画定に満足していた。すなわち、彼がそこで許していた算術的推論は、具体的な思考の分割不可能な運動のさなか、通りすがりに単に示されていただけであって、本質的に予見不可能な手続きをコード化するという試

> みが、こうした具体的な思考に対して考察されていたわけではないのである。(Cavaillès, 1981, pp. 143–144)

ヒルベルトは有限の立場に基づくメタ数学から数学を制御しようとしていた。しかし彼は信頼に値する有限主義の直観のゾーンを、明確に定めていた訳ではない。実際、ヒルベルトの周辺においてさえ、その「有限主義」に多様な考えが当時あったことが知られている[7]。では「具体的な思考」、すなわち内容をもった数学の思考とは何なのか –– たとえばゲーデル数化（論理記号を自然数論の素数に対応させる手法）は、メタ数学において用いられる記号を分析対象である自然数論という数学の要素に対応させることで、具体的な思考の内実を明確にするものとみなされうる。カヴァイエスの表現によれば、不完全性定理の証明の中に用いられたこの手法は、ヒルベルトの「直観的推論という粗雑な概念の分析」をもたらすのである。ゲーデルはヒルベルトの企てとは逆に、数学によってメタ数学を規定しているのだと言えよう。

> ゲーデルの独自性は、メタ言語の諸々の手続きの中で言語において形式化されうるものを規定しようとすることで、［ヒルベルトとは］逆の操作を実行したところにある。(Cavaillès, 1981, p. 144)

ここから彼の不完全性定理に対する第一の肯定的な読解が読み取れる。つまるところゲーデル数化の手続きは、**数学とメタ数学の間の関係を打ち立てなおす**試みなのである。

さらにカヴァイエスはこの試みを、ゲンツェンによる自然数論の無矛盾性証明が継続したとみなしている。すなわち、ε_0までの超限帰納法を用いている限りで、この証明はゲーデルによって示唆された数学とメタ数学の交錯の最初の明確な事例をなす、という訳である。ところで Sinaceur (1999, pp. 301–333) の見解によれば、単一のメタ数学による複数の数学体系の基礎づけというヒルベルト・プログラムに至るまでの数学と論理学の関係を「数理論理学」と形容しうるのだとしたら、タルスキのモデル論によってとりわけて明確になるような、複数のメタ数学と複数の数学とが相互交流しつつ成果を上げていく 1930 年代以降の数学と論理学の関係は「論理数学」と呼ばれねばならないという。この見解を踏まえるならば、不完全性定理のうちにメタ数学による数学の基礎づけではなく、メタ数学の数学的考察を見出すカヴァイエスの読解は、数学とメタ数学、数学と論理、意味論と構文論等々の間の「論理数学」的な関係が始まる端緒を捉えた優れた洞察として、評価されるべきであろう。

彼はまた、1937 年の論文「数学の基礎についての反省」において、ゲーデルの定理が言語に対する作用、操作の優位を導くものであると述べている。

> ゲーデルの定理は言語と数学的作業という相関的な概念に真の関係を再興する。これらの概念を、形式主義は意味を欠いた記号に対する働きというイメージの中で混同していた。記号とは、直観的操作へと導く意図によってのみ記号なのである。数学的言語とは、数学者の精神における実効的作用への指図にすぎないのである。(Cavaillès, 1994a, p. 577)

今、仮にヒルベルト・プログラムが成功していたと、すなわち無限数学が感性的直観の対象である記号からなる有限の内容的数学の上で基礎づけられえた、と仮定してみよう。この場合、直観的操作は常にこれらの記号の上に制限されたものとなり、それゆえ数学の有意味な仕事はすべからく内容的数学の言語における記号を組み合わせる可能性に同一視されることとなったであろう。そして、無限数学の作業はそれ自体では意味を欠いたものとして、有限命題を引き出すための便利な道具とみなされていたことであろう。ところで、ゲーデルが証明したことは、事態がそのようでない、ということであった。数学における直観的操作は内容的数学の言語における記号操作に還元されない。この点を示したことが、カヴァイエスの不完全性定理に対する第二の肯定的な評価である[8]。

実際、彼は『抽象集合論の形成』、『公理的方法と形式主義』の二著作で、直観的操作の拡張と、その拡張された操作を統一する新たな概念の導入に、未解決問題を解いていくという数学的運動の核心を見出している。たとえば、前者の著作によれば、三角級数展開の一意性の問題を通して解析学の極限移行が導集合を作る操作へと位相論的に一般化され、続いてこの操作のステップが対象化されることでカントール集合論が成立する。そして、操作を対象化することで新たな操作が導入されるこうした過程は、後者の著作では「主題化」という数学の進展プロセスに類別されることになる。解析学から集合論へのこうした移行で分かる通り、操作の拡張による数学の進展という着想は、確かにある無限数学の理論から他の無限数学の理論への跳躍にもあてはまるものであり、ゲーデルの定理から直接導ける議論ではない。しかしこの定理によって示される記号や言語に対する操作の優位は、言語内の記号操作と数学の操作を区別し、後者が前者を超え出る可能性を常にはらむというカヴァイエスの主張を裏打ちしてくれるものではあるだろう。

このように、カヴァイエスにとって数学とは一つの進展 –– あるいは彼の言葉によれば「生成」–– であった。これはゲーデルの述べる「数学の無尽蔵性」と無論のこと共鳴す

る考えである。しかしカヴァイエスは数学基礎論の文脈では、無際限に進んでいく数学というアイディアと不完全性定理を結びつけることはない。この結びつきを垣間見せてくれる議論は遺作において展開されることになる。

3. 確定的多様体批判と意味の刷新：カヴァイエスと不完全性定理（2）

戦中に書かれた『論理学と学知の理論について』はカンギレムとエーレスマンの手になるタイトルと共に 1947 年に出版された著作であり、そこでは一つの「学知の理論」、つまり伝統的に「学問論」と呼ばれてきたものの樹立が、カヴァイエス固有の学知の論理分析と共に目指されている。

著作の最終第 3 部でカヴァイエスは現象学、とりわけて、『イデーン』（1913）で確立された超越論的現象学を用いて数学と論理の分析をおこなうフッサールの『形式論理学と超越論的論理学』（1929）の批判的検討をおこない、末尾で現象学という「意識の哲学」に抗する「概念の哲学」こそ、学知の理論のあるべき姿だと主張するに至る。そしてカヴァイエスの現象学批判の中核は、フッサールの「確定的多様体」に対する考えにある。そこで、現象学者のこの着想を簡単に紹介しておこう。

フッサールは形式論理学を命題と対象、二つの観点から分析し、構文論的文法規則に従う「判断の純粋形態論」、矛盾律に従う「無矛盾性の論理学」、そして判断と事態との一致を考察する「真理の論理学」という（命題を扱う）三つの形式命題論の層を考え、その各層に（対象を扱う）形式存在論を対応させる。たとえば判断の純粋形態論に対応するレベルには、性質、集合、基数などの対象がある。フッサールの形式論理学の特徴として ‒‒ 今「基数」を取り上げたことからも分かる通り ‒‒ 形式存在論の範囲が数学を含むまで拡大されている点が挙げられる。とりわけ、「真理の論理学」に対応する形式存在論のレベルでは「確定的多様体」が取り扱われる。「多様体」とは、ある演繹体系における構文論的規則によって規定された或るもの一般の領域のことであり、そしてこうした多様体が「確定的」であるとは、その演繹体系において「一切の命題（命題形式）が『真』、つまり公理からの分析的（純粋に演繹的）な帰結であるか、もしくは『偽』、つまり分析的に矛盾であるかのどちらかであって、第三の道はない（*tertium non datur*）」(Husserl, 1974, p. 100, 邦訳, 106 頁) ようなものである。フッサールの確定性概念はしたがって、構文論的完全性のそれと一致するものである。無限数学の形式的理念としての「多様体」の意味は「確定性」の概念で明らかになるのだ[(9)]。

このようなフッサールの「確定的多様体」の考えに対して、カヴァイエスが『論理学と学知の理論について』で加えた以下の批判はよく知られている。

実際ゲーデルの結果が知られている。自然数の算術を含むどんな理論も −− つまりほとんど一切の数学理論が −− 必然的に不飽和であり、公理からの帰結でもなければ公理と矛盾することもない命題がそこで言明されうるのである。第三の道がある（*Tertium datur*）。［…］これこそ、技術を追い越す抽象的なものの内で実行された構築を技術が逆転するという、技術の報復である。(Cavaillès, 1997, pp. 84–85, 邦訳, 63 頁)

「確定的多様体」の考えは、一つの「多様体」である古典的な無限数学が「確定的」、つまりその公理系が構文論的に完全（決定可能）と主張する。その限りにおいて、この考えは、自然数論を含む無矛盾な体系には証明することも反証することもできない命題が存在する、という不完全性定理の内容と両立不可能ではないか −− 以下ではカヴァイエスのこの批判の射程を、三つの段階に分けて定めてみたい。

まずフッサール自身の数学的業績を岡田の分析にしたがってまとめておこう。彼はヒルベルトも出席していたゲッティンゲン数学協会で 1901 年に講演をおこない、そこで、数学における「虚的なもの」（負の数や複素数などの自然数以外の数）の導入が正当化されるための条件を考察している。導きの糸となる問いは以下である。「L をいかなる虚的なものも含まない公理系、M を L に幾つかの虚的な概念が付け加えられた公理系とせよ。もし虚的なものを含まない命題が M において導出されたならば、その命題はまた L においても導出されるか。」フッサールが証明したのは、もし L が構文論的に完全であり、かつ M が無矛盾であるならば、この問いに肯定的に答えることができる、ということであった(10)。これはヒルベルト・プログラムに先駆けること二十年、フッサールが保存拡大条件を考察していたということを意味しており、驚くべき思索といってよい。勿論、ここでの L は不完全性定理が成立する通常の自然数論より弱い体系である。そして確定的多様体の概念は、このような完全な公理系によって規定される対象の領域として導入されており、岡田の指摘によれば、確定的多様体は今日で言うところの一種の「項書き換えシステム」に対応する(11)。

そこで、このフッサールの業績を踏まえて、カヴァイエスが検討している『形式論理学と超越論的論理学』の数学論を読み直してみる。すると、この著作で扱われている数学理論が確定的多様体の範囲を超え出ていないように解釈されうることに気がつく。確かに、この著作には古典的な無限数学を擁護しているような文言 −− たとえば「数学とは無限的な構成の領域、理念的な存在の領域であって、つまり単に『有限な』意味の領域だけでなく、構成による無限性の領域でもある」(Husserl, 1974, p. 196, 邦訳, 209 頁) −− が見られる。し

かし、こうした無限の構成とは、確定的多様体の領域に含まれる対象を産み出す反復可能な操作とも考えうる。とするならば、確定的多様体のテーゼと不完全性定理の両立不可能性を指摘するカヴァイエスの批判は、確定的多様体に制限された数学を扱っていると読めるこの著作に対しては当てはまらないことになる。

ではカヴァイエスの批判は単なる「行き過ぎ」とみなされることになるのか –– 最後に、以上の議論を踏まえてカヴァイエスの批判の真の意義を取り出すことを試みよう。一見したところ、彼の批判で問題となっているのは各数学理論のスケールや構造である。例を挙げれば、自然数論、あるいはそれを含む整数論などは不完全であるが、実閉体などは完全である。そこで、どのような数学的構造と大きさが確定的多様体に対応するのかを、論理数学的に考察することは重要な仕事となる。だが、カヴァイエスの議論はこのような指摘に留まるものではない。そこに賭けられていたのは、決して誇張ではなく、数学とは何であるか、学知の本質とはいかなるものか、といった点にあった。フッサールの考察した数学的問題に戻ろう。もし体系 L の多様体が確定的であるならば、L の内に含まれる概念の意味はその体系の内で定められることになる。そのとき、拡大系 M において導入される虚的な概念は、L で演繹される命題をより簡潔な仕方で証明するための道具に過ぎなくなるだろう。逆に、体系 L の多様体が確定的でない場合、L に含まれる幾つかの概念の意味は体系 M においては変化することになる。なぜなら、L の概念のみで言明される命題で、M では証明可能だが L ではそうでないものがあるのだから。ここにカヴァイエスの二重の考えが見出される。一方で「意味の刷新」がある。新たな概念が導入されることで旧来の概念が改訂されるということが起こり、体系間に「意味の依存関係」が生じる。他方でこれらの概念の間には「内的必然性」がある。概念の結びつきが必然的であるのは、新たな概念の導入と旧概念の刷新によって未解決問題が解けるからである。不完全性定理を用いた確定的多様体批判の直前に登場する以下の一節は重要である。

> 技術への送り返しは言い逃れである。成功、つまり単純化の価値は本質的特徴の上に基礎付けられねばならない (Cavaillès, 1997, p. 84, 邦訳, 62 頁)

数学の「本質的特徴」、それは新たな概念の導入が意味の刷新を引き起こすという事実の内にある。なぜならこの事実こそが問題の解決という、あるいはそれまでの証明を「単純化」するという「成功」をもたらすからである。こうした成功がある限り、有限数学の上に無限数学を重ね合せることは単に証明「技術」を付け加えることではない。数学の本質、それは数学の進展ないし生成のうちにある。かくしてカヴァイエスは不完全性定理を経て

ゲーデルの「数学の無尽蔵性」と類似した着想に至ることになる。不完全性定理は無限数学が有限数学の保存拡大とならず、したがって前者の概念が後者の記号操作に還元不可能であることを示してくれた。とするならば、数学とは概念的上昇を伴いつつ問題を解いていく、終わりなき一つの生成であるだろう –– 不完全性定理はカヴァイエスの主張する〈数学の生成〉に一つの支えを提供するのである。

したがってカヴァイエスにとって現象学の問題点とは、確定的多様体の発想それ自体というよりも、確定的でない理論のうちに数学の実質をフッサールが見て取ることができなかった、という点にあったように思われる。なるほど、数学の命題には判断作用が伴い、その命題を満たす対象やモデルもまた考察しうるのだから、命題–対象という二元論的観点に立った数学の現象学的分析は可能である。しかし、古典数学の多くの理論が非確定的である以上、この二元論的分析に先立って、新たな概念の導入と意味の刷新により問題を解いていくという数学の無際限な運動を考えねばならない。とするならば、数学という学知の中心を担うのは、それ自身他の概念を要求する概念であることになるだろう。ここに、〈数学の無尽蔵性〉に見合った思想として、意識作用を概念の統一する操作に従うものに過ぎず、概念から概念への移行に際して「消え去る」ものとみなす「概念の哲学」が登場するのである(12)。

結論

カヴァイエスとゲーデル、どちらも不完全性定理を踏まえて〈数学の無尽蔵性〉に関わる数理思想を展開した。数学は問題を可解にするような概念の導入によって無際限に進展していく –– これがまずは両者に共通するヴィジョンである。だが両哲学には大きな差異もあり、とりわけ、「意識」についての両者の考えは好対照をなしている。ゲーデルが新たな概念を見出していく方法としての意識の志向性を強調する一方で、カヴァイエスにおいては概念の統一する操作の内に、あるいは概念間の移行のさなかに、意識作用はその度ごとにしか存在しないものとみなされるのである。

この対照性の根底にあるのは、したがって、「概念」に対する両者の考えの差異であるだろう。ゲーデルの「概念実在論」によれば、「何らかの充分に確定された実在」である数学的対象を記述する概念とは「一意的」なものであり、そのような概念は事物の世界とは独立に存在している(13)。これに対して、カヴァイエスの「概念の哲学」においては、概念は対象との関係においてよりも、まずは操作や規則を統一するものと捉えられ、対象とはこのような操作によって構成される副産物に過ぎない。そして、ある概念は後続する概念によって意味の「刷新」を受けることになる。

しかし本稿は再度、両者の親近性を確認することで論を閉じることにしたい。なるほど、カヴァイエスは数学的対象のプラトニズムを ―― この表現を「ことがらにあまり適していない」(Cavaillès, 1994b, p. 603) と述べつつも ―― とらない。しかしながら、彼にとって数学の概念が、操作を統一し、したがって直観的な操作を可能にすることで、その操作の相関項として対象を構成していく「リアリティ」であることは疑いを入れない。とするならば、彼の「概念の哲学」はゲーデルとは異なった意味であるにせよ、やはり一つの「概念実在論」であると形容しうるのではないか。カヴァイエスとゲーデル、この二人はどちらも、概念に、そして概念の連鎖や連関に、数学の根本的な実在性を見て取ったのである。

註

(1) 飯田 (2006, pp. 139–141) を参照。この箇所で分析されているのは、「無尽蔵性」の言葉が登場する 1951 年のギブス講演原稿における以下の一節周辺である。「数学の完結不可能性（incompletability）がとりわけ明白になるのは、この定理［第二不完全性定理］からです。なぜならば、この定理によれば、公理と規則の明確に定義された体系をつくった人が『これらの公理と規則のすべてが正しいと私は（数学的な確実さをもって）知覚するし、さらには、全数学がこれに含まれていると私は信じる』と言って、矛盾に陥らないでいることは不可能になるからです。」(Gödel, 1995b, p. 309, 邦訳, 11 頁) 強調省略、訳文一部改（訳文は以下でも適宜改める）。

(2) 「定理 XI［第二不完全性定理］は（そして、*M*［集合論の公理体系］、*A*［古典数学の公理体系］についての対応する結果も）、ヒルベルトの形式主義的な視点とまったく矛盾しないことをはっきりと注意しておこう。ヒルベルトの視点は、有限的方法によって実行された無矛盾性証明の存在を前提しているだけであり、*P*［『プリンキピア・マテマティカ』の体系］（あるいは、*M*, *A*）では表現できないような有限的証明が存在するということも考えられるからである。」(Gödel, 1986, p. 194, 邦訳, 61 頁)

(3) Gödel (1990, pp. 261–264, 邦訳, 26–30 頁) を参照。同種の考えはもう一つのよく知られた論文「ラッセルの数理論理学」にも見ることができる。

(4) 連続体仮説に関する前掲論文、第二版の後記による(Gödel, 1990, pp. 269–270, 邦訳, 38–39 頁)。

(5) 「しかしある一般的定理により、原始帰納算術を含む体系についての無矛盾性証明はこの体系内では決して表現できないから、古典的自然数論でさえ［…］有限的推論によって無矛盾であると証明することはできない。記号の組み合わせを直接指示する概念に加えて、ある抽象的な概念とそれらについての明確な命題がヒルベルトのアイディアを実行するために付け加えられねばならないということ、この事実は形式主義の主要な支持者によっても認められてきた。／［…］数学において用いられる抽象的な超限概念についての公理は、記号の組み合わせについての、またそれらの性質や関係についての有限的な考察によっては、置き換えられえない」。(Gödel, 1995c, pp. 343–344, 邦訳, 37 頁) 強調省略。

(6) 「先の議論の結果は以下のようになる。我々の公理は、もしそれらが有意味な言明として解釈されるならば、必然的に一種の〈プラトニズム〉を前提するが、それはいかなる批判的精神も満足させえないし、またこれらの公理が無矛盾であるという確信を産みだすことさえないのである。」(Gödel, 1995d, p. 50)

(7) Zach (2001, pp. 83–85) および林・八杉 (2006, 225–231 頁) を参照。

(8) この見解は無論のことカヴァイエスの認識論とブラウアーの直観主義との親近性を物語るものである。

(9) フッサールの確定的多様体については岡田 (1997) を特に参照した。

(10) フッサール自身の草稿で、このことが述べられている箇所は Husserl (1970, p. 441) である。

(11) フッサールの数学的業績については、岡田 (1987) を、確定的多様体を一種の項書き換えシステムとみなす点については、Okada (2013) をそれぞれ参照した。

(12) 「意識はそのたびごとに観念の直接的なもののうちにあり、観念の内で失われ、観念と共に消え去るのである。そして意識が他の意識（これは意識の他の契機と呼ばれがちなのかもしれないが）と結びつくのは、それらの意識が属している観念の内的紐帯によってのみである。」(Cavaillès, 1997, p. 90, 邦訳, 67 頁)

(13) 数学的対象の確定性については、Gödel (1990, p. 260, 邦訳, 25 頁) を、事物の世界からの概念の独立性については、Gödel (1995b, p. 321, 邦訳, 19 頁) を参照。また概念の一意性については、ワン (1995, 292–293 頁) を参照した。

文献

van Atten, M., Kennedy, J. (2003). 'On the philosophical development of Kurt Gödel,' *The Bulletin of Symbolic Logic*, *9*, 4, 425–476.

Cassou-Noguès, P. (2005). 'Gödel and 'the objective existence' of mathematical objects,' *History and Philosophy of Logic*, *26*, 211–228.

Cavaillès, J. (1981). *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques*, Paris: Hermann.

――― (1994a). ' Réflexions sur le fondement des mathématiques,' in B. Huisman (Ed.), *Œuvres complètes de philosophie des sciences* (pp. 577–580), Paris: Hermann.

――― (1994b). 'La pensée mathématique,' (en collaboration avec Albert Lautman) in B. Huisman (Ed.), *Œuvres complètes de philosophie des sciences* (pp. 593–630), Paris: Hermann.

――― (1997). *Sur la logique et la théorie de la science*, Paris: Vrin. (2013, 近藤和敬訳, 『論理学と学知の理論について』, 月曜社.)

Gödel, K. (1986). 'Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia mathematica* und verwandter Systeme I,' in S. Feferman, J. W. Dawson, S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay & J. v. Heijenoort (Eds.), *Collected Works*, vol. 1 (pp. 144–195), New York: Oxford University Press-Clarendon Press. (2006, 林晋・八杉満利子訳,「プリンキピア・マテマティカおよび関連した体系の形式的に決定不能な命題について I」, ゲーデル, 『不完全性定理』(15–72 頁), 岩波書店.)

――― (1990). 'What is Cantor's continuum problem ?,' in S. Feferman, J. W. Dawson, S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay & J. v. Heijenoort (Eds.), *Collected Works*, vol. 2 (pp. 254–270), New York: Oxford University Press-Clarendon Press. (1995, 岡本賢吾訳, 「カントールの連続体問題とは何か」, 飯田隆編, 『リーディングス 数学の哲学：ゲーデル以後』(17–55 頁), 勁草書房.)

――― (1995a). 'The Modern Development of the Foundations of Mathematics in the Light of Philosophy,' in S. Feferman, J. W. Dawson, W. Goldfarb, C. Parsons & R. M. Solovay (Eds.), *Collected Works*, vol. 3 (pp. 374–387), New York: Oxford University Press-Clarendon Press.

――― (1995b). 'Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and their Implications,' in S. Feferman J. W. Dawson, W. Goldfarb, C. Parsons & R. M. Solovay (Eds.), *Collected Works*, vol. 3 (pp. 304–323), New York: Oxford University Press-Clarendon Press. (2007, 高橋昌一郎訳, 「数学基礎論における幾つかの基本的定理とその帰結」, 『現代思想：総特集 ゲーデル』, 第 35 巻第 3 号, 8–27 頁.)

――― (1995c). 'Is Mathematics Syntax of Language ?,' in S. Feferman, J. W. Dawson, W. Goldfarb, C. Parsons & R. M. Solovay (Eds.), *Collected Works*, vol. 3 (pp. 334–356), New York: Oxford University Press-Clarendon Press. (2007, 飯田隆訳, 「数学は言語の構文論か」, 『現代思想：総特集 ゲーデル』, 第 35 巻第 3 号, 28–51 頁.)

――― (1995d). 'The Present Situation in the Foundations of Mathematics,' in S. Feferman, J. W. Dawson, W. Goldfarb, C. Parsons & R. M. Solovay (Eds.), *Collected Works*, vol. 3 (pp. 45–53), New York: Oxford University Press-Clarendon Press.

林晋, 八杉満利子 (2006).「解説」, ゲーデル, 『不完全性定理』(73–305 頁), 岩波書店.

Husserl, E. (1970). 'Das Imaginäre in der Mathematik,' in Lothar Eley (Ed.), *Husserliana*, vol. 12 (pp. 430–451), Den Haag: Martinus Nijhoff.

――― (1974). *Formale und Transzendentale Logik : Versuch einer Kritik der logischen Vernunft*, in P. Janssen (Ed.), *Husserliana*, vol. 17 (pp. 1–298), Den Haag: Martinus Nijhoff. (2015, 立松弘孝訳, 『形式論理学と超越論的論理学』, みすず書房.)

飯田隆 (2006). 「ゲーデルと哲学 –– 不完全性・分析性・機械論」, 田中一之編, 『ゲーデルと 20 世紀の論理学①：ゲーデルの 20 世紀』(111–169 頁), 東京大学出版会.

岡田光弘 (1987). 「フッサール初期の『哲学的–数学的諸研究の終結テーマ』とゲッチンゲン学派の論理哲学」, 『哲學』, 第 37 号, 210–221 頁.

――― (1997). 「フッサールの形式論理学分析における『多様体』概念の役割」, 『哲学』, 三田哲学会, 第

101 号, 1–43 頁.
Okada, M. (2013). ‘Husserl and Hilbert on Completeness and Husserl's Term Rewrite-based Theory of Multiplicity,’ *24th International Conference on Rewriting Techniques and Applications (RTA2013)*, 21, 4–19.
Sinaceur, H. (1999). *Corps et modèles. Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*, seconde édition corrigée, Paris: Vrin.
ハオ・ワン (1995). 『ゲーデル再考 ––人と哲学––』, 土屋俊・戸田山和久訳, 産業図書.
Zach, R. (2001). *Hilbert’s Finitism: Historical, Philosophical, and Metamathematical Perspectives*, Dissertation, University of California: Berkeley.

〔豊橋技術科学大学講師〕